# Gyűrűk, integritástartományok és testek

# Absztrakt gyűrűk és testek ($R$ tetszőleges nemüres halmaz)

$$+\colon R \times R \to R$$

# Absztrakt gyűrűk és testek ($R$ tetszőleges nemüres halmaz)

$$+ \colon R \times R \to R$$
$$\forall a, b, c \in R \colon\ (a+b)+c = a+(b+c)$$

# Absztrakt gyűrűk és testek ($R$ tetszőleges nemüres halmaz)

$$\begin{aligned} +\colon R \times R &\to R \\ \forall a, b, c \in R\colon\ (a+b)+c &= a+(b+c) \\ \forall a, b \in R\colon a+b &= b+a \end{aligned}$$

# Absztrakt gyűrűk és testek ($R$ tetszőleges nemüres halmaz)

$$+\colon R \times R \to R$$

$$\forall a, b, c \in R\colon\ (a+b)+c = a+(b+c)$$

$$\forall a, b \in R\colon a+b = b+a$$

$$\exists 0 \in R\ \forall a \in R\colon a+0 = a$$

# Absztrakt gyűrűk és testek ($R$ tetszőleges nemüres halmaz)

$$
\begin{aligned}
+\colon R \times R &\to R \\
\forall a, b, c \in R\colon\ (a + b) + c &= a + (b + c) \\
\forall a, b \in R\colon a + b &= b + a \\
\exists 0 \in R\ \forall a \in R\colon a + 0 &= a \\
\forall a \in R\ \exists b \in R\colon a + b &= 0
\end{aligned}
$$

# Absztrakt gyűrűk és testek ($R$ tetszőleges nemüres halmaz)

$$
\begin{aligned}
+\colon R \times R \to R \\
\forall a, b, c \in R\colon\ (a+b)+c = a+(b+c) \\
\forall a, b \in R\colon a+b = b+a \\
\exists 0 \in R\ \forall a \in R\colon a+0 = a \\
\forall a \in R\ \exists b \in R\colon a+b = 0 \\
\cdot\colon R \times R \to R
\end{aligned}
$$

# Absztrakt gyűrűk és testek ($R$ tetszőleges nemüres halmaz)

$$+\colon R \times R \to R$$
$$\forall a, b, c \in R\colon\ (a+b)+c = a+(b+c)$$
$$\forall a, b \in R\colon a+b = b+a$$
$$\exists 0 \in R\ \forall a \in R\colon a+0 = a$$
$$\forall a \in R\ \exists b \in R\colon a+b = 0$$
$$\cdot\colon R \times R \to R$$
$$\forall a, b, c \in R\colon\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

# Absztrakt gyűrűk és testek ($R$ tetszőleges nemüres halmaz)

$$+\colon R \times R \to R$$
$$\forall a, b, c \in R\colon\ (a+b)+c = a+(b+c)$$
$$\forall a, b \in R\colon a+b = b+a$$
$$\exists 0 \in R\ \forall a \in R\colon a+0 = a$$
$$\forall a \in R\ \exists b \in R\colon a+b = 0$$
$$\cdot\colon R \times R \to R$$
$$\forall a, b, c \in R\colon\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
$$\forall a, b, c \in R\colon\ (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$
$$\text{és } c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$$

# Absztrakt gyűrűk és testek ($R$ tetszőleges nemüres halmaz)

$$\left.\begin{aligned}
+\colon R \times R \to R \\
\forall a, b, c \in R\colon\ (a+b)+c = a+(b+c) \\
\forall a, b \in R\colon a+b = b+a \\
\exists 0 \in R\ \forall a \in R\colon a+0 = a \\
\forall a \in R\ \exists b \in R\colon a+b = 0 \\
\cdot\colon R \times R \to R \\
\forall a, b, c \in R\colon\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\
\forall a, b, c \in R\colon\ (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \\
\text{és } c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b
\end{aligned}\right\}\ \text{gyűrű}$$

