Szimmetrikus polinomok

A Viète-formulák alkalmazása

Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek számtani, mértani és harmonikus közepét, valamint köbösszegét.

A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= 1, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= 8. \end{aligned}$$

A Viète-formulák alkalmazása

Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek számtani, mértani és harmonikus közepét, valamint köbösszegét.

A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3, \\
\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= 1, \\
\alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= 8.
\end{aligned}$$

számtani közép:

A Viète-formulák alkalmazása

Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek számtani, mértani és harmonikus közepét, valamint köbösszegét.

A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= 1, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= 8. \end{aligned}$$

számtani közép:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} =$$

A Viète-formulák alkalmazása

Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek számtani, mértani és harmonikus közepét, valamint köbösszegét.

A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3, \\
\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= 1, \\
\alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= 8.
\end{aligned}$$

számtani közép:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

A Viète-formulák alkalmazása

Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek számtani, mértani és harmonikus közepét, valamint köbösszegét.

A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= 1, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= 8. \end{aligned}$$

számtani közép:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

mértani közép:

A Viète-formulák alkalmazása

Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek számtani, mértani és harmonikus közepét, valamint köbösszegét.

A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= 1, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= 8. \end{aligned}$$

számtani közép:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

mértani közép:

$$\sqrt[3]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} =$$

A Viète-formulák alkalmazása

Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek számtani, mértani és harmonikus közepét, valamint köbösszegét.

A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= 1, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= 8. \end{aligned}$$

számtani közép:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

mértani közép:

$$\sqrt[3]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

A Viète-formulák alkalmazása

Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek számtani, mértani és harmonikus közepét, valamint köbösszegét.

A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= 1, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= 8.\end{aligned}$$

számtani közép:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

mértani közép:

$$\sqrt[3]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

harmonikus közép:

A Viète-formulák alkalmazása

Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek számtani, mértani és harmonikus közepét, valamint köbösszegét.

A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= 1, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= 8. \end{aligned}$$

számtani közép:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

mértani közép:

$$\sqrt[3]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

harmonikus közép:

$$\frac{3}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}} =$$

A Viète-formulák alkalmazása

Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek számtani, mértani és harmonikus közepét, valamint köbösszegét.

A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= 1, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= 8. \end{aligned}$$

számtani közép:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

mértani közép:

$$\sqrt[3]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

harmonikus közép:

$$\frac{3}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}} = \frac{3}{\frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}} =$$

A Viète-formulák alkalmazása

Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek számtani, mértani és harmonikus közepét, valamint köbösszegét.

A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= 1, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= 8. \end{aligned}$$

számtani közép:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

mértani közép:

$$\sqrt[3]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

harmonikus közép:

$$\frac{3}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}} = \frac{3}{\frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}} = \frac{3\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3} =$$

A Viète-formulák alkalmazása

Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek számtani, mértani és harmonikus közepét, valamint köbösszegét.

A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= 1, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= 8. \end{aligned}$$

számtani közép:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

mértani közép:

$$\sqrt[3]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

harmonikus közép:

$$\frac{3}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}} = \frac{3}{\frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}} = \frac{3\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3} = \frac{3 \cdot 8}{1} = 24$$

A Viète-formulák alkalmazása

Vegyük észre, hogy

$$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 - 3 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) + 3 \cdot \alpha_1\alpha_2\alpha_3 =$$
$$= 3^3 - 3 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 8 = 42$$

A Viète-formulák alkalmazása

Vegyük észre, hogy

$$\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3=$$
$$=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3-3\cdot(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)+3\cdot\alpha_1\alpha_2\alpha_3=$$
$$=3^3-3\cdot 3\cdot 1+3\cdot 8=42$$

A gyököknek a Viète-formulákban szereplő kifejezései mind szimmetrikusak, ezért bármi, amit ezek segítségével felírunk, ugyancsak szimmetrikus lesz.

A Viète-formulák alkalmazása

Vegyük észre, hogy

$$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 - 3 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) + 3 \cdot \alpha_1\alpha_2\alpha_3 =$$

$$= 3^3 - 3 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 8 = 42$$

A gyököknek a Viète-formulákban szereplő kifejezései mind szimmetrikusak, ezért bármi, amit ezek segítségével felírunk, ugyancsak szimmetrikus lesz.

A gyökök szimmetrikus polinomjait viszont mind ki lehet számítani a Viète-formulák segítségével, mert ...

A szimmetrikus polinomok alaptétele

Tétel (a szimmetrikus polinomok alaptétele).

Bármely test feletti n-határozatlanú szimmetrikus polinom felírható, mégpedig egyetlen módon, az alábbi $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként:

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} x_i \in T[x_1, \ldots, x_n].$$

A szimmetrikus polinomok alaptétele

Tétel (a szimmetrikus polinomok alaptétele).

Bármely test feletti n-határozatlanú szimmetrikus polinom felírható, mégpedig egyetlen módon, az alábbi $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként:

$$\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} x_i \in T[x_1, \dots, x_n].$$

Példa.

Fejezzük ki az $(x_1 - x_2)^2$ polinomot a $\sigma_1 = x_1 + x_2$ és $\sigma_2 = x_1 x_2$ elemi szimmetrikus polinomok segítségével:

A szimmetrikus polinomok alaptétele

Tétel (a szimmetrikus polinomok alaptétele).

Bármely test feletti n-határozatlanú szimmetrikus polinom felírható, mégpedig egyetlen módon, az alábbi $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként:

$$\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} x_i \in T[x_1, \ldots, x_n].$$

Példa.

Fejezzük ki az $(x_1 - x_2)^2$ polinomot a $\sigma_1 = x_1 + x_2$ és $\sigma_2 = x_1 x_2$ elemi szimmetrikus polinomok segítségével:

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

A szimmetrikus polinomok alaptétele

Tétel (a szimmetrikus polinomok alaptétele).

Bármely test feletti n-határozatlanú szimmetrikus polinom felírható, mégpedig egyetlen módon, az alábbi $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként:

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \prod_{i \in I} x_i \in T[x_1, \ldots, x_n].$$

Példa.

Fejezzük ki az $(x_1 - x_2)^2$ polinomot a $\sigma_1 = x_1 + x_2$ és $\sigma_2 = x_1 x_2$ elemi szimmetrikus polinomok segítségével:

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) - 4x_1x_2$$

A szimmetrikus polinomok alaptétele

Tétel (a szimmetrikus polinomok alaptétele).

Bármely test feletti n-határozatlanú szimmetrikus polinom felírható, mégpedig egyetlen módon, az alábbi $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként:

$$\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} x_i \in T\left[x_1, \ldots, x_n\right].$$

Példa.

Fejezzük ki az $\left(x_1 - x_2\right)^2$ polinomot a $\sigma_1 = x_1 + x_2$ és $\sigma_2 = x_1 x_2$ elemi szimmetrikus polinomok segítségével:

$$\left(x_1 - x_2\right)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) - 4x_1x_2 = \sigma_1^2 - 4\sigma_2.$$

A szimmetrikus polinomok alaptétele

Tétel (a szimmetrikus polinomok alaptétele).

Bármely test feletti n-határozatlanú szimmetrikus polinom felírható, mégpedig egyetlen módon, az alábbi $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként:

$$\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} x_i \in T[x_1, \ldots, x_n].$$

Példa.

Fejezzük ki az $(x_1 - x_2)^2$ polinomot a $\sigma_1 = x_1 + x_2$ és $\sigma_2 = x_1 x_2$ elemi szimmetrikus polinomok segítségével:

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) - 4x_1x_2 = \sigma_1^2 - 4\sigma_2.$$

Alkalmazzuk ezt az $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ másodfokú polinomra ...

Megoldóképlet

Példa (folyt.).

Alkalmazzuk ezt az $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ másodfokú polinomra:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2$$

Megoldóképlet

Példa (folyt.).

Alkalmazzuk ezt az $ax^2 + bx + c = a\left(x - \alpha_1\right)\left(x - \alpha_2\right)$ másodfokú polinomra:

$$\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)^2 = \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}.$$

Megoldóképlet

Példa (folyt.).

Alkalmazzuk ezt az $ax^2 + bx + c = a\left(x - \alpha_1\right)\left(x - \alpha_2\right)$ másodfokú polinomra:

$$\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)^2 = \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}.$$

Tehát

$$\alpha_1 - \alpha_2 \quad = \quad \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

Megoldóképlet

Példa (folyt.).

Alkalmazzuk ezt az $ax^2 + bx + c = a\left(x - \alpha_1\right)\left(x - \alpha_2\right)$ másodfokú polinomra:

$$\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)^2 = \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= \tfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= \tfrac{-b}{a} \end{aligned}$$

Megoldóképlet

Példa (folyt.).

Alkalmazzuk ezt az $ax^2 + bx + c = a\left(x - \alpha_1\right)\left(x - \alpha_2\right)$ másodfokú polinomra:

$$\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)^2 = \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}.$$

Tehát

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_1 - \alpha_2 & = & \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = & \frac{-b}{a} \end{array}\right\} \implies \alpha_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Megoldóképlet

Példa (folyt.).

Alkalmazzuk ezt az $ax^2 + bx + c = a\left(x - \alpha_1\right)\left(x - \alpha_2\right)$ másodfokú polinomra:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}.$$

Tehát

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_1 - \alpha_2 & = & \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = & \frac{-b}{a} \end{array}\right\} \implies \alpha_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Amikor egy magasabb fokú egyenletet meg akarunk oldani, akkor a nem szimmetrikus α_1 kifejezést kell felírnunk a polinom együtthatói segítségével.

Megoldóképlet

Példa (folyt.).

Alkalmazzuk ezt az $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ másodfokú polinomra:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}.$$

Tehát

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_1 - \alpha_2 & = & \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = & \frac{-b}{a} \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Amikor egy magasabb fokú egyenletet meg akarunk oldani, akkor a nem szimmetrikus α_1 kifejezést kell felírnunk a polinom együtthatói segítségével. A fenti példában egy négyzetgyökvonással sikerült „megtörnünk" a szimmetriát. Legfeljebb negyedfokú polinomokra ezt meg lehet tenni, de ötödfokú polinom esetén már a gyökök szimmetriának (vagyis az S_5 permutációcsoportnak) olyan a szerkezete, hogy ez nem lehetséges.

Megoldóképlet

Példa (folyt.).

Alkalmazzuk ezt az $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ másodfokú polinomra:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}.$$

Tehát

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_1 - \alpha_2 & = & \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = & \frac{-b}{a} \end{array}\right\} \implies \alpha_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Amikor egy magasabb fokú egyenletet meg akarunk oldani, akkor a nem szimmetrikus α_1 kifejezést kell felírnunk a polinom együtthatói segítségével. A fenti példában egy négyzetgyökvonással sikerült „megtörnünk" a szimmetriát. Legfeljebb negyedfokú polinomokra ezt meg lehet tenni, de ötödfokú polinom esetén már a gyökök szimmetriának (vagyis az S_5 permutációcsoportnak) olyan a szerkezete, hogy ez nem lehetséges.

Tétel (Ruffini, 1799; Abel, 1824; Galois, 1830).

Az általános n-edfokú egyenletnek $n \geq 5$ esetén nincs megoldóképlete, sőt, például az $x^5 - 4x + 2 = 0$ egyenletnek még „ad hoc" megoldóképlete sincs.