Mellékosztályok

Példa.

Határozzuk meg a $G = \mathbb{Z}$ csoportban a $H = [m]$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$$a + H = b + H \iff b - a \in H \iff m \mid b - a \iff a \equiv b \pmod m$$

Tehát itt a mellékosztályok éppen a modulo m maradékosztályok.

Példa.

Határozzuk meg a $G = \mathbb{Z}_6$ csoportban a $H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$, $\overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$, $\overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$
$\overline{3} + H = \{\overline{3}, \overline{0}\}$, $\overline{4} + H = \{\overline{4}, \overline{1}\}$, $\overline{5} + H = \{\overline{5}, \overline{2}\}$

A mellékosztályozás: $\{\{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\}\}$.

$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$
$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$

Példa.

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó jobb oldali mellékosztályokat.

$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, (23)\} = H \cdot (23)\,,$

$H \cdot (13) = \{(13)\,, (132)\} = H \cdot (132)$

$H \cdot (12) = \{(12)\,, (123)\} = H \cdot (123)\,,$

A jobb oldali mellékosztályozás: $\{\{\mathrm{id}, (23)\}\,, \{(13)\,, (132)\}\,, \{(12)\,, (123)\}\}\,.$

id	(23)	(13)	(132)	(12)	(123)
(23)	id	(132)	(13)	(123)	(12)
(13)	(123)	id	(12)	(132)	(23)
(132)	(12)	(23)	(123)	(13)	id
(12)	(132)	(123)	(23)	id	(13)
(123)	(13)	(12)	id	(23)	(132)

Példa.

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal oldali mellékosztályokat.

$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$

$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$

$(12) \cdot H = \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.$

A bal oldali mellékosztályozás: $\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}.$

id	(23)	(13)	(123)	(12)	(132)
(23)	id	(132)	(12)	(123)	(13)
(13)	(123)	id	(23)	(132)	(12)
(123)	(13)	(12)	(132)	(23)	id
(12)	(132)	(123)	(13)	id	(23)
(132)	(12)	(23)	id	(13)	(123)

Megjegyzés.

Ha G Abel-csoport, akkor persze $aH = Ha$ minden $a \in G$ esetén.
Ha G nem kommutatív, akkor is előfordulhat, hogy a H részcsoport szerinti bal oldali mellékosztályozás megegyezik a jobb oldalival. Az ilyen részcsoportokat normálosztóknak nevezzük; ezek kitüntetett szerepet játszanak a csoportelméletben.

Példa.

Az S_4 csoport normálosztói: