Nevezetes csoportok

Izomiaúrfizmus

$\leftrightarrow$	igaz	hamis
igaz	igaz	hamis
hamis	hamis	igaz

$\cdot$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

izomorf csoportok

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\otimes$		
		
		

Izomiaúrfizmus

Az $\mathbb{A} = (\{$  ,  $\}; \otimes)$ és a $\mathbb{B} = (\{\bar{0}, \bar{1}\}\,; +)$ csoportok szerkezete ugyanaz: ha $\mathbb{A}$ művelettáblázatában
minden -t átnevezünk $\bar{0}$-ra , és minden -t átnevezünk $\bar{1}$-re,
akkor éppen $\mathbb{B}$ művelettáblázatát kapjuk:

$\otimes$		
		
		

$\xrightarrow{\text{átnevezés}}$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Ezt az „átnevezést” a

$\varphi \colon \{$  ,  $\} \to \{\bar{0}, \bar{1}\}$,  $\mapsto \bar{0}$,  $\mapsto \bar{1}$

leképezéssel írhatjuk le. Az átnevezés „jogossága” pedig a következőképpen fogalmazható meg:

$\forall a_1, a_2 \in \{$  ,  $\} : \quad (a_1 \otimes a_2)\,\varphi \;=\; (a_1\varphi) + (a_2\varphi)\,.$

Izomorfizmus

4.8. Definíció.

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ és $\mathbb{B} = (B; \oplus)$ két csoport (vagy csak grupoid).
Azt mondjuk, hogy a $\varphi\colon A \to B$ leképezés izomorfizmus $\mathbb{A}$-ból $\mathbb{B}$-be, ha

- φ bijektív leképezés, és
- φ felcserélhető a műveletekkel, azaz

$$\forall a_1, a_2 \in A: \quad (a_1 * a_2)\,\varphi \;=\; a_1\varphi \oplus a_2\varphi.$$

Ha létezik $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ szürjektív izomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ *izomorf* (jelölés: $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$).

Példa.

- $\varphi\colon\ (\mathbb{C}; +) \to (\mathbb{C}; +)\,,\ z \mapsto \overline{z}$
- $\varphi\colon\ (\mathbb{C}; \cdot) \to (\mathbb{C}; \cdot)\,,\ z \mapsto \overline{z}$
- $\varphi\colon\ (\mathbb{R}^+; \cdot) \to (\mathbb{R}; +)\,,\ x \mapsto \log x$

25. feladat

Döntse el, hogy a művelettáblázat által meghatározott $\mathbb{A}$ grupoid izomorf-e a $\mathbb{B}$ grupoiddal.

(a)

$\cdot$	u	v	x	y
u	y	u	v	x
v	u	v	x	y
x	v	x	y	u
y	x	y	u	v

$\mathbb{B} = (\mathcal{P}(\{a, b\}); \cup)$

Nem, mert $\forall z \in B\colon z \cup z = z$, de $\exists z \in A\colon z \cdot z \neq z$.

(b)

$\cdot$	u	v	x	y
u	y	u	v	x
v	u	v	x	y
x	v	x	y	u
y	x	y	u	v

$\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; +)$

Igen, pl. $u \mapsto \overline{3}, v \mapsto \overline{0}, x \mapsto \overline{1}, y \mapsto \overline{2}$.

Gyűrűből csoport

4.9. Példa.

Tetszőleges gyűrű Abel-csoportot alkot az összeadás műveletével, és tetszőleges egységelemes gyűrű egységei csoportot alkotnak a szorzás műveletével.
(HF: Keressünk konkrét példákat!).

4.10. Definíció.

Ha G egy csoport, és a $H \subseteq G$ halmaz is csoportot alkot a G-ből „örökölt" művelettel, akkor azt mondjuk, hogy H *részcsoportja* G-nek. (Pontosabban lásd a 4.43. Definícióban.)

Számhalmazok az összeadás műveletével

Példa.

