

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

feladatok a gyakorlatra (csoportok)

2019 őszi félév, BSc

56. feladat Döntse el, hogy az alábbi halmazok grupoidot, félcsoportot, csoportot alkotnak-e a megadott művelettel.

- (a) $(\mathbb{R}^4; +)$ (b) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +)$ (c) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; \cdot)$
 (d) $(\mathbb{Z}_6; \cdot)$ (e) $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}; \cdot)$ (f) $(\mathbb{Z}_6^*; +)$
 (g) $(\mathcal{P}(\{a, b\}); \cap)$ (h) $(\mathcal{P}(\{a, b\}); \Delta)$ (i) $(\mathcal{P}(\{a, b\}); \setminus)$

57. feladat Tetszőleges R kommutatív egységelemes gyűrű esetén legyen $L_R = \{x \mapsto ax + b : a \in R^*, b \in R\}$ az R feletti bijektív „lineáris” függvények halmaza. Mutassa meg, hogy L_R csoportot alkot a leképezésszorítás műveletével.

58. feladat Érvényes-e minden csoportban tetszőleges x, y elemekre az $x^2 = y^2, x^3 = y^3 \implies x = y$ következtetés?

59. feladat Egészítse ki az alábbi műveletábrázolatokat úgy, hogy csoportokat kapjon (az asszociativitást nem kell ellenőrizni).

(a) $\begin{array}{c ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & & \\ b & & & \\ c & & & a \end{array}$	(b) $\begin{array}{c cccc} \cdot & a & b & c & d \\ \hline a & & & & \\ b & & c & & \\ c & & & c & \\ d & & & & c \end{array}$	(c) $\begin{array}{c cccc} \cdot & a & b & c & d \\ \hline a & & & & \\ b & & d & & \\ c & & & c & \\ d & & & & c \end{array}$	(d) $\begin{array}{c ccccc} \cdot & a & b & c & d & e \\ \hline a & & b & & & \\ b & & & & & \\ c & & & & & a \\ d & & & & & c \\ e & & & & & \end{array}$
------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

60. feladat Melyik nevezetes csoporttal izomorfak a 59. feladatbeli csoportok?

61. feladat Döntse el, hogy a műveletábrázolat által meghatározott \mathbb{A} grupoid izomorf-e a \mathbb{B} grupoiddal.

(a) $\begin{array}{c cccc} \cdot & u & v & x & y \\ \hline u & y & u & v & x \\ v & u & v & x & y \\ x & v & x & y & u \\ y & x & y & u & v \end{array} \quad \mathbb{B} = (\mathcal{P}(\{a, b\}); \cup)$	(b) $\begin{array}{c cccc} \cdot & u & v & x & y \\ \hline u & y & u & v & x \\ v & u & v & x & y \\ x & v & x & y & u \\ y & x & y & u & v \end{array} \quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; +)$
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

(c) $\begin{array}{c cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & d & c \\ c & c & d & a & b \\ d & d & c & b & a \end{array} \quad \mathbb{B} = (\{1, i, -1, -i\}; \cdot)$	(d) $\begin{array}{c cccc} \circ & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline \alpha & \delta & \beta & \alpha & \gamma \\ \beta & \beta & \beta & \beta & \beta \\ \gamma & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \delta & \gamma & \beta & \delta & \delta \end{array} \quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_5^*; \cdot)$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

(e) $\begin{array}{c cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & d & c \\ c & c & d & a & b \\ d & d & c & b & a \end{array} \quad \mathbb{B} = (\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}; \cdot)$

62. feladat Számítsa ki D_{15} -ben az alábbi elemeket. Az eredményt a^k vagy $a^k t$ ($k = 0, 1, \dots, 14$) alakban adja meg.

