

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

rutinfeladatok (gyűrűk és polinomok)

2018 őszi félév, BSc

7. feladat Döntse el, hogy gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkotnak-e az alábbi számhalmazok a szokásos összeadás és szorzás műveletével.

- (a) $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$
- (b) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } a \text{ is és } b \text{ is páros}\}$
- (c) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$
- (d) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } a \text{ páros}\}$
- (e) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } b \text{ páros}\}$

8. feladat Határozza meg az alábbi gyűrűk egységcsoportját, és döntse el, hogy testet alkotnak-e. (Azt nem kell ellenőrizni, hogy ezek valóban gyűrűk.)

- (a) \mathbb{Z}_{24} a maradékosztályok szokásos összeadásával és szorzásával
- (b) $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ a mátrixok szokásos összeadásával és szorzásával
- (c) \mathbb{R}^2 a komponensenkénti összeadással és szorzással
- (d) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadással és szorzással
- (e) $U = \{a, b\}$ részhalmazai a szimmetrikus differencia (összeadás) és a metszés (szorzás) műveletével

9. feladat Számítsa ki az f és g polinomok legnagyobb közös osztóját.

- (a) $f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3, g = x^3 + x^2 + x - 3 \in \mathbb{R}[x]$
- (b) $f = x^4 + x^3 + x, g = x^4 + x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$
- (c) $f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 \in \mathbb{R}[x]$
- (d) $f = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3, g = x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6 \in \mathbb{Q}[x]$
- (e) $f = x^4 + x^3 + x^2 + \bar{1}, g = x^3 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$

10. feladat Oldja meg az $fu + gv = \text{lko}(f, g)$ egyenletet.

- (a) $f = x^6 + \bar{6}, g = x^4 + \bar{5}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_7[x]$
- (b) $f = x^8 - 3x + 2, g = x^6 - x^5 + 3x - 2 \in \mathbb{R}[x]$
- (c) $f = x^5 + x + \bar{2}, g = x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$
- (d) $f = x^4 + x^3 + x + \bar{1}, g = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (e) $f = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 1, g = x^3 + 4x^2 + 4x + 3 \in \mathbb{R}[x]$

11. feladat Oldja meg az $f \cdot u \equiv \bar{1} \pmod{m}$ konruenciát.

- (a) $f = x^2 + \bar{3}x + \bar{1}, m = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (b) $f = x^2 + \bar{1}, m = x^3 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$
- (c) $f = \bar{3}x^2 + \bar{2}, m = x^3 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (d) $f = \bar{2}x^2 + \bar{4}, m = x^3 + x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (e) $f = x^2, m = x^3 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$

12. feladat A Horner-módszer segítségével határozza meg az f polinom c gyökének multiplicitását.

- (a) $f = x^3 - 4x^2 + 5x - 2, c = 1$
- (b) $f = x^6 + 4x^5 + 7x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 1, c = -1$
- (c) $f = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, c = 2$
- (d) $f = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16, c = -2$
- (e) $f = x^3 + x^2 + x + 1, c = i$

13. feladat Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, amely a megadott helyeken a megadott értékeket veszi fel.

- (a) $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8$
- (b) $f(-1) = 6, f(0) = 5, f(1) = 0, f(2) = 3, f(3) = 2$
- (c) $f(1) = 2, f(i) = i$
- (d) $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 3$
- (e) $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 6$

14. feladat Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára a polinomokat a megadott polinomgyűrűben.

- (a) $x^6 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (b) $x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$
- (c) $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$
- (d) $x^5 + x^4 + 2x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (e) $x^5 + x^3 + 4x^2 + 4 \in \mathbb{Z}_5[x]$

15. feladat Döntse el, hogy testek-e a megadott faktorgyűrűk, és határozza meg elemeik számát.

- (a) $\mathbb{Z}_2[x] / (x^3 + x^2 + 1)$
- (b) $\mathbb{Z}_5[x] / (x^2 + 1)$
- (c) $\mathbb{Z}_5[x] / (x^3 + 2)$
- (d) $\mathbb{Z}_3[x] / (x^2 + 1)$
- (e) $\mathbb{Z}_3[x] / (x^3 + x^2 + 1)$

16. feladat Számítsa ki a véges testek megadott elemeit.

- (a) $\mathbb{Z}_2[x] / (x^3 + x + 1)$ -ben $\bar{x}^{-1} = ?$, $\overline{x^2}^{-1} = ?$
- (b) $\mathbb{Z}_3[x] / (x^3 - x + 1)$ -ben $\overline{2x^2 + 1}^{-1} = ?$, $\overline{\bar{x}/x + 1} = ?$
- (c) $\mathbb{Z}_5[x] / (x^3 + x + 2)$ -ben $\overline{x^2 + 1}^{-1} = ?$, $\overline{4x + 3/x^2} = ?$
- (d) $\mathbb{Z}_7[x] / (x^3 + x + 1)$ -ben $\overline{2x}^{-1} = ?$, $\overline{\bar{x}/2x + 2} = ?$
- (e) $\mathbb{Z}_5[x] / (x^3 + x^2 + 2)$ -ben $\overline{x + 1}^{-1} = ?$, $\overline{x^2/3x + 4} = ?$

17. feladat Határozza meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását \mathbb{C} és \mathbb{R} felett.

- (a) $x^6 - 27 = 0$
- (b) $x^4 - x^2 + 1 = 0$
- (c) $x^4 + 4$
- (d) $x^7 + 7x^4 - 8x$
- (e) $x^4 + x^2 - 30$

18. feladat Keresse meg az alábbi polinomok összes racionális gyökét.

- (a) $2x^5 + 3x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 8x - 12$
- (b) $x^6 + x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 8$
- (c) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$
- (d) $x^6 - x^5 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2$
- (e) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$

19. feladat Határozza meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását \mathbb{Q} felett.

- (a) $2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12$
- (b) $3x^{100} - 10x^{50} + 100x - 50$
- (c) $3x^6 + 2x^5 - 7x^4 + 2$
- (d) $5x^8 - 5x^7 + 4x^2 - 2x - 2$
- (e) $x^7 - 4x^6 + 4x^5 + 9x^4 - 36x^3 + 39x^2 - 12x + 12$

20. feladat A derivált vizsgálatával határozza meg az alábbi polinomok többszörös gyökeit, majd az összes gyöküket (multiplicitással együtt). Az $\text{lko}(f, f')$ és $f/\text{lko}(f, f')$ polinomok kiszámításához használhat számológépet.

- (a) $x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$
- (b) $3x^4 - 4x^3 + 1$
- (c) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$
- (d) $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$
- (e) $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$