

## Nevezetes csoportok

# Izomiaúrfizmus

$\leftrightarrow$	igaz	hamis
igaz	igaz	hamis
hamis	hamis	igaz

$\cdot$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



izomorf csoportok

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$\otimes$		
		
		

# Izomiaúrfizmus

Az  $\mathbb{A} = (\{ \text{🐈}, \text{🐈} \}; \otimes)$  és a  $\mathbb{B} = (\{ \bar{0}, \bar{1} \}; +)$  csoportok szerkezete ugyanaz:  
ha  $\mathbb{A}$  műveletábrázatában

minden -t átnevezünk  $\bar{0}$ -ra, és minden -t átnevezünk  $\bar{1}$ -re,  
akkor éppen  $\mathbb{B}$  műveletábrázatát kapjuk:

# Izomiaúrfizmus

Az  $\mathbb{A} = (\{ \text{🐈, 🐈} \}; \otimes)$  és a  $\mathbb{B} = (\{ \bar{0}, \bar{1} \}; +)$  csoportok szerkezete ugyanaz:  
ha  $\mathbb{A}$  műveletábrázatában

minden 🐈-t átnevezünk  $\bar{0}$ -ra, és minden 🐈-t átnevezünk  $\bar{1}$ -re,  
akkor éppen  $\mathbb{B}$  műveletábrázatát kapjuk:

$\otimes$		
		
		

átnevezés  
→

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

# Izomiaúrfizmus

Az  $\mathbb{A} = (\{\text{🐈, 🐈}\}; \otimes)$  és a  $\mathbb{B} = (\{\bar{0}, \bar{1}\}; +)$  csoportok szerkezete ugyanaz:  
ha  $\mathbb{A}$  műveletábrázatában

minden 🐈-t átnevezünk  $\bar{0}$ -ra, és minden 🐈-t átnevezünk  $\bar{1}$ -re,  
akkor éppen  $\mathbb{B}$  műveletábrázatát kapjuk:

$\otimes$			
			átnevezés →
			
$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	
	$\bar{0}$	$\bar{1}$	
	$\bar{1}$	$\bar{0}$	

Ezt az „átnevezést” a

$$\varphi: \{\text{🐈, 🐈}\} \rightarrow \{\bar{0}, \bar{1}\}, \quad \text{🐈} \mapsto \bar{0}, \quad \text{🐈} \mapsto \bar{1}$$

leképezéssel írhatjuk le.

# Izomiaúrfizmus

Az  $\mathbb{A} = (\{ \text{🐱}, \text{🐱} \}; \otimes)$  és a  $\mathbb{B} = (\{ \bar{0}, \bar{1} \}; +)$  csoportok szerkezete ugyanaz:  
ha  $\mathbb{A}$  műveletábrázatában

minden 🐱-t átnevezünk  $\bar{0}$ -ra, és minden 🐱-t átnevezünk  $\bar{1}$ -re,  
akkor éppen  $\mathbb{B}$  műveletábrázatát kapjuk:

$\otimes$		
		
		

átnevezés  
 $\longrightarrow$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Ezt az „átnevezést” a

$$\varphi: \{ \text{🐱}, \text{🐱} \} \rightarrow \{ \bar{0}, \bar{1} \}, \quad \text{🐱} \mapsto \bar{0}, \quad \text{🐱} \mapsto \bar{1}$$

leképezéssel írhatjuk le. Az átnevezés „jogossága” pedig a következőképpen fogalmazható meg:

$$\forall a_1, a_2 \in \{ \text{🐱}, \text{🐱} \} : (a_1 \otimes a_2) \varphi = (a_1 \varphi) + (a_2 \varphi).$$

## 4.8. Definíció.

Legyen  $\mathbb{A} = (A; *)$  és  $\mathbb{B} = (B; \oplus)$  két csoport (vagy csak grupoid).

Azt mondjuk, hogy a  $\varphi: A \rightarrow B$  leképezés **izomorfizmus**  $\mathbb{A}$ -ból  $\mathbb{B}$ -be, ha

- ▶  $\varphi$  bijektív leképezés, és
- ▶  $\varphi$  felcserélhető a műveletekkel, azaz

$$\forall a_1, a_2 \in A: \quad (a_1 * a_2) \varphi = a_1 \varphi \oplus a_2 \varphi.$$

## 4.8. Definíció.

Legyen  $\mathbb{A} = (A; *)$  és  $\mathbb{B} = (B; \oplus)$  két csoport (vagy csak grupoid).

Azt mondjuk, hogy a  $\varphi: A \rightarrow B$  leképezés **izomorfizmus**  $\mathbb{A}$ -ból  $\mathbb{B}$ -be, ha

- ▶  $\varphi$  bijektív leképezés, és
- ▶  $\varphi$  felcserélhető a műveletekkel, azaz

$$\forall a_1, a_2 \in A: (a_1 * a_2) \varphi = a_1 \varphi \oplus a_2 \varphi.$$

Ha létezik  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  izomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy  $\mathbb{A}$  és  $\mathbb{B}$  **izomorf** (jelölés:  $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$ ).



# Izomorfizmus

## 4.8. Definíció.

Legyen  $\mathbb{A} = (A; *)$  és  $\mathbb{B} = (B; \oplus)$  két csoport (vagy csak grupoid).

Azt mondjuk, hogy a  $\varphi: A \rightarrow B$  leképezés **izomorfizmus**  $\mathbb{A}$ -ból  $\mathbb{B}$ -be, ha

- ▶  $\varphi$  bijektív leképezés, és
- ▶  $\varphi$  felcserélhető a műveletekkel, azaz

$$\forall a_1, a_2 \in A: (a_1 * a_2) \varphi = a_1 \varphi \oplus a_2 \varphi.$$

Ha létezik  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  izomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy  $\mathbb{A}$  és  $\mathbb{B}$  **izomorf** (jelölés:  $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$ ).

## Példa.

- ▶  $\varphi: (\mathbb{C}; +) \rightarrow (\mathbb{C}; +), z \mapsto \bar{z}$

# Izomorfizmus

## 4.8. Definíció.

Legyen  $\mathbb{A} = (A; *)$  és  $\mathbb{B} = (B; \oplus)$  két csoport (vagy csak grupoid).

Azt mondjuk, hogy a  $\varphi: A \rightarrow B$  leképezés **izomorfizmus**  $\mathbb{A}$ -ból  $\mathbb{B}$ -be, ha

- ▶  $\varphi$  bijektív leképezés, és
- ▶  $\varphi$  felcserélhető a műveletekkel, azaz

$$\forall a_1, a_2 \in A: (a_1 * a_2) \varphi = a_1 \varphi \oplus a_2 \varphi.$$

Ha létezik  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  izomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy  $\mathbb{A}$  és  $\mathbb{B}$  **izomorf** (jelölés:  $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$ ).

## Példa.

- ▶  $\varphi: (\mathbb{C}; +) \rightarrow (\mathbb{C}; +), z \mapsto \bar{z}$
- ▶  $\varphi: (\mathbb{C}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}; \cdot), z \mapsto \bar{z}$

# Izomorfizmus

## 4.8. Definíció.

Legyen  $\mathbb{A} = (A; *)$  és  $\mathbb{B} = (B; \oplus)$  két csoport (vagy csak grupoid).

Azt mondjuk, hogy a  $\varphi: A \rightarrow B$  leképezés **izomorfizmus**  $\mathbb{A}$ -ból  $\mathbb{B}$ -be, ha

- ▶  $\varphi$  bijektív leképezés, és
- ▶  $\varphi$  felcserélhető a műveletekkel, azaz

$$\forall a_1, a_2 \in A: (a_1 * a_2) \varphi = a_1 \varphi \oplus a_2 \varphi.$$

Ha létezik  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  izomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy  $\mathbb{A}$  és  $\mathbb{B}$  **izomorf** (jelölés:  $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$ ).

## Példa.

- ▶  $\varphi: (\mathbb{C}; +) \rightarrow (\mathbb{C}; +), z \mapsto \bar{z}$
- ▶  $\varphi: (\mathbb{C}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}; \cdot), z \mapsto \bar{z}$
- ▶  $\varphi: (\mathbb{R}^+; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; +), x \mapsto \log x$

## 4.9. Példa.

Tetszőleges gyűrű Abel-csoportot alkot az összeadás műveletével, és tetszőleges egységelemes gyűrű egységei csoportot alkotnak a szorzás műveletével.  
(HF: Keressünk konkrét példákat!).

## 4.9. Példa.

Tetszőleges gyűrű Abel-csoportot alkot az összeadás műveletével, és tetszőleges egységelemes gyűrű egységei csoportot alkotnak a szorzás műveletével. (HF: Keressünk konkrét példákat!).

## 4.10. Definíció.

Ha  $G$  egy csoport, és a  $H \subseteq G$  halmaz is csoportot alkot a  $G$ -ből „örökölt” művelettel, akkor azt mondjuk, hogy  $H$  *részcsoportja*  $G$ -nek. (Pontosabban lásd a 4.43. Definícióban.)

# Számhalmazok az összeadás műveletével

Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

# Számhalmazok az összeadás műveletével

Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

▶  $H = \emptyset$

# Számhalmazok az összeadás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)



# Számhalmazok az összeadás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{0\}$

# Számhalmazok az összeadás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{0\}$ : igen (Abel-csoport)

# Számhalmazok az összeadás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$

# Számhalmazok az összeadás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : igen (Abel-csoport)

# Számhalmazok az összeadás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$

# Számhalmazok az összeadás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$ : nem (csak félcsoport)

# Számhalmazok az összeadás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$ : nem (csak félcsoport)
- ▶  $H = \{\text{páros számok}\}$

# Számhalmazok az összeadás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$ : nem (csak félcsoport)
- ▶  $H = \{\text{páros számok}\}$ : igen (Abel-csoport)



# Számhalmazok az összeadás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$ : nem (csak félcsoport)
- ▶  $H = \{\text{páros számok}\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \{\text{páratlan számok}\}$

# Számhalmazok az összeadás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$ : nem (csak félcsoport)
- ▶  $H = \{\text{páros számok}\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \{\text{páratlan számok}\}$ : nem (nem is grupoid)

# Számhalmazok az összeadás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$ : nem (csak félcsoport)
- ▶  $H = \{\text{páros számok}\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \{\text{páratlan számok}\}$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{\text{irracionális számok}\}$

# Számhalmazok az összeadás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$ : nem (csak félcsoport)
- ▶  $H = \{\text{páros számok}\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \{\text{páratlan számok}\}$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{\text{irracionális számok}\}$ : nem (nem is grupoid)

# Számhalmazok az összeadás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$ : nem (csak félcsoport)
- ▶  $H = \{\text{páros számok}\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \{\text{páratlan számok}\}$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{\text{irracionális számok}\}$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{\text{véges tizedestörtek}\}$

# Számhalmazok az összeadás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$ : nem (csak félcsoport)
- ▶  $H = \{\text{páros számok}\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \{\text{páratlan számok}\}$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{\text{irracionális számok}\}$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{\text{véges tizedestörtek}\}$ : igen (Abel-csoport)

# Számhalmazok a szorzás műveletével

Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

▶  $H = \emptyset$



# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)

# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$

# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$ : igen (Abel-csoport)

# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$

# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : nem (csak monoid)

# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ : igen (Abel-csoport)

# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$



# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ : nem (csak monoid)

# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$

# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$ : igen (Abel-csoport)

# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{N}$

# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{N}$ : nem (csak monoid)

# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{N}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \{\text{irracionális számok}\}$

# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{N}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \{\text{irracionális számok}\}$ : nem (nem is grupoid)

# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{N}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \{\text{irracionális számok}\}$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{\text{véges tizedestörtek}\} \setminus \{0\}$



# Számhalmazok a szorzás műveletével

## Példa.

Az alábbi  $H$  számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶  $H = \emptyset$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{1\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$ : igen (Abel-csoport)
- ▶  $H = \mathbb{N}$ : nem (csak monoid)
- ▶  $H = \{\text{irracionális számok}\}$ : nem (nem is grupoid)
- ▶  $H = \{\text{véges tizedestörtek}\} \setminus \{0\}$ : nem (csak monoid)

## 4.11. Példa.

Tetszőleges  $T$  test esetén a  $T$  feletti  $n \times n$ -es mátrixok gyűrűjének egységcsoportja a  $T$  feletti  $n$ -dimenziós *általános lineáris csoport* (jelölés:  $GL_n(T)$ )

## 4.11. Példa.

Tetszőleges  $T$  test esetén a  $T$  feletti  $n \times n$ -es mátrixok gyűrűjének egységcsoportja a  $T$  feletti  $n$ -dimenziós *általános lineáris csoport* (jelölés:  $GL_n(T)$ ), ebben az 1 determinánsú mátrixok alkotta részcsoport a megfelelő *speciális lineáris csoport* (jelölés:  $SL_n(T)$ ):

## 4.11. Példa.

Tetszőleges  $T$  test esetén a  $T$  feletti  $n \times n$ -es mátrixok gyűrűjének egységcsoportja a  $T$  feletti  $n$ -dimenziós *általános lineáris csoport* (jelölés:  $GL_n(T)$ ), ebben az 1 determinánsú mátrixok alkotta részcsoport a megfelelő *speciális lineáris csoport* (jelölés:  $SL_n(T)$ ):

$$GL_n(T) = \{A \in T^{n \times n} : \det(A) \neq 0\},$$

$$SL_n(T) = \{A \in T^{n \times n} : \det(A) = 1\}.$$

## 4.12. Példa.

A komplex egységgyökök csoportot alkotnak a szorzás műveletével; ezen belül az  $n$ -edik egységgyökök egy  $E_n$  részcsoporthat alkotnak minden  $n \geq 2$  egész számra. Az  $E_n$  csoport izomorf a

## 4.12. Példa.

A komplex egységgyökök csoportot alkotnak a szorzás műveletével; ezen belül az  $n$ -edik egységgyökök egy  $E_n$  részcsoporthot alkotnak minden  $n \geq 2$  egész számra. Az  $E_n$  csoport izomorf a  $\mathbb{Z}_n$  csoporttal:  $(E_n; \cdot) \cong (\mathbb{Z}_n; +)$ .

# Kvaterniócsoport

Példa.

A  $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  halmaz csoportot alkot az alábbi szorzással. Ezt a csoportot *kvaterniócsoportnak* nevezzük, és  $Q$ -val jelöljük.

$\cdot$	1	-1	$i$	$-i$	$j$	$-j$	$k$	$-k$
1	1	-1	$i$	$-i$	$j$	$-j$	$k$	$-k$
-1	-1	1	$-i$	$i$	$-j$	$j$	$-k$	$k$
$i$	$i$	$-i$	-1	1	$k$	$-k$	$-j$	$j$
$-i$	$-i$	$i$	1	-1	$-k$	$k$	$j$	$-j$
$j$	$j$	$-j$	$-k$	$k$	-1	1	$i$	$-i$
$-j$	$-j$	$j$	$k$	$-k$	1	-1	$-i$	$i$
$k$	$k$	$-k$	$j$	$-j$	$-i$	$i$	-1	1
$-k$	$-k$	$k$	$-j$	$j$	$i$	$-i$	1	-1

# Kvaterniócsoport

Példa.

A  $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  halmaz csoportot alkot az alábbi szorzással. Ezt a csoportot *kvaterniócsoportnak* nevezzük, és  $Q$ -val jelöljük.