# Absztrakt gyűrűk és testek ($R$ tetszőleges nemüres halmaz)

$$\left.\begin{aligned} +\colon R \times R \to R \\ \forall a, b, c \in R\colon\ (a+b)+c = a+(b+c) \\ \forall a, b \in R\colon a+b = b+a \\ \exists 0 \in R\ \forall a \in R\colon a+0 = a \\ \forall a \in R\ \exists b \in R\colon a+b = 0 \\ \cdot\colon R \times R \to R \\ \forall a, b, c \in R\colon\ (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c) \\ \forall a, b, c \in R\colon\ (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \\ \text{és } c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b \end{aligned}\right\}\ \text{gyűrű}$$

$$\forall a, b \in R\colon a\cdot b = b\cdot a$$

# Absztrakt gyűrűk és testek ($R$ tetszőleges nemüres halmaz)

$$\left.\begin{aligned}
+\colon R\times R &\to R\\
\forall a,b,c\in R\colon\ (a+b)+c &= a+(b+c)\\
\forall a,b\in R\colon a+b &= b+a\\
\exists 0\in R\ \forall a\in R\colon a+0 &= a\\
\forall a\in R\ \exists b\in R\colon a+b &= 0\\
\cdot\colon R\times R &\to R\\
\forall a,b,c\in R\colon\ (a\cdot b)\cdot c &= a\cdot(b\cdot c)\\
\forall a,b,c\in R\colon\ (a+b)\cdot c &= a\cdot c+b\cdot c\\
\text{és } c\cdot(a+b) &= c\cdot a+c\cdot b
\end{aligned}\right\}\ \text{gyűrű}$$

$$\forall a,b\in R\colon a\cdot b=b\cdot a$$

$$\exists 1\in R\ \forall a\in R\colon a\cdot 1=a=1\cdot a$$

# Absztrakt gyűrűk és testek ($R$ tetszőleges nemüres halmaz)

$$\left.\begin{aligned}
+\colon R \times R \to R \\
\forall a, b, c \in R\colon\ (a+b)+c = a+(b+c) \\
\forall a, b \in R\colon a+b = b+a \\
\exists 0 \in R\ \forall a \in R\colon a+0 = a \\
\forall a \in R\ \exists b \in R\colon a+b = 0 \\
\cdot\colon R \times R \to R \\
\forall a, b, c \in R\colon\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\
\forall a, b, c \in R\colon\ (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \\
\text{és } c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b
\end{aligned}\right\}\ \text{gyűrű}$$

$$\begin{aligned}
\forall a, b \in R\colon a \cdot b = b \cdot a \\
\exists 1 \in R\ \forall a \in R\colon a \cdot 1 = a = 1 \cdot a \\
\forall a, b \in R\colon a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ vagy } b = 0
\end{aligned}$$

# Absztrakt gyűrűk és testek ($R$ tetszőleges nemüres halmaz)

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} +\colon R\times R\to R \\ \forall a,b,c\in R\colon\ (a+b)+c=a+(b+c) \\ \forall a,b\in R\colon a+b=b+a \\ \exists 0\in R\ \forall a\in R\colon a+0=a \\ \forall a\in R\ \exists b\in R\colon a+b=0 \\ \cdot\colon R\times R\to R \\ \forall a,b,c\in R\colon\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \\ \forall a,b,c\in R\colon\ (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c \\ \text{és } c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b \end{array}\right\}\ \text{gyűrű} \\ \forall a,b\in R\colon a\cdot b=b\cdot a \\ \exists 1\in R\ \forall a\in R\colon a\cdot 1=a=1\cdot a \\ \forall a,b\in R\colon a\cdot b=0 \implies a=0 \text{ vagy } b=0 \end{array}\right\}\ \text{int. tart.}$$