- (a) a^{154} (b) $a^7 t \cdot a^{12} t$ (c) $a^{23} t \cdot a^{18}$
 (d) $(at \cdot a^{-5} t)^{-3}$ (e) $a^{10} t \cdot a^8 t$ (f) $(a^{-1} t a)^4$

63. feladat Oldja meg D_{15} -ben az alábbi egyenleteket. Az eredményt a^k vagy $a^k t$ ($k = 0, 1, \dots, 14$) alakban adja meg.

$$(a) x \cdot ta^3 = a \quad (b) a^4 t \cdot x \cdot a = ta^9 \quad (c) ta^7 \cdot x \cdot a^2 t = a^{23} t$$

$$(d) ta^5 \cdot x \cdot a^2 = t \quad (e) t \cdot x \cdot ta^5 = (ta)^2 \quad (f) ta^3 \cdot x = a$$

64. feladat Adja meg az alábbi S_7 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként.

$$(a) ((1342)(237))^{126}(3476)^{-1}$$

$$(b) ((13)(15)(276))^{-10}(125)(63)$$

$$(c) (345)((7451)^{-1}(4256))^{83}$$

$$(d) ((124)^{35}(134))^{-4}(27)$$

$$(e) ((1247)^{-6}(154)^{103})^{-100}$$

65. feladat Állítsa elő transzpozíciók szorzataként az alábbi S_7 -beli permutációkat, és állapítsa meg a paritásukat.

$$(a) (341572)$$

$$(b) (1423)(1236)$$

$$(c) (123)^{101}$$

$$(d) (13472)(1256)$$

$$(e) (1234)^{-100}$$

66. feladat Adjon meg egy olyan $\pi \in S_6$ permutációt, ami rendelkezik a megadott tulajdonságokkal (ha van ilyen π).

$$(a) \pi^{15} = \text{id}, \text{ és } \pi \text{ páros permutáció}$$

$$(b) \pi^{15} = \text{id}, \text{ és } \pi \text{ páratlan permutáció}$$

$$(c) \pi \text{ két idegen ciklus szorzata, és } \pi \text{ páros permutáció}$$

$$(d) \pi \text{ két idegen ciklus szorzata, és } \pi \text{ páratlan permutáció}$$

$$(e) \pi \text{ három idegen ciklus szorzata, és } \pi \text{ páros permutáció}$$

67. feladat Oldja meg S_6 -ban a $\pi^2 = (1\ 2)$, illetve a $\pi^2 = (1\ 2\ 3)$ egyenleteket.

68. feladat Bizonyítsa be, hogy minden S_n -beli permutáció felírható legfeljebb $n - 1$ transzpozíció szorzataként.

69. feladat Határozza meg az alábbi csoportokban a megadott elemek rendjét.

$$(a) i \in \mathbb{C}^* \quad (b) (134)(52) \in S_5 \quad (c) \bar{2} \in \mathbb{Z}_5^* \quad (d) \bar{9} \in \mathbb{Z}_{12} \quad (e) a^9 \in D_{24}$$

$$(f) \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \in \mathbb{C}^* \quad (g) (1245)(234) \in S_5 \quad (h) \bar{5} \in \mathbb{Z}_9^* \quad (i) \bar{10} \in \mathbb{Z}_{12} \quad (j) ta^9 \in D_{24}$$

70. feladat Adjon meg egy n -edrendű elemet az alábbi csoportokban.

$$(a) \mathbb{C}^*, n = 12 \quad (b) \mathbb{Z}_{12}, n = 3 \quad (c) D_6, n = 3 \quad (d) S_6, n = 6$$

$$(e) S_5, n = 6 \quad (f) \mathbb{Z}_{15}^*, n = 4 \quad (g) D_8, n = 2 \quad (h) \mathbb{Q}^*, n = 2$$

71. feladat Hány n -edrendű elem van az alábbi csoportokban?

$$(a) \mathbb{C}^*, n = 12 \quad (b) \mathbb{Z}_{100}, n = 10 \quad (c) D_{24}, n = 2 \quad (d) S_4, n = 2$$

$$(e) S_4, n = 6 \quad (f) \mathbb{Z}_9^*, n = 3 \quad (g) D_{24}, n = 5 \quad (h) \mathbb{Q}, n = 2$$

72. feladat Igazolja, hogy ha egy csoport minden elemének rendje legfeljebb 2, akkor a csoport kommutatív.

73. feladat Mutassa meg, hogy ha egy véges csoport elemszáma páros, akkor a csoportban van másodrendű elem.