$\cdot$	1	-1	$i$	$-i$	$j$	$-j$	$k$	$-k$
1	1	-1	$i$	$-i$	$j$	$-j$	$k$	$-k$
-1	-1	1	$-i$	$i$	$-j$	$j$	$-k$	$k$
$i$	$i$	$-i$	-1	1	$k$	$-k$	$-j$	$j$
$-i$	$-i$	$i$	1	-1	$-k$	$k$	$j$	$-j$
$j$	$j$	$-j$	$-k$	$k$	-1	1	$i$	$-i$
$-j$	$-j$	$j$	$k$	$-k$	1	-1	$-i$	$i$
$k$	$k$	$-k$	$j$	$-j$	$-i$	$i$	-1	1
$-k$	$-k$	$k$	$-j$	$j$	$i$	$-i$	1	-1

Megjegyzés.

A táblázatból elég az  $ij = k = -ji$ ,  $jk = i = -kj$ ,  $ki = j = -ik$  és  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  szorzatokat megjegyezni, a többi már magától értetődő.



# Kvaterniócsoport

## Példa.

A  $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  halmaz csoportot alkot az alábbi szorzással. Ezt a csoportot *kvaterniócsoportnak* nevezzük, és  $Q$ -val jelöljük.

$\cdot$	1	-1	$i$	$-i$	$j$	$-j$	$k$	$-k$
1	1	-1	$i$	$-i$	$j$	$-j$	$k$	$-k$
-1	-1	1	$-i$	$i$	$-j$	$j$	$-k$	$k$
$i$	$i$	$-i$	-1	1	$k$	$-k$	$-j$	$j$
$-i$	$-i$	$i$	1	-1	$-k$	$k$	$j$	$-j$
$j$	$j$	$-j$	$-k$	$k$	-1	1	$i$	$-i$
$-j$	$-j$	$j$	$k$	$-k$	1	-1	$-i$	$i$
$k$	$k$	$-k$	$j$	$-j$	$-i$	$i$	-1	1
$-k$	$-k$	$k$	$-j$	$j$	$i$	$-i$	1	-1

## Megjegyzés.

A táblázatból elég az  $ij = k = -ji$ ,  $jk = i = -kj$ ,  $ki = j = -ik$  és  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  szorzatokat megjegyezni, a többi már magától értetődő.

Az  $a + bi + cj + dk$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) alakú kifejezéseken természetes módon lehet definiálni az összeadás és szorzás műveletét, így kapjuk a kvaterniók **ferdetestét** („majdnem” test, csak éppen a szorzás nem kommutatív).

# Permutációk

## 4.13. Példa.

Egy tetszőleges nemüres  $A$  halmaz összes transzformációi monoidot alkotnak a leképezésszorzás műveletével, a bijektív transzformációk (azaz permutációk) pedig csoportot alkotnak. Ez utóbbit nevezzük az  $A$  feletti *szimmetrikus csoportnak* (jelölés:  $S_A$ , illetve  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  esetén  $S_n$ ).

# Permutációk

## 4.13. Példa.

Egy tetszőleges nemüres  $A$  halmaz összes transzformációi monoidot alkotnak a leképezésszorzás műveletével, a bijektív transzformációk (azaz permutációk) pedig csoportot alkotnak. Ez utóbbit nevezzük az  $A$  feletti *szimmetrikus csoportnak* (jelölés:  $S_A$ , illetve  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  esetén  $S_n$ ).

## 4.14. Példa.

Az  $S_4$  csoportban a  $V = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  részcsoporthat *Klein-féle csoportnak* nevezzük.

$\cdot$	id	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
id	id	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
(12)(34)	(12)(34)	id	(14)(23)	(13)(24)
(13)(24)	(13)(24)	(14)(23)	id	(12)(34)
(14)(23)	(14)(23)	(13)(24)	(12)(34)	id

Ez a csoport izomorf a korábban látott

# Permutációk

## 4.13. Példa.

Egy tetszőleges nemüres  $A$  halmaz összes transzformációi monoidot alkotnak a leképezésszorzás műveletével, a bijektív transzformációk (azaz permutációk) pedig csoportot alkotnak. Ez utóbbit nevezzük az  $A$  feletti *szimmetrikus csoportnak* (jelölés:  $S_A$ , illetve  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  esetén  $S_n$ ).

## 4.14. Példa.

Az  $S_4$  csoportban a  $V = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  részcsoporthat *Klein-féle csoportnak* nevezzük.

$\cdot$	id	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
id	id	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
(12)(34)	(12)(34)	id	(14)(23)	(13)(24)
(13)(24)	(13)(24)	(14)(23)	id	(12)(34)
(14)(23)	(14)(23)	(13)(24)	(12)(34)	id

Ez a csoport izomorf a korábban látott  $(\mathcal{P}(\{a, b\}); \Delta)$  és  $(\mathbb{Z}_2^2; +)$  csoportokkal.

## 4.15. Példa.

A sík összes egybevágósági transzformációi csoportot alkotnak a leképezésszorzás műveletével, egy adott síkidomot önmagába képező egybevágóságok pedig részcsoporthat alkotnak ebben a csoportban (a síkidom *szimmetriacsoportja*).

## 4.15. Példa.

A sík összes egybevágósági transzformációi csoportot alkotnak a leképezésszorzás műveletével, egy adott síkidomot önmagába képező egybevágóságok pedig részcsoporthat alkotnak ebben a csoportban (a síkidom *szimmetriacsoportja*).

## Megjegyzés.

A szimmetriacsoportot természetesen három- (vagy magasabb) dimenziós térbeli alakzatokra is értelmezhetjük. Ha csak az irányítástartó egybevágóságokat engedjük meg, akkor *mozgáscsoportról* beszélünk (ez részcsoporthat a szimmetriacsoportnak).

# Szimmetriák

## 4.15. Példa.

A sík összes egybevágósági transzformációi csoportot alkotnak a leképezésszorzás műveletével, egy adott síkidomot önmagába képező egybevágóságok pedig részcsoporthoz tartoznak ebben a csoportban (a síkidom *szimmetriacsoportja*).

## Megjegyzés.

A szimmetriacsoportot természetesen három- (vagy magasabb) dimenziós térbeli alakzatokra is értelmezhetjük. Ha csak az irányítástartó egybevágóságokat engedjük meg, akkor *mozgáscsoportról* beszélünk (ez részcsoporthoz tartozik a szimmetriacsoportnak).

## Példa.

Huszonegy olyan térbeli forgatás van, ami egy adott kockát önmagába visz, és ezek csoportja (azaz a kocka mozgáscsoportja) izomorf  $S_4$ -gyel.

<http://demonstrations.wolfram.com/CubicSymmetryTypes>

# Szimmetriák

## 4.15. Példa.

A sík összes egybevágósági transzformációi csoportot alkotnak a leképezésszorzás műveletével, egy adott síkidomot önmagába képező egybevágóságok pedig részcsoportot alkotnak ebben a csoportban (a síkidom *szimmetriacsoportja*).

## Megjegyzés.

A szimmetriacsoportot természetesen három- (vagy magasabb) dimenziós térbeli alakzatokra is értelmezhetjük. Ha csak az irányítástartó egybevágóságokat engedjük meg, akkor *mozgáscsoportról* beszélünk (ez részcsoportja a szimmetriacsoportnak).

## Példa.

Huszonegy olyan térbeli forgatás van, ami egy adott kockát önmagába visz, és ezek csoportja (azaz a kocka mozgáscsoportja) izomorf  $S_4$ -gyel.

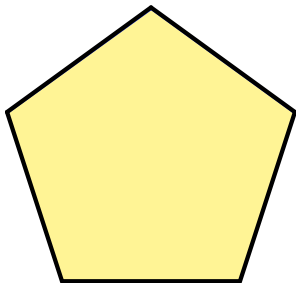
<http://demonstrations.wolfram.com/CubicSymmetryTypes>

## 4.16. Definíció.

A szabályos  $n$ -szög szimmetriacsoportját  *$n$ -edfokú diédercsoportnak* nevezzük és  $D_n$ -nel jelöljük.



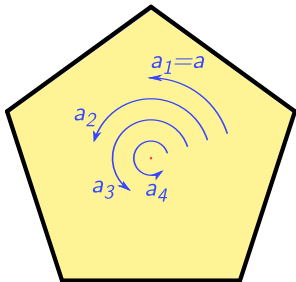
## A diédercsoport elemei



A szabályos  $n$ -szög szimmetriacsoportja a középpont körüli forgatásokat és a szimmetriatengelyekre való tükrözéseket tartalmaz.

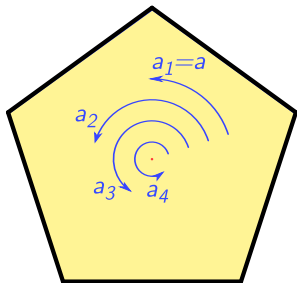
# Forgatások

Jelölje  $a_k$  a sokszög középpontja körüli  $\frac{2k\pi}{n}$  szögű forgatást ( $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ):



# Forgatások

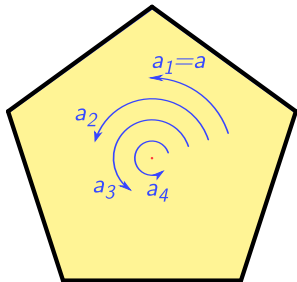
Jelölje  $a_k$  a sokszög középpontja körüli  $\frac{2k\pi}{n}$  szögű forgatást ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ):



Vegyük észre, hogy  $a_k = a_1^k$ . A továbbiakban  $a_1$  helyett egyszerűen csak  $a$ -t írunk. Így az  $n$ -szög mozgáscsoportja:  $\{\text{id}, a, a^2, \dots, a^{n-1}\} \cong$

# Forgatások

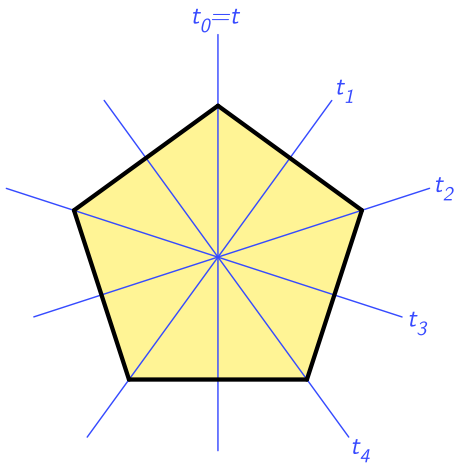
Jelölje  $a_k$  a sokszög középpontja körüli  $\frac{2k\pi}{n}$  szögű forgatást ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ):



Vegyük észre, hogy  $a_k = a_1^k$ . A továbbiakban  $a_1$  helyett egyszerűen csak  $a$ -t írunk. Így az  $n$ -szög mozgáscsoportja:  $\{\text{id}, a, a^2, \dots, a^{n-1}\} \cong \mathbb{Z}_n$ .

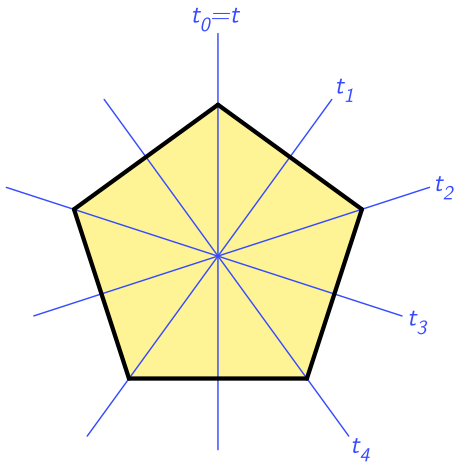
# Tükrözések

Legyenek a szimmetriatengelyekre való tükrözések  $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ :



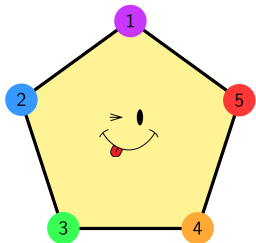
# Tükrözések

Legyenek a szimmetriatengelyekre való tükrözések  $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ :

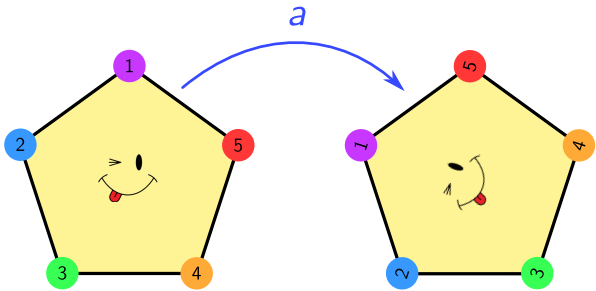


A továbbiakban  $t_0$  helyett egyszerűen csak  $t$ -t írunk, és szeretnénk a többi tükrözést is  $t$  és  $a$  segítségével kifejezni.

at =?

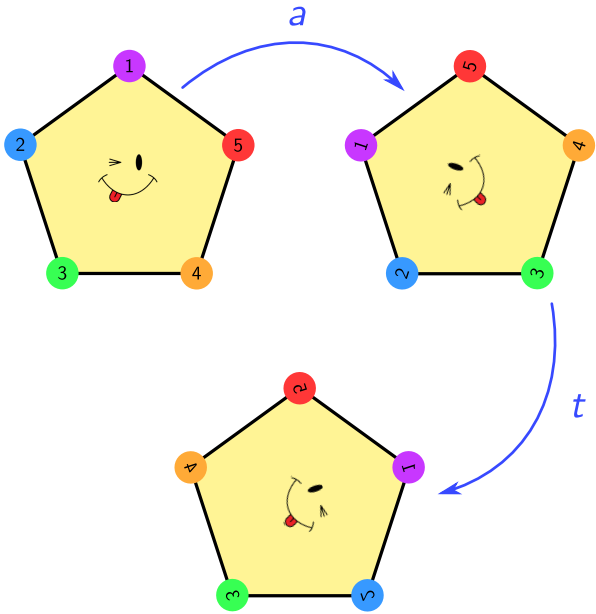


at = ?

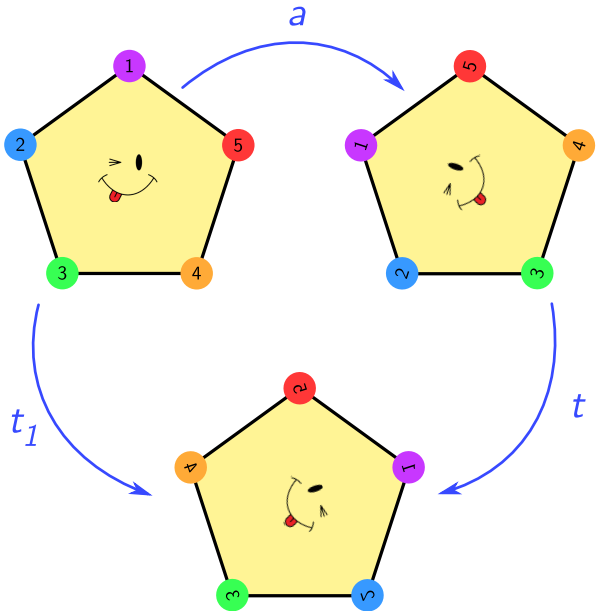




at = ?



$$at = t_1$$



Hasonlóan (be)látható, hogy  $t_k = a^k t$  minden  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  esetén.

Hasonlóan (be)látható, hogy  $t_k = a^k t$  minden  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  esetén.  
Tehát ...

## 4.17. Tétel.

A  $D_n$  csoportnak  $2n$  eleme van:  $D_n = \{ \text{id}, a, a^2, \dots, a^{n-1}, t, at, a^2t, \dots, a^{n-1}t \}$ ,  
ahol

- ▶  $a$ : a középpont körüli  $\frac{2\pi}{n}$  szögű forgatás,
- ▶  $t$ : egy szimmetriatengelyre való tükrözés.

Ekkor  $a^k$  a középpont körüli  $\frac{2k\pi}{n}$  szögű forgatás ( $0 \leq k \leq n-1$ ),  
a  $t, at, a^2t, \dots, a^{n-1}t$  transzformációk pedig tengelyes tükrözések  
(két „szomszédos” tengely  $\frac{\pi}{n}$  szöget zár be egymással).

Hasonlóan (be)látható, hogy  $t_k = a^k t$  minden  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  esetén.  
Tehát ...

## 4.17. Tétel.

A  $D_n$  csoportnak  $2n$  eleme van:  $D_n = \{ \text{id}, a, a^2, \dots, a^{n-1}, t, at, a^2t, \dots, a^{n-1}t \}$ ,  
ahol

- ▶  $a$ : a középpont körüli  $\frac{2\pi}{n}$  szögű forgatás,
- ▶  $t$ : egy szimmetriatengelyre való tükrözés.

Ekkor  $a^k$  a középpont körüli  $\frac{2k\pi}{n}$  szögű forgatás ( $0 \leq k \leq n-1$ ),  
a  $t, at, a^2t, \dots, a^{n-1}t$  transzformációk pedig tengelyes tükrözések  
(két „szomszédos” tengely  $\frac{\pi}{n}$  szöget zár be egymással).

Fennáll továbbá a  $ta = a^{-1}t$  összefüggés.

## 4.18. Definíció.

A nemüres  $A$  halmaz összes permutációi alkotta  $S_A$  szimmetrikus csoport részcsoportjait *permutációcsoportoknak* nevezzük.

## 4.18. Definíció.

A nemüres  $A$  halmaz összes permutációi alkotta  $S_A$  szimmetrikus csoport részcsoportjait *permutációcsoportoknak* nevezzük.

## 4.19. Definíció.

Az  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  halmaz összes permutációi alkotta csoportot  *$n$ -edfokú szimmetrikus csoportnak* nevezzük, és  $S_n$ -nel jelöljük.

# Permutációcsoportok

## 4.18. Definíció.

A nemüres  $A$  halmaz összes permutációi alkotta  $S_A$  szimmetrikus csoport részcsoportjait *permutációcsoportoknak* nevezzük.

## 4.19. Definíció.

Az  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  halmaz összes permutációi alkotta csoportot  *$n$ -edfokú szimmetrikus csoportnak* nevezzük, és  $S_n$ -nel jelöljük.

## Megjegyzés.

Egy  $\pi \in S_n$  permutációt megadhatunk úgy, hogy  $\{1, 2, \dots, n\}$  minden eleme alá odaírjuk a  $\pi$  melletti képét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1\pi & 2\pi & 3\pi & \cdots & n\pi \end{pmatrix}.$$



# Permutációcsoportok

## 4.18. Definíció.

A nemüres  $A$  halmaz összes permutációi alkotta  $S_A$  szimmetrikus csoport részcsoportjait *permutációcsoportoknak* nevezzük.

## 4.19. Definíció.

Az  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  halmaz összes permutációi alkotta csoportot  *$n$ -edfokú szimmetrikus csoportnak* nevezzük, és  $S_n$ -nel jelöljük.

## Megjegyzés.

Egy  $\pi \in S_n$  permutációt megadhatunk úgy, hogy  $\{1, 2, \dots, n\}$  minden eleme alá odaírjuk a  $\pi$  melletti képét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1\pi & 2\pi & 3\pi & \cdots & n\pi \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy  $\pi$  bijektivitása azt jelenti, hogy a mátrix alsó sorában az  $1, 2, \dots, n$  számok egy *permutációja* van.

## 4.20. Definíció.

Legyenek  $a_1, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  különböző elemek, és legyen  $\pi \in S_n$  az alábbi permutáció:

$$a_1\pi = a_2, \quad a_2\pi = a_3, \quad \dots, \quad a_{k-1}\pi = a_k, \quad a_k\pi = a_1 \quad \text{és} \\ b\pi = b \quad \text{ha } b \notin \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Ezt a  $\pi$  permutációt így jelöljük:  $\pi = (a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k)$  és *ciklikus permutációnak* vagy röviden *ciklusnak* nevezzük.

# Ciklusfelbontás

## 4.20. Definíció.

Legyenek  $a_1, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  különböző elemek, és legyen  $\pi \in S_n$  az alábbi permutáció:

$$a_1\pi = a_2, \quad a_2\pi = a_3, \quad \dots, \quad a_{k-1}\pi = a_k, \quad a_k\pi = a_1 \quad \text{és} \\ b\pi = b \quad \text{ha} \quad b \notin \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Ezt a  $\pi$  permutációt így jelöljük:  $\pi = (a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k)$  és *ciklikus permutációnak* vagy röviden *ciklusnak* nevezzük.

## 4.21. Definíció.

Két permutáció *idegen*, ha *mozgatott elemeik* halmaza diszjunkt.

## 4.20. Definíció.

Legyenek  $a_1, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  különböző elemek, és legyen  $\pi \in S_n$  az alábbi permutáció:

$$a_1\pi = a_2, \quad a_2\pi = a_3, \quad \dots, \quad a_{k-1}\pi = a_k, \quad a_k\pi = a_1 \quad \text{és} \\ b\pi = b \quad \text{ha} \quad b \notin \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Ezt a  $\pi$  permutációt így jelöljük:  $\pi = (a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k)$  és *ciklikus permutációnak* vagy röviden *ciklusnak* nevezzük.

## 4.21. Definíció.

Két permutáció *idegen*, ha *mozgatott elemeik* halmaza diszjunkt.

## 4.22. Tétel.

Ha  $\pi$  és  $\rho$  idegen permutációk, akkor fölcserélhetőek, azaz  $\pi\rho = \rho\pi$ .

# Ciklusfelbontás

## 4.20. Definíció.

Legyenek  $a_1, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  különböző elemek, és legyen  $\pi \in S_n$  az alábbi permutáció:

$$a_1\pi = a_2, \quad a_2\pi = a_3, \quad \dots, \quad a_{k-1}\pi = a_k, \quad a_k\pi = a_1 \quad \text{és} \\ b\pi = b \quad \text{ha} \quad b \notin \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Ezt a  $\pi$  permutációt így jelöljük:  $\pi = (a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k)$  és *ciklikus permutációnak* vagy röviden *ciklusnak* nevezzük.

## 4.21. Definíció.

Két permutáció *idegen*, ha *mozgatott elemeik* halmaza diszjunkt.

## 4.22. Tétel.

Ha  $\pi$  és  $\rho$  idegen permutációk, akkor fölcserélhetőek, azaz  $\pi\rho = \rho\pi$ .

## 4.23. Tétel.

Minden  $S_n$ -beli permutáció előáll páronként idegen ciklusok szorzataként, és ez az előállítás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

# Transzpozíciók

## 4.24. Definíció.

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az  $(ij)$  alakú permutációkat *transzpozícióknak* nevezzük.

# Transzpozíciók

## 4.24. Definíció.

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az  $(ij)$  alakú permutációkat *transzpozícióknak* nevezzük.

## 4.25. Tétel.

Az  $S_n$  csoportot *generálják* a transzpozíciók, azaz minden  $S_n$ -beli permutáció előáll transzpozíciók szorzataként.

# Transzpozíciók

## 4.24. Definíció.

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az  $(ij)$  alakú permutációkat *transzpozícióknak* nevezzük.

## 4.25. Tétel.

Az  $S_n$  csoportot *generálják* a transzpozíciók, azaz minden  $S_n$ -beli permutáció előáll transzpozíciók szorzataként.

## Bizonyítás.

Elég ciklusokra bizonyítani:  $(a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k) = (a_1 a_2) (a_1 a_3) \cdots (a_1 a_k)$ . □



# Transzpozíciók

## 4.24. Definíció.

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az  $(ij)$  alakú permutációkat *transzpozícióknak* nevezzük.