# Absztrakt gyűrűk és testek ($R$ tetszőleges nemüres halmaz)

$$
\left.
\begin{array}{r}
\left.
\begin{array}{r}
+\colon R \times R \to R \\
\forall a, b, c \in R\colon\ (a+b)+c = a+(b+c) \\
\forall a, b \in R\colon a+b = b+a \\
\exists 0 \in R\ \forall a \in R\colon a+0 = a \\
\forall a \in R\ \exists b \in R\colon a+b = 0 \\
\cdot\colon R \times R \to R \\
\forall a, b, c \in R\colon\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\
\forall a, b, c \in R\colon\ (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \\
\text{és } c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b
\end{array}
\right\} \text{gyűrű} \\
\forall a, b \in R\colon a \cdot b = b \cdot a \\
\exists 1 \in R\ \forall a \in R\colon a \cdot 1 = a = 1 \cdot a \\
\forall a, b \in R\colon a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ vagy } b = 0
\end{array}
\right\} \text{int. tart.}
$$

$$\forall a \in R \setminus \{0\}\ \ \exists b \in R\colon a \cdot b = 1$$

# Absztrakt gyűrűk és testek ($R$ tetszőleges nemüres halmaz)

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}
+\colon R\times R\to R\\
\forall a,b,c\in R\colon\ (a+b)+c=a+(b+c)\\
\forall a,b\in R\colon a+b=b+a\\
\exists 0\in R\ \forall a\in R\colon a+0=a\\
\forall a\in R\ \exists b\in R\colon a+b=0\\
\cdot\colon R\times R\to R\\
\forall a,b,c\in R\colon\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)\\
\forall a,b,c\in R\colon\ (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c\\
\text{és } c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b
\end{array}\right\}\text{gyűrű}\\
\forall a,b\in R\colon a\cdot b=b\cdot a\\
\exists 1\in R\ \forall a\in R\colon a\cdot 1=a=1\cdot a\\
\forall a,b\in R\colon a\cdot b=0\implies a=0\text{ vagy } b=0
\end{array}\right\}\text{int. tart.}\\
\forall a\in R\setminus\{0\}\ \exists b\in R\colon a\cdot b=1
\end{array}\right\}\text{test}$$

# Számgyűrűk és számtestek ($R \subseteq \mathbb{C}$, szokásos műveletek)

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} +\colon R \times R \to R \\ \forall a,b,c \in R\colon\ (a+b)+c = a+(b+c) \\ \forall a,b \in R\colon a+b = b+a \\ \exists 0 \in R\ \forall a \in R\colon a+0 = a \\ \forall a \in R\ \exists b \in R\colon a+b = 0 \\ \cdot\colon R \times R \to R \\ \forall a,b,c \in R\colon\ (a \cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c) \\ \forall a,b,c \in R\colon\ (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \\ \text{és } c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b \end{array}\right\}\ \text{gyűrű} \\ \forall a,b \in R\colon a\cdot b = b\cdot a \\ \exists 1 \in R\ \forall a \in R\colon a\cdot 1 = a = 1\cdot a \\ \forall a,b \in R\colon a\cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ vagy } b = 0 \end{array}\right\}\ \text{int. tart.} \\ \forall a \in R\setminus\{0\}\ \exists b \in R\colon a\cdot b = 1 \end{array}\right\}\ \text{test}$$

# Számgyűrűk és számtestek ($R \subseteq \mathbb{C}$, szokásos műveletek)

$$
\left.\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{r}
+\colon R \times R \to R \\
\exists 0 \in R \ \forall a \in R\colon a + 0 = a \\
\forall a \in R \ \exists b \in R\colon a + b = 0 \\
\cdot\colon R \times R \to R
\end{array}\right\}\text{gyűrű} \\
\exists 1 \in R \ \forall a \in R\colon a \cdot 1 = a = 1 \cdot a
\end{array}\right\}\text{int. tart.} \\
\forall a \in R \setminus \{0\} \ \ \exists b \in R\colon a \cdot b = 1
\end{array}\right\}\text{test}
$$

# Számgyűrűk és számtestek ($R \subseteq \mathbb{C}$, szokásos műveletek)

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\forall a, b \in R\colon\ a + b \in R \\ \exists 0 \in R\ \forall a \in R\colon a + 0 = a \\ \forall a \in R\ \exists b \in R\colon a + b = 0 \\ \cdot\colon R \times R \to R\end{array}\right\}\text{gyűrű} \\ \exists 1 \in R\ \forall a \in R\colon a \cdot 1 = a = 1 \cdot a\end{array}\right\}\text{int. tart.} \\ \forall a \in R \setminus \{0\}\ \ \exists b \in R\colon a \cdot b = 1\end{array}\right\}\text{test}$$

# Számgyűrűk és számtestek ($R \subseteq \mathbb{C}$, szokásos műveletek)

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} \forall a, b \in R\colon\ \ a + b \in R \\ 0 \in R \\ \forall a \in R\ \exists b \in R\colon a + b = 0 \\ \cdot\colon R \times R \to R \end{array}\right\}\text{gyűrű} \\ \exists 1 \in R\ \forall a \in R\colon a \cdot 1 = a = 1 \cdot a \end{array}\right\}\text{int. tart.} \\ \forall a \in R \setminus \{0\}\ \ \exists b \in R\colon a \cdot b = 1 \end{array}\right\}\text{test}$$

# Számgyűrűk és számtestek ($R \subseteq \mathbb{C}$, szokásos műveletek)

$$
\left.\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{r}
\forall a, b \in R\colon\ a + b \in R \\
0 \in R \\
\forall a \in R\colon\ -a \in R \\
\cdot\colon R \times R \to R
\end{array}\right\}\ \text{gyűrű} \\
\exists 1 \in R\ \forall a \in R\colon a \cdot 1 = a = 1 \cdot a
\end{array}\right\}\ \text{int. tart.} \\
\forall a \in R \setminus \{0\}\ \ \exists b \in R\colon a \cdot b = 1
\end{array}\right\}\ \text{test}
$$

# Számgyűrűk és számtestek ($R \subseteq \mathbb{C}$, szokásos műveletek)

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \forall a, b \in R\colon\ a + b \in R \\ 0 \in R \\ \forall a \in R\colon\ -a \in R \\ \forall a, b \in R\colon\ a \cdot b \in R \end{array}\right\}\text{gyűrű} \\ \exists 1 \in R\ \forall a \in R\colon a \cdot 1 = a = 1 \cdot a \end{array}\right\}\text{int. tart.} \\ \forall a \in R \setminus \{0\}\ \exists b \in R\colon a \cdot b = 1 \end{array}\right\}\text{test}$$

# Számgyűrűk és számtestek ($R \subseteq \mathbb{C}$, szokásos műveletek)

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\forall a, b \in R\colon\ a + b \in R \\ 0 \in R \\ \forall a \in R\colon\ -a \in R \\ \forall a, b \in R\colon\ a \cdot b \in R\end{array}\right\}\text{gyűrű} \\ 1 \in R\end{array}\right\}\text{int. tart.} \\ \forall a \in R \setminus \{0\}\ \exists b \in R\colon a \cdot b = 1\end{array}\right\}\text{test}$$

# Számgyűrűk és számtestek ($R \subseteq \mathbb{C}$, szokásos műveletek)

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \forall a, b \in R:\ \ a + b \in R \\ 0 \in R \\ \forall a \in R:\ -a \in R \\ \forall a, b \in R:\ \ a \cdot b \in R \end{array}\right\}\text{gyűrű} \\ 1 \in R \end{array}\right\}\text{int. tart.} \\ \forall a \in R \setminus \{0\} : a^{-1} \in R \end{array}\right\}\text{test}$$

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$: integritástartomány (egységcsoportja: $\{1, -1\}$)

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$: integritástartomány (egységcsoportja: $\{1, -1\}$)
- $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$: integritástartomány (egységcsoportja: $\{1, -1\}$)
- $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$: nem is gyűrű

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$: integritástartomány (egységcsoportja: $\{1, -1\}$)
- $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$: nem is gyűrű
- $\{$páros számok$\}$

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$: integritástartomány (egységcsoportja: $\{1, -1\}$)
- $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$: nem is gyűrű
- $\{$páros számok$\}$: kommutatív, zérusosztómentes gyűrű

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$: integritástartomány (egységcsoportja: $\{1, -1\}$)
- $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$: nem is gyűrű
- $\{$páros számok$\}$: kommutatív, zérusosztómentes gyűrű
- $\{$páratlan számok$\}$

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$: integritástartomány (egységcsoportja: $\{1, -1\}$)
- $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$: nem is gyűrű
- $\{$páros számok$\}$: kommutatív, zérusosztómentes gyűrű
- $\{$páratlan számok$\}$: nem is gyűrű

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$: integritástartomány (egységcsoportja: $\{1, -1\}$)
- $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$: nem is gyűrű
- $\{$páros számok$\}$: kommutatív, zérusosztómentes gyűrű
- $\{$páratlan számok$\}$: nem is gyűrű
- $\{$irracionális számok$\}$

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$: integritástartomány (egységcsoportja: $\{1, -1\}$)
- $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$: nem is gyűrű
- $\{$páros számok$\}$: kommutatív, zérusosztómentes gyűrű
- $\{$páratlan számok$\}$: nem is gyűrű
- $\{$irracionális számok$\}$: nem is gyűrű

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$: integritástartomány (egységcsoportja: $\{1, -1\}$)
- $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$: nem is gyűrű
- $\{$páros számok$\}$: kommutatív, zérusosztómentes gyűrű
- $\{$páratlan számok$\}$: nem is gyűrű
- $\{$irracionális számok$\}$: nem is gyűrű
- $\{$véges tizedestörtek$\}$

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$: integritástartomány (egységcsoportja: $\{1, -1\}$)
- $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$: nem is gyűrű
- $\{$páros számok$\}$: kommutatív, zérusosztómentes gyűrű
- $\{$páratlan számok$\}$: nem is gyűrű
- $\{$irracionális számok$\}$: nem is gyűrű
- $\{$véges tizedestörtek$\}$: integritástartomány (mi az egységcsoportja?)

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$: integritástartomány (egységcsoportja: $\{1, -1\}$)
- $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$: nem is gyűrű
- {páros számok}: kommutatív, zérusosztómentes gyűrű
- {páratlan számok}: nem is gyűrű
- {irracionális számok}: nem is gyűrű
- {véges tizedestörtek}: integritástartomány (mi az egységcsoportja?)
- $\mathbb{R}^{n\times n}$

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$: integritástartomány (egységcsoportja: $\{1, -1\}$)
- $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$: nem is gyűrű
- $\{$páros számok$\}$: kommutatív, zérusosztómentes gyűrű
- $\{$páratlan számok$\}$: nem is gyűrű
- $\{$irracionális számok$\}$: nem is gyűrű
- $\{$véges tizedestörtek$\}$: integritástartomány (mi az egységcsoportja?)
- $\mathbb{R}^{n\times n}$: egységelemes gyűrű (egységcsoportja: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$)

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$: integritástartomány (egységcsoportja: $\{1, -1\}$)
- $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$: nem is gyűrű
- {páros számok}: kommutatív, zérusosztómentes gyűrű
- {páratlan számok}: nem is gyűrű
- {irracionális számok}: nem is gyűrű
- {véges tizedestörtek}: integritástartomány (mi az egységcsoportja?)
- $\mathbb{R}^{n\times n}$: egységelemes gyűrű (egységcsoportja: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$)
- $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$

# (Ellen)példák

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet a szokásos összeadás és szorzás műveletével?

- $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$: test
- $\mathbb{Z}$: integritástartomány (egységcsoportja: $\{1, -1\}$)
- $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N}$: nem is gyűrű
- $\{$páros számok$\}$: kommutatív, zérusosztómentes gyűrű
- $\{$páratlan számok$\}$: nem is gyűrű
- $\{$irracionális számok$\}$: nem is gyűrű
- $\{$véges tizedestörtek$\}$: integritástartomány (mi az egységcsoportja?)
- $\mathbb{R}^{n \times n}$: egységelemes gyűrű (egységcsoportja: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$)
- $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$: integritástartomány (mi az egységcsoportja?)

# Oszthatóság az egész számok körében

## Definíció.

Az $a$ egész szám *osztója* a $b$ egész számnak (jelölés: $a \mid b$), ha létezik olyan $c \in \mathbb{Z}$ egész szám, amelyre $b = ac$.

## Tétel.

Tetszőleges $a, b, c$ egész számokra érvényesek az alábbiak:

(1) $a \mid a$;

(2) $a \mid b$ és $b \mid c \implies a \mid c$;

(3) $a \mid b$ és $b \mid a \iff b = \pm a$;

(4) $1 \mid a$;

(5) $a \mid 0$;

(6) $a \mid b$ és $a \mid c \implies a \mid b + c$;

(7) $a \mid b$ és $b \neq 0 \implies |a| \leq |b|$.

# Oszthatóság integritástartományokban

Legyen $R$ egy tetszőleges integritástartomány

## Definíció (lásd a 3.1. Definíciót).

Az $a \in R$ elem *osztója* a $b \in R$ elemnek (jelölés: $a \mid b$), ha létezik olyan $c \in R$ elem, amelyre $b = ac$.

## Tétel (lásd a 3.3. Tételt).

Tetszőleges $a, b, c \in R$ elemekre érvényesek az alábbiak:

(1) $a \mid a$;

(2) $a \mid b$ és $b \mid c \implies a \mid c$;

(3) $a \mid b$ és $b \mid a \iff$ ???;

(4) $1 \mid a$;

(5) $a \mid 0$;

(6) $a \mid b$ és $a \mid c \implies a \mid b + c$;

(7) $a \mid b$ és $b \neq 0 \implies$ ???.

# Oszthatóság integritástartományokban

Legyen $R$ egy tetszőleges integritástartomány

## Definíció (lásd a 3.1. Definíciót).

Az $a \in R$ elem *osztója* a $b \in R$ elemnek (jelölés: $a \mid b$), ha létezik olyan $c \in R$ elem, amelyre $b = ac$.

## Tétel (lásd a 3.3. Tételt).

Tetszőleges $a, b, c \in R$ elemekre érvényesek az alábbiak:

(1) $a \mid a$;

(2) $a \mid b$ és $b \mid c \implies a \mid c$;

(3) $a \mid b$ és $b \mid a \iff a \sim b$;

(4) $1 \mid a$;

(5) $a \mid 0$;

(6) $a \mid b$ és $a \mid c \implies a \mid b + c$;

(7) $a \mid b$ és $b \neq 0 \implies$ ???.

# Asszociáltság integritástartományokban

## Definíció (lásd a 3.2. Definíciót).

Az $a, b \in R$ elemek *asszociáltak*, ha $a \mid b$ és $b \mid a$. Jelölése: $a \sim b$.

## Lemma.

Két elem akkor és csak akkor asszociált, ha egymás egységszeresei:

$$\forall a, b \in R\colon\; a \sim b \iff \exists u \in R^*\colon b = ua.$$

## Tétel (lásd a 3.4. Tételt).

Az asszociáltság ekvivalenciareláció

# Asszociáltság test feletti polinomgyűrűben

Legyen $T$ egy tetszőleges test.

## Tétel (lásd a 3.3. Tételt).

Két $T$ feletti polinom akkor és csak akkor asszociált, ha egymásnak nemnulla konstansszorosai:

$$\forall f, g \in T[x]: \ f \sim g \iff \exists c \in T \setminus \{0\}: g = cf.$$

# Asszociáltság test feletti polinomgyűrűben

Legyen $T$ egy tetszőleges test.

## Tétel (lásd a 3.3. Tételt).

Két $T$ feletti polinom akkor és csak akkor asszociált, ha egymásnak nemnulla konstansszorosai:

$$\forall f, g \in T[x] : \ f \sim g \iff \exists c \in T \setminus \{0\} : g = cf.$$

## Példa.

$$\mathbb{R}[x]\text{-ben:} \quad 3x^2 + 9x + 6 \ \sim \ x^2 + 3x + 2 \ \sim \ 13x^2 + 39x + 26 \ \sim \ \cdots$$

# Asszociáltság test feletti polinomgyűrűben

Legyen $T$ egy tetszőleges test.

## Tétel (lásd a 3.3. Tételt).

Két $T$ feletti polinom akkor és csak akkor asszociált, ha egymásnak nemnulla konstansszorosai:

$$\forall f, g \in T[x]: \ f \sim g \iff \exists c \in T \setminus \{0\}: g = cf.$$

## Példa.

$$\mathbb{R}[x]\text{-ben:} \quad 3x^2 + 9x + 6 \ \sim \ x^2 + 3x + 2 \ \sim \ 13x^2 + 39x + 26 \ \sim \ \cdots$$

$$\mathbb{Z}_5[x]\text{-ben:} \quad \overline{2}x^2 + x + \overline{3} \ \sim \ x^2 +$$

# Asszociáltság test feletti polinomgyűrűben

Legyen $T$ egy tetszőleges test.

## Tétel (lásd a 3.3. Tételt).

Két $T$ feletti polinom akkor és csak akkor asszociált, ha egymásnak nemnulla konstansszorosai:

$$\forall f, g \in T[x] : \ f \sim g \iff \exists c \in T \setminus \{0\} : g = cf .$$

## Példa.

$$\mathbb{R}[x]\text{-ben:} \quad 3x^2 + 9x + 6 \ \sim \ x^2 + 3x + 2 \ \sim \ 13x^2 + 39x + 26 \ \sim \ \cdots$$

$$\mathbb{Z}_5[x]\text{-ben:} \quad \overline{2}x^2 + x + \overline{3} \ \sim \ x^2 + \overline{3}x + \overline{4} \ \sim$$

# Asszociáltság test feletti polinomgyűrűben

Legyen $T$ egy tetszőleges test.

## Tétel (lásd a 3.3. Tételt).

Két $T$ feletti polinom akkor és csak akkor asszociált, ha egymásnak nemnulla konstansszorosai:

$$\forall f, g \in T[x]: \; f \sim g \iff \exists c \in T \setminus \{0\}: g = cf.$$

## Példa.

$$\mathbb{R}[x]\text{-ben:} \quad 3x^2 + 9x + 6 \; \sim \; x^2 + 3x + 2 \; \sim \; 13x^2 + 39x + 26 \; \sim \; \cdots$$

$$\mathbb{Z}_5[x]\text{-ben:} \quad \overline{2}x^2 + x + \overline{3} \; \sim \; x^2 + \overline{3}x + \overline{4} \; \sim \; \overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{2} \; \sim \; \overline{4}x^2 + \overline{2}x + \overline{1}$$

# Az oszthatóság szerinti részbenrendezés

## Megjegyzés.

Asszociált polinomokat nem érdemes (sőt nem is lehet) megkülönböztetni, ha csak az oszthatóságot vizsgáljuk.

Ha az oszthatósági relációt az asszociáltsági osztályok halmazán értelmezzük, akkor már nemcsak reflexív és tranzitív, hanem antiszimmetrikus is lesz, azaz részbenrendezés. A kapott $(T[x] / \sim; |)$ részbenrendezett halmaz legkisebb eleme $1/\sim = T^*$, legnagyobb eleme $0/\sim = \{0\}$.

Mivel test feletti polinomgyűrű esetén minden asszociáltsági osztály (a nulláét kivéve) pontosan egy főpolinomot tartalmaz, asszociáltság erejéig mindig dolgozhatunk főpolinomokkal.