

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

rutinfeladatok (csoportok)

2018 őszi félév, BSc

21. feladat Döntse el, hogy az alábbi halmazok grupoidot, félcsoportot, csoportot alkotnak-e a megadott művelettel.

- (a) $(\mathbb{R}^4; +)$ (b) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +)$ (c) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; \cdot)$
 (d) $(\mathbb{Z}_6; \cdot)$ (e) $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}; \cdot)$ (f) $(\mathbb{Z}_6^*; +)$
 (g) $(\mathcal{P}(\{a, b\}); \cap)$ (h) $(\mathcal{P}(\{a, b\}); \Delta)$ (i) $(\mathcal{P}(\{a, b\}); \setminus)$

22. feladat Egészítse ki az alábbi műveletábrázolókat úgy, hogy csoportokat kapjon.

(a) $\begin{array}{c ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & & & \\ b & & & \\ c & & & a \end{array}$	(b) $\begin{array}{c cccc} \cdot & a & b & c & d \\ \hline a & & & & \\ b & & & c & \\ c & & & & c \\ d & & & & c \end{array}$	(c) $\begin{array}{c cccc} \cdot & a & b & c & d \\ \hline a & & & & \\ b & & & d & \\ c & & & & c \\ d & & & & c \end{array}$	(d) $\begin{array}{c ccccc} \cdot & a & b & c & d & e \\ \hline a & & b & & & \\ b & & & & & \\ c & & & & & a \\ d & & & & & c \\ e & & & & & \end{array}$
--	--	--	--

23. feladat Döntse el, hogy a műveletábrázoló által meghatározott \mathbb{A} grupoid izomorf-e a \mathbb{B} grupoiddal.

(a) $\begin{array}{c cccc} \cdot & u & v & x & y \\ \hline u & y & u & v & x \\ v & u & v & x & y \\ x & v & x & y & u \\ y & x & y & u & v \end{array} \quad \mathbb{B} = (\mathcal{P}(\{a, b\}); \cup)$	(b) $\begin{array}{c cccc} \cdot & u & v & x & y \\ \hline u & y & u & v & x \\ v & u & v & x & y \\ x & v & x & y & u \\ y & x & y & u & v \end{array} \quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; +)$
---	---

(c) $\begin{array}{c cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & d & c \\ c & c & d & a & b \\ d & d & c & b & a \end{array} \quad \mathbb{B} = (\{1, i, -1, -i\}; \cdot)$	(d) $\begin{array}{c cccc} \circ & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline \alpha & \delta & \beta & \alpha & \gamma \\ \beta & \beta & \beta & \beta & \beta \\ \gamma & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \delta & \gamma & \beta & \delta & \delta \end{array} \quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_5^*; \cdot)$
---	--

(e) $\begin{array}{c cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & d & c \\ c & c & d & a & b \\ d & d & c & b & a \end{array} \quad \mathbb{B} = (\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}; \cdot)$
--

24. feladat Számítsa ki D_{15} -ben az alábbi elemeket. Az eredményt a^k vagy $a^k t$ ($k = 0, 1, \dots, 14$) alakban adja meg.

- (a) a^{154} (b) $a^7 t \cdot a^{12} t$ (c) $a^{23} t \cdot a^{18}$
 (d) $(at \cdot a^{-5} t)^{-3}$ (e) $a^{10} t \cdot a^8 t$ (f) $(a^{-1} t a)^4$

25. feladat Oldja meg D_{15} -ben az alábbi egyenleteket. Az eredményt a^k vagy $a^k t$ ($k = 0, 1, \dots, 14$) alakban adja meg.

- (a) $x \cdot ta^3 = a$ (b) $a^4 t \cdot x \cdot a = ta^9$ (c) $ta^7 \cdot x \cdot a^2 t = a^{23} t$
 (d) $ta^5 \cdot x \cdot a^2 = t$ (e) $t \cdot x \cdot ta^5 = (ta)^2$ (f) $ta^3 \cdot x = a$

26. feladat Adja meg az alábbi S_7 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként.

- (a) $((1342)(237))^{126}(3476)^{-1}$
 (b) $((13)(15)(276))^{-10}(125)(63)$
 (c) $(345)((7451)^{-1}(4256))^{83}$
 (d) $((124)^{35}(134))^{-4}(27)$
 (e) $((1247)^{-6}(154)^{103})^{-100}$

27. feladat Állítsa elő transzpozíciók szorzataként az alábbi S_7 -beli permutációkat, és állapítsa meg a paritásukat.

- (a) (341572)
 (b) (1423)(1236)
 (c) (123)¹⁰¹
 (d) (13472)(1256)
 (e) (1234)⁻¹⁰⁰

28. feladat Adjon meg egy olyan $\pi \in S_6$ permutációt, ami rendelkezik a megadott tulajdonságokkal (ha van ilyen π).

- (a) $\pi^{15} = \text{id}$, és π páros permutáció
- (b) $\pi^{15} = \text{id}$, és π páratlan permutáció
- (c) π két idegen ciklus szorzata, és π páros permutáció
- (d) π két idegen ciklus szorzata, és π páratlan permutáció
- (e) π három idegen ciklus szorzata, és π páros permutáció

29. feladat Melyik nevezetes csoporttal izomorfak a 22. feladatbeli csoportok?

30. feladat Határozza meg az alábbi csoportokban a megadott elemek rendjét.

- (a) $i \in \mathbb{C}^*$
- (b) $(134)(52) \in S_5$
- (c) $\bar{2} \in \mathbb{Z}_5^*$
- (d) $\bar{9} \in \mathbb{Z}_{12}$
- (e) $a^9 \in D_{24}$
- (f) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \in \mathbb{C}^*$
- (g) $(1245)(234) \in S_5$
- (h) $\bar{5} \in \mathbb{Z}_9^*$
- (i) $\bar{10} \in \mathbb{Z}_{12}$
- (j) $ta^9 \in D_{24}$

31. feladat Adjon meg egy n -edrendű elemet az alábbi csoportokban.

- (a) \mathbb{C}^* , $n = 12$
- (b) \mathbb{Z}_{12} , $n = 3$
- (c) D_6 , $n = 3$
- (d) Q , $n = 4$
- (e) S_6 , $n = 6$
- (f) \mathbb{Z}_{15}^* , $n = 4$
- (g) D_8 , $n = 2$
- (h) \mathbb{Q}^* , $n = 2$

32. feladat Hány n -edrendű elem van az alábbi csoportokban?

- (a) \mathbb{C}^* , $n = 12$
- (b) \mathbb{Z}_{100} , $n = 10$
- (c) D_{24} , $n = 2$
- (d) Q , $n = 4$
- (e) S_4 , $n = 2$
- (f) \mathbb{Z}_9^* , $n = 3$
- (g) D_{24} , $n = 5$
- (h) \mathbb{Q} , $n = 2$

33. feladat Döntse el, hogy a G csoportban részcsoportot alkot-e a megadott H részhalmaz.

- (a) $G = S_4$, $H = \{\text{id}, (13), (24), (13)(24)\}$
- (b) $G = D_6$, $H = \{\text{id}, t, a^2, a^2t\}$
- (c) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = \mathbb{N}$
- (d) $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $H = (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$
- (e) $G = S_5$, $H = \{\text{id}, (135), (153)\}$
- (f) $G = (\mathbb{Z}_6, +)$, $H = \mathbb{Z}_6^*$

34. feladat Határozza meg a G csoportban a B részhalmaz által generált részcsoportot.

- (a) $G = \mathbb{Z}$, $B = \{30, 42, 105\}$
- (b) $G = \mathbb{Z}_{30}$, $B = \{\bar{6}, \bar{10}\}$
- (c) $G = \mathbb{Z}_{31}$, $B = \{\bar{6}, \bar{10}\}$
- (d) $G = D_{12}$, $B = \{a^3, a^2t\}$
- (e) $G = D_{10}$, $B = \{a^4, a^5t\}$
- (f) $G = S_4$, $B = \{(1234), (13)\}$
- (g) $G = \mathbb{C}^*$, $B = \left\{i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- (h) $G = \mathbb{Q}$, $B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$
- (i) $G = \mathbb{Q}^*$, $B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

35. feladat Melyek izomorfak az alábbi csoportok közül? (A választ minden esetben indokolni kell!)

- (a) \mathbb{Z}_2^3 , \mathbb{Z}_{20}^* , $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$, Q
- (b) D_6 , A_4 , \mathbb{Z}_{13}^* , \mathbb{Z}_{12}
- (c) D_3 , S_3 , \mathbb{Z}_7^* , \mathbb{Z}_9^*
- (d) \mathbb{Z}_5^* , \mathbb{Z}_8^* , \mathbb{Z}_{10}^* , \mathbb{Z}_{12}^*
- (e) D_4 , Q , \mathbb{Z}_{15}^* , E_8

36. feladat Adjon meg n -elemű részcsoportot a G csoportban (ha létezik n -elemű részcsoport).

- (a) $G = \mathbb{Z}_{24}$, $n = 4$
- (b) $G = \mathbb{Z}_{24}^*$, $n = 4$
- (c) $G = \mathbb{Z}_{24}$, $n = 3$
- (d) $G = \mathbb{Z}_{24}^*$, $n = 3$
- (e) $G = D_6$, $n = 4$
- (f) $G = S_4$, $n = 6$

37. feladat Adjon meg olyan G csoportot, amely rendelkezik a megadott tulajdonságokkal (ha létezik ilyen csoport).

- (a) G Abel-csoport, de nem ciklikus
- (b) G nem Abel-csoport, de minden valódi részcsoportja Abel-csoport
- (c) G véges, és van benne végtelen rendű elem
- (d) $|G| = 8$, és van 4-elemű részcsoportja
- (e) $|G| = 8$, és van 3-elemű részcsoportja