## 4.25. Tétel.

Az  $S_n$  csoportot *generálják* a transzpozíciók, azaz minden  $S_n$ -beli permutáció előáll transzpozíciók szorzataként.

### Bizonyítás.

Elég ciklusokra bizonyítani:  $(a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \cdots (a_1 a_k)$ . □

## 4.26. Tétel.

Egy  $S_n$ -beli permutáció transzpozíciók szorzataként való felírásában a tényezők számának paritása egyértelműen meghatározott.

# Transzpozíciók

## 4.24. Definíció.

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az  $(ij)$  alakú permutációkat *transzpozícióknak* nevezzük.

## 4.25. Tétel.

Az  $S_n$  csoportot *generálják* a transzpozíciók, azaz minden  $S_n$ -beli permutáció előáll transzpozíciók szorzataként.

### Bizonyítás.

Elég ciklusokra bizonyítani:  $(a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \cdots (a_1 a_k)$ . □

## 4.26. Tétel.

Egy  $S_n$ -beli permutáció transzpozíciók szorzataként való felírásában a tényezők számának paritása egyértelműen meghatározott.

### Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy  $\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{2k+1} = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{2l}$ , ahol mindegyik  $\tau_i$  és  $\sigma_j$  transzpozíció.

# Transzpozíciók

## 4.24. Definíció.

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az  $(ij)$  alakú permutációkat *transzpozícióknak* nevezzük.

## 4.25. Tétel.

Az  $S_n$  csoportot *generálják* a transzpozíciók, azaz minden  $S_n$ -beli permutáció előáll transzpozíciók szorzataként.

### Bizonyítás.

Elég ciklusokra bizonyítani:  $(a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \cdots (a_1 a_k)$ . □

## 4.26. Tétel.

Egy  $S_n$ -beli permutáció transzpozíciók szorzataként való felírásában a tényezők számának paritása egyértelműen meghatározott.

### Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy  $\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{2k+1} = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{2l}$ , ahol mindegyik  $\tau_i$  és  $\sigma_j$  transzpozíció. Ekkor az identikus permutáció előáll páratlan sok transzpozíció szorzataként:

$$\text{id} = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{2k+1} \sigma_{2l} \cdots \sigma_2 \sigma_1.$$

# Transzpozíciók

## 4.24. Definíció.

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az  $(ij)$  alakú permutációkat *transzpozícióknak* nevezzük.

## 4.25. Tétel.

Az  $S_n$  csoportot *generálják* a transzpozíciók, azaz minden  $S_n$ -beli permutáció előáll transzpozíciók szorzataként.

### Bizonyítás.

Elég ciklusokra bizonyítani:  $(a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \cdots (a_1 a_k)$ . □

## 4.26. Tétel.

Egy  $S_n$ -beli permutáció transzpozíciók szorzataként való felírásában a tényezők számának paritása egyértelműen meghatározott.

### Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy  $\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{2k+1} = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{2l}$ , ahol mindegyik  $\tau_i$  és  $\sigma_j$  transzpozíció. Ekkor az identikus permutáció előáll páratlan sok transzpozíció szorzataként:

$$\text{id} = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{2k+1} \sigma_{2l} \cdots \sigma_2 \sigma_1.$$

Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen ...

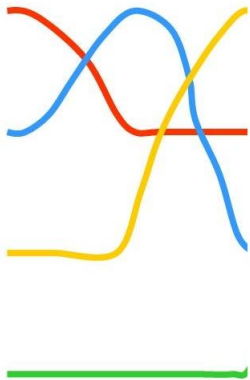
—

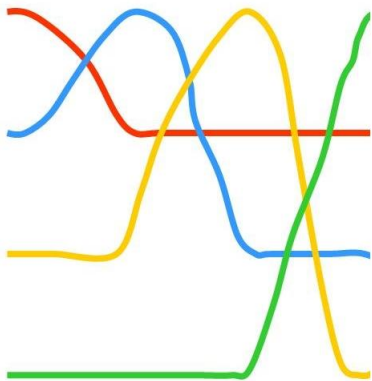
—

—

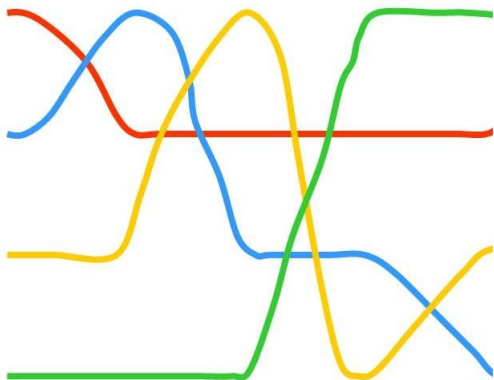
—

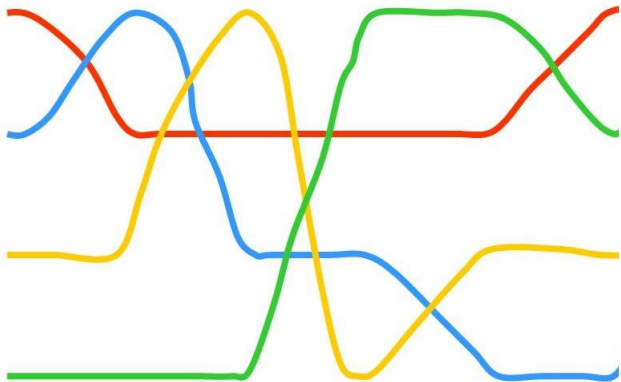


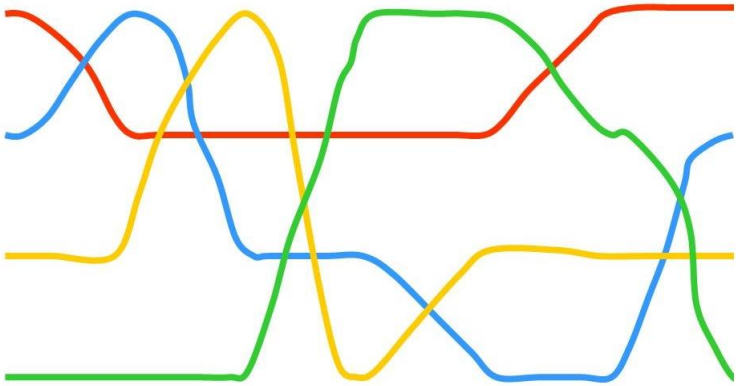


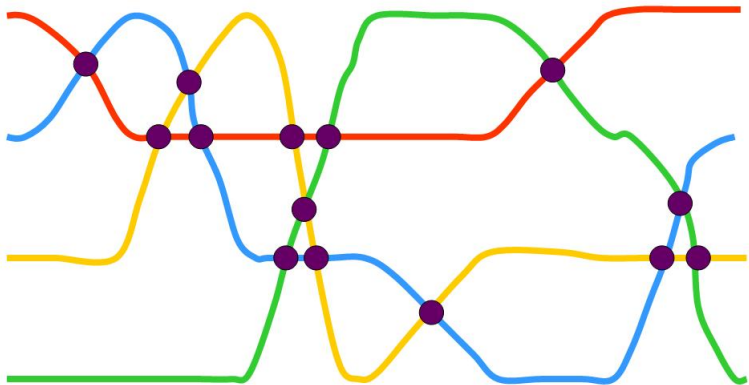


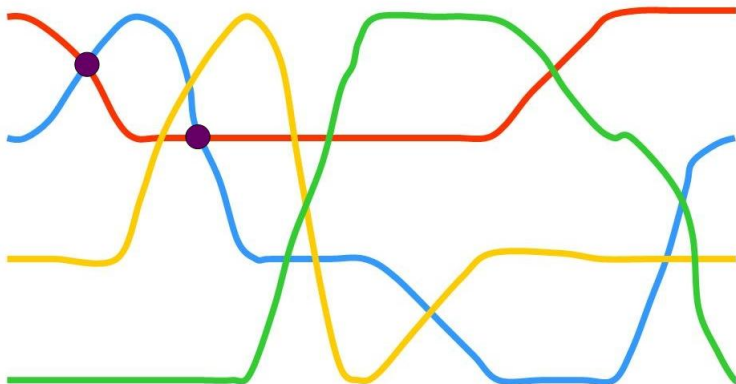




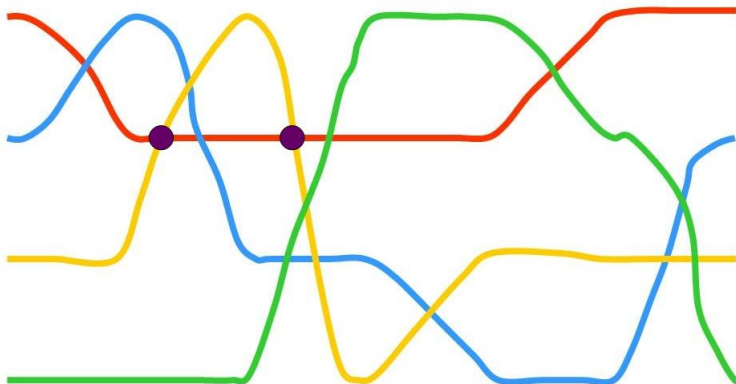




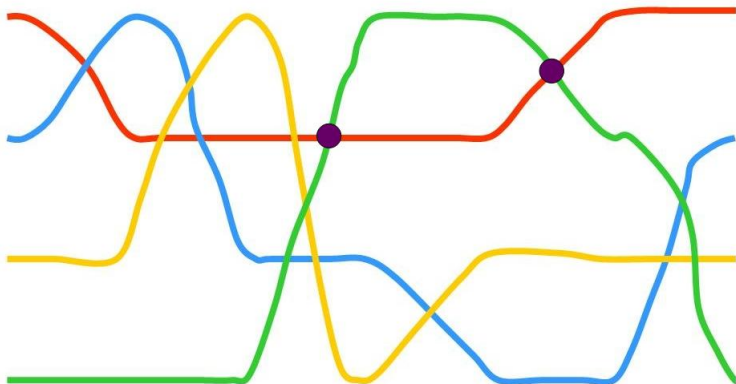




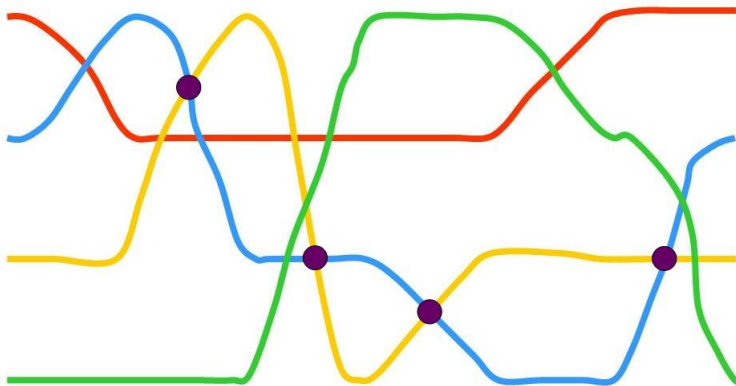
metszéspontok: 2



metszéspontok:  $2 + 2$

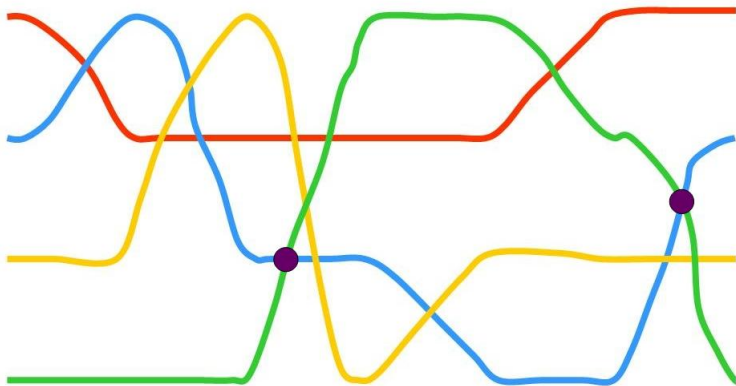


metszéspontok:  $2 + 2 + 2$

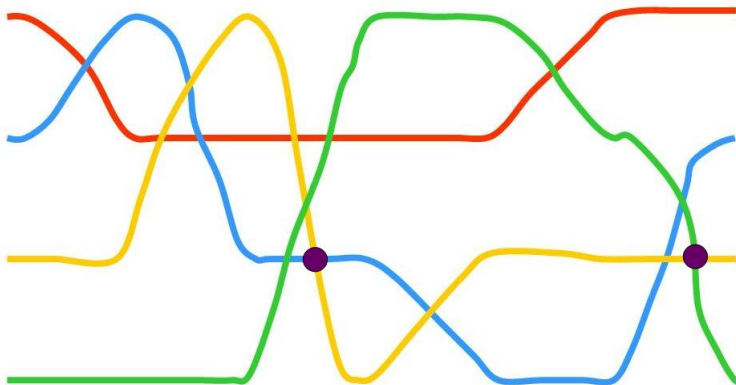


metszéspontok:  $2 + 2 + 2 + 4$





metszéspontok:  $2 + 2 + 2 + 4 + 2$



metszéspontok:  $2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 \equiv 0 \pmod{2}$

—

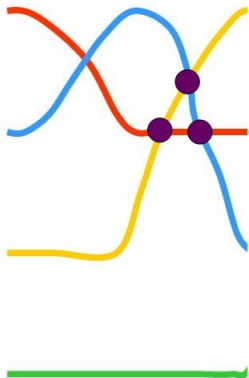
—

—

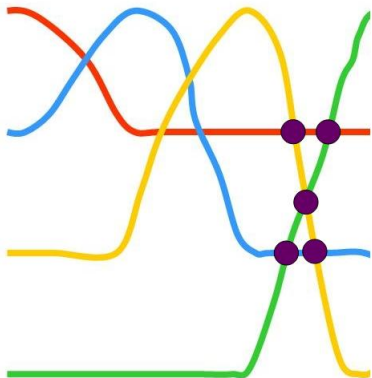
—



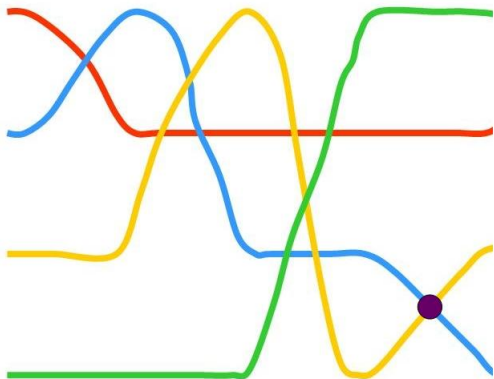
metszéspontok: 1



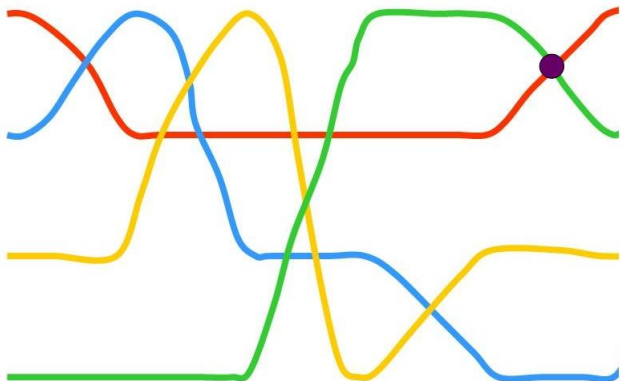
metszéspontok:  $1 + 3$



metszéspontok:  $1 + 3 + 5$

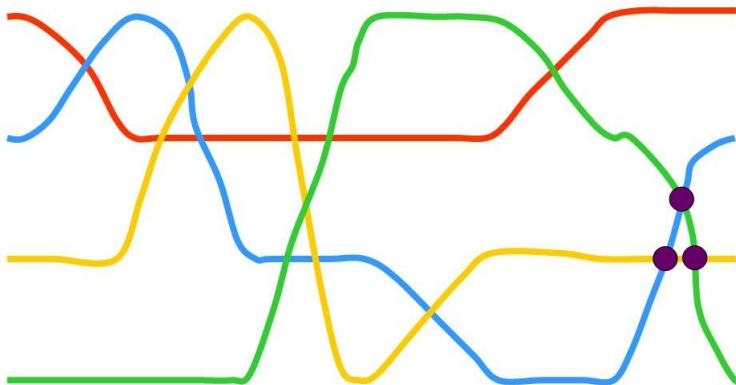


metszéspontok:  $1 + 3 + 5 + 1$

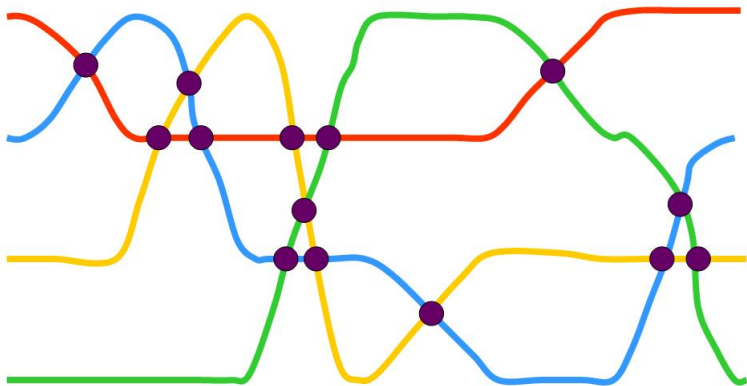


metszéspontok:  $1 + 3 + 5 + 1 + 1$

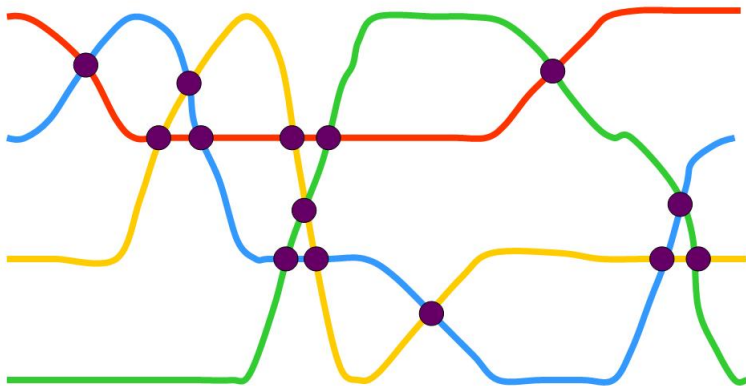




metszéspontok:  $1 + 3 + 5 + 1 + 1 + 3 \equiv$  cserék száma  $(\text{mod } 2)$



metszéspontok:  $0 \equiv \text{cserék száma} \pmod{2}$



metszéspontok:  $0 \equiv \text{cserék száma} \pmod{2}$  ⚡



# Az alternáló csoport

## 4.27. Állítás.

A páros hosszúságú ciklusok páratlan permutációk, míg a páratlan hosszúságú ciklusok páros permutációk.

# Az alternáló csoport

## 4.27. Állítás.

A páros hosszúságú ciklusok páratlan permutációk, míg a páratlan hosszúságú ciklusok páros permutációk.

## 4.28. Tétel.

A páros permutációk egy 2 indexű részcsoporthat alkotnak  $S_n$ -ben. Ezt a csoportot *alternáló csoportnak* nevezzük, és  $A_n$ -nel jelöljük.

# Az alternáló csoport

## 4.27. Állítás.

A páros hosszúságú ciklusok páratlan permutációk, míg a páratlan hosszúságú ciklusok páros permutációk.

## 4.28. Tétel.

A páros permutációk egy 2 indexű részcsoporthot alkotnak  $S_n$ -ben. Ezt a csoportot *alternáló csoportnak* nevezzük, és  $A_n$ -nel jelöljük.

## Megjegyzés.

Tekintsük az alábbi  $n$ -változós polinomfüggvényt (pl.  $\mathbb{R}$  felett):

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j).$$

# Az alternáló csoport

## 4.27. Állítás.

A páros hosszúságú ciklusok páratlan permutációk, míg a páratlan hosszúságú ciklusok páros permutációk.

## 4.28. Tétel.

A páros permutációk egy 2 indexű részcsoporthoz alkotnak  $S_n$ -ben. Ezt a csoportot *alternáló csoportnak* nevezzük, és  $A_n$ -nel jelöljük.

## Megjegyzés.

Tekintsük az alábbi  $n$ -változós polinomfüggvényt (pl.  $\mathbb{R}$  felett):

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j).$$

A változók bármely permutációja esetén  $V$  vagy nem változik, vagy előjelet vált:

$$V(x_{1\pi}, \dots, x_{n\pi}) = \pm V(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{sgn} \pi \cdot V(x_1, \dots, x_n).$$

# Az alternáló csoport

## 4.27. Állítás.

A páros hosszúságú ciklusok páratlan permutációk, míg a páratlan hosszúságú ciklusok páros permutációk.

## 4.28. Tétel.

A páros permutációk egy 2 indexű részcsoporthot alkotnak  $S_n$ -ben. Ezt a csoportot *alternáló csoportnak* nevezzük, és  $A_n$ -nel jelöljük.

## Megjegyzés.

Tekintsük az alábbi  $n$ -változós polinomfüggvényt (pl.  $\mathbb{R}$  felett):

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j).$$

A változók bármely permutációja esetén  $V$  vagy nem változik, vagy előjelet vált:

$$V(x_{1\pi}, \dots, x_{n\pi}) = \pm V(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{sgn} \pi \cdot V(x_1, \dots, x_n).$$

A  $\pi \in S_n$  permutáció *előjele* aszerint 1 vagy  $-1$ , hogy  $\pi$  páros-e vagy páratlan.



# Az alternáló csoport

Példa.

- ▶  $A_2 = \{\text{id}\}$

# Az alternáló csoport

Példa.

▶  $A_2 = \{\text{id}\}$

▶  $A_3 = \{\text{id}, (123), (132)\}$

# Az alternáló csoport

Példa.

▶  $A_2 = \{\text{id}\}$

▶  $A_3 = \{\text{id}, (123), (132)\} \cong \mathbb{Z}_3$

# Az alternáló csoport

Példa.

- ▶  $A_2 = \{\text{id}\}$
- ▶  $A_3 = \{\text{id}, (123), (132)\} \cong \mathbb{Z}_3$
- ▶  $A_4 = \{\text{id}, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243),$

# Az alternáló csoport

Példa.

- ▶  $A_2 = \{\text{id}\}$
- ▶  $A_3 = \{\text{id}, (123), (132)\} \cong \mathbb{Z}_3$
- ▶  $A_4 = \{\text{id}, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

# Az alternáló csoport

Példa.

- ▶  $A_2 = \{\text{id}\}$
- ▶  $A_3 = \{\text{id}, (123), (132)\} \cong \mathbb{Z}_3$
- ▶  $A_4 = \{\text{id}, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

4.29. Tétel.

Az alternáló csoportot **generálják** a 3 hosszúságú ciklusok, azaz minden  $A_n$ -beli permutáció előáll 3 hosszúságú ciklusok szorzataként.

# Az alternáló csoport

Példa.

- ▶  $A_2 = \{\text{id}\}$
- ▶  $A_3 = \{\text{id}, (123), (132)\} \cong \mathbb{Z}_3$
- ▶  $A_4 = \{\text{id}, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

4.29. Tétel.

Az alternáló csoportot **generálják** a 3 hosszúságú ciklusok, azaz minden  $A_n$ -beli permutáció előáll 3 hosszúságú ciklusok szorzataként.