74. feladat Mutassa meg, hogy minden Abel-csoport legfeljebb másodrendű elemeinek halmaza részcsoporthat alkot.

75. feladat Adjon példát olyan Abel-csoportra, melyben a legfeljebb harmadrendű elemek nem alkotnak részcsoporthat.

76. feladat Döntse el, hogy a G csoportban részcsoporthat alkot-e a megadott H részhalmaz.

$$(a) G = S_4, H = \{\text{id}, (13), (24), (13)(24)\} \quad (b) G = D_6, H = \{\text{id}, t, a^2, a^2 t\} \quad (c) G = (\mathbb{Z}, +), H = \mathbb{N}$$

$$(d) G = (\mathbb{C}^*, \cdot), H = (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot) \quad (e) G = S_5, H = \{\text{id}, (135), (153)\} \quad (f) G = (\mathbb{Z}_6, +), H = \mathbb{Z}_6^*$$

77. feladat Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A választ minden esetben indokolni kell!

- (a) Minden páratlan rendű permutáció páros.
- (b) Minden páros permutáció rendje páratlan.
- (c) Az S_4 csoportban pontosan 6 másodrendű elem van.
- (d) Tetszőleges G csoport minden H, K részcsoporthára $H \cup K \leq G$.
- (e) Tetszőleges csoport tetszőleges a, b, x, y elemeire $axb = ayb \implies x = y$

78. feladat Határozza meg a G csoportban a B részhalmaz által generált részcsoporthot.

- (a) $G = \mathbb{Z}$, $B = \{30, 42, 105\}$
- (b) $G = \mathbb{Z}_{30}$, $B = \{\bar{6}, \bar{10}\}$
- (c) $G = \mathbb{Z}_{31}$, $B = \{\bar{6}, \bar{10}\}$
- (d) $G = D_{12}$, $B = \{a^3, a^2t\}$
- (e) $G = D_{10}$, $B = \{a^4, a^5t\}$
- (f) $G = S_4$, $B = \{(1234), (13)\}$
- (g) $G = \mathbb{C}^*$, $B = \left\{i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- (h) $G = \mathbb{Q}$, $B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$
- (i) $G = \mathbb{Q}^*$, $B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

79. feladat Adjon meg 1, 2, illetve 3 elemű minimális generátorrendszert a \mathbb{Z}_{18} , illetve az S_3 csoportban (ha létezik).

80. feladat Melyek izomorfak az alábbi csoportok közül? (A választ minden esetben indokolni kell!)

- (a) \mathbb{Z}_2^3 , \mathbb{Z}_{20}^* , $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}); \Delta)$, D_4
- (b) D_6 , A_4 , \mathbb{Z}_{13}^* , \mathbb{Z}_{12}
- (c) D_3 , S_3 , \mathbb{Z}_7^* , \mathbb{Z}_9^*
- (d) \mathbb{Z}_5^* , \mathbb{Z}_8^* , \mathbb{Z}_{10}^* , \mathbb{Z}_{12}^*
- (e) D_4 , S_4 , \mathbb{Z}_{15}^* , E_8

81. feladat Adjon meg n -elemű részcsoporthot a G csoportban (ha létezik n -elemű részcsoporth).

- (a) $G = \mathbb{Z}_{24}$, $n = 4$
- (b) $G = \mathbb{Z}_{24}^*$, $n = 4$
- (c) $G = \mathbb{Z}_{24}$, $n = 3$
- (d) $G = \mathbb{Z}_{24}^*$, $n = 3$
- (e) $G = D_6$, $n = 4$
- (f) $G = S_4$, $n = 6$

82. feladat Adjon meg olyan G csoportot, amely rendelkezik a megadott tulajdonságokkal (ha létezik ilyen csoport).

- (a) G Abel-csoport, de nem ciklikus
- (b) G nem Abel-csoport, de minden valódi részcsoporthja Abel-csoport
- (c) G véges, és van benne végtelen rendű elem
- (d) $|G| = 8$, és van 4-elemű részcsoporthja
- (e) $|G| = 8$, és van 3-elemű részcsoporthja