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- $H = \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- $H = \mathbb{C},\ \mathbb{R},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Z}$: igen (Abel-csoport)
- $H = \mathbb{R}^+,\ \mathbb{Q}^+,\ \mathbb{N}$: nem (csak félcsoport)
- $H = \{\text{páros számok}\}$: igen (Abel-csoport)
- $H = \{\text{páratlan számok}\}$: nem (nem is grupoid)
- $H = \{\text{irracionális számok}\}$: nem (nem is grupoid)
- $H = \{\text{véges tizedestörtek}\}$: igen (Abel-csoport)

Számhalmazok a szorzás műveletével

Példa.

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- $H = \mathbb{C},\ \mathbb{R},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Z}$: nem (csak monoid)
- $H = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: nem (csak monoid)
- $H = \mathbb{R}^+,\ \mathbb{Q}^+$: igen (Abel-csoport)
- $H = \mathbb{N}$: nem (csak monoid)
- $H = \{\text{irracionális számok}\}$: nem (nem is grupoid)
- $H = \{\text{véges tizedestörtek}\} \setminus \{0\}$: nem (csak monoid)

4.11. Példa.

Tetszőleges T test esetén a T feletti $n \times n$-es mátrixok gyűrűjének egységcsoportja a T feletti n-dimenziós *általános lineáris csoport* (jelölés: $\mathrm{GL}_n(T)$), ebben az 1 determinánsú mátrixok alkotta részcsoport a megfelelő *speciális lineáris csoport* (jelölés: $\mathrm{SL}_n(T)$):

$$\mathrm{GL}_n(T) = \{A \in T^{n \times n} : \det(A) \neq 0\},$$
$$\mathrm{SL}_n(T) = \{A \in T^{n \times n} : \det(A) = 1\}.$$

26. feladat

Döntse el, hogy az alábbi halmazok grupoidot, félcsoportot, csoportot alkotnak-e a megadott művelettel.

(a) $(\mathcal{P}(\{a, b\}); \triangle)$ csoport, izomorf a $\left(\mathbb{Z}_2^2; +\right)$ csoporttal

$(\mathbb{Z}_5^*; +)$ nem is grupoid, pl. $\overline{2} + \overline{3} \notin \mathbb{Z}_5^*$

(b) $(\mathbb{R}^{2\times 2}; +)$ csoport, izomorf az $\left(\mathbb{R}^4; +\right)$ csoporttal

$(\mathbb{R}^{2\times 2}; \cdot)$ csak monoid, pl. a nullmátrixnak nincs inverze

Egységgyökök

4.12. Példa.

A komplex egységgyökök csoportot alkotnak a szorzás műveletével; ezen belül az n-edik egységgyökök egy E_n részcsoportot alkotnak minden $n \geq 2$ egész számra. Az E_n csoport izomorf a $\mathbb{Z}_n$ csoporttal: $(E_n; \cdot) \cong (\mathbb{Z}_n; +)$.

Kvaterniócsoport

Példa.

A $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ halmaz csoportot alkot az alábbi szorzással. Ezt a csoportot *kvaterniócsoportnak* nevezzük, és Q-val jelöljük.

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Megjegyzés.

A táblázatból elég az $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$ és $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ szorzatokat megjegyezni, a többi már magától értetődő.
Az $a + bi + cj + dk$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ alakú kifejezéseken természetes módon lehet definiálni az összeadás és szorzás műveletét, így kapjuk a kvaterniók ferdetestét („majdnem” test, csak éppen a szorzás nem kommutatív).

4.13. Példa.

Egy tetszőleges nemüres A halmaz összes transzformációi monoidot alkotnak a leképezésszorzás műveletével, a bijektív transzformációk (azaz permutációk) pedig csoportot alkotnak. Ez utóbbit nevezzük az A feletti *szimmetrikus csoportnak* (jelölés: S_A, illetve $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén S_n).

27. feladat!

4.14. Példa.

Az S_4 csoportban a $V = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ részcsoportot *Klein-féle csoportnak* nevezzük.

$\cdot$	id	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
id	id	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
(12)(34)	(12)(34)	id	(14)(23)	(13)(24)
(13)(24)	(13)(24)	(14)(23)	id	(12)(34)
(14)(23)	(14)(23)	(13)(24)	(12)(34)	id

Ez a csoport izomorf a korábban látott $(\mathcal{P}(\{a, b\}); \triangle)$ és $(\mathbb{Z}_2^2; +)$ csoportokkal.

4.15. Példa.

A sík összes egybevágósági transzformációi csoportot alkotnak a leképezésszorzás műveletével, egy adott síkidomot önmagába képező egybevágóságok pedig részcsoportot alkotnak ebben a csoportban (a síkidom *szimmetriacsoportja*).

Megjegyzés.

A szimmetriacsoportot természetesen három- (vagy magasabb) dimenziós térbeli alakzatokra is értelmezhetjük. Ha csak az irányítástartó egybevágóságokat engedjük meg, akkor *mozgáscsoportról* beszélünk (ez részcsoportja a szimmetriacsoportnak).

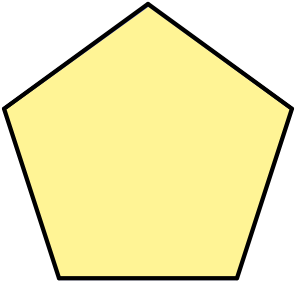
Példa.

Huszonnégy olyan térbeli forgatás van, ami egy adott kockát önmagába visz, és ezek csoportja (azaz a kocka mozgáscsoportja) izomorf S_4-gyel.
`http://demonstrations.wolfram.com/CubicSymmetryTypes`

4.16. Definíció.

A szabályos n-szög szimmetriacsoportját *n-edfokú diédercsoportnak* nevezzük és D_n-nel jelöljük.

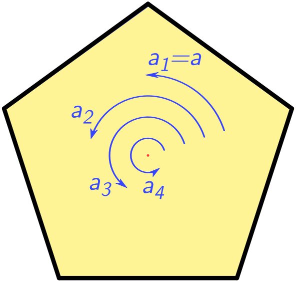
A diédercsoport elemei



A szabályos *n*-szög szimmetriacsoportja a középpont körüli forgatásokat és a szimmetriatengelyekre való tükrözéseket tartalmaz.

Forgatások

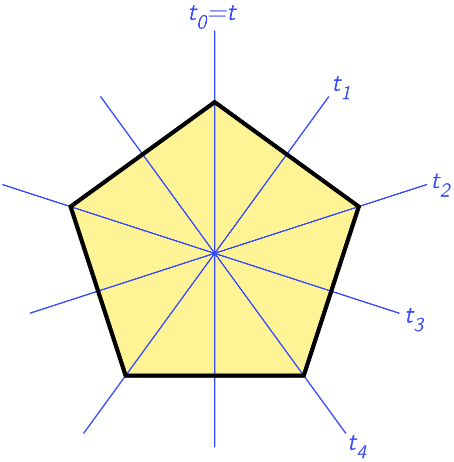
Jelölje a_k a sokszög középpontja körüli $\dfrac{2k\pi}{n}$ szögű forgatást $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$:



Vegyük észre, hogy $a_k = a_1^k$. A továbbiakban a_1 helyett egyszerűen csak a-t írunk.
Így az n-szög mozgáscsoportja: $\{\mathrm{id}, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\} \cong \mathbb{Z}_n$.

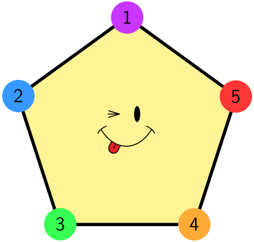
Tükrözések

Legyenek a szimmetriatengelyekre való tükrözések $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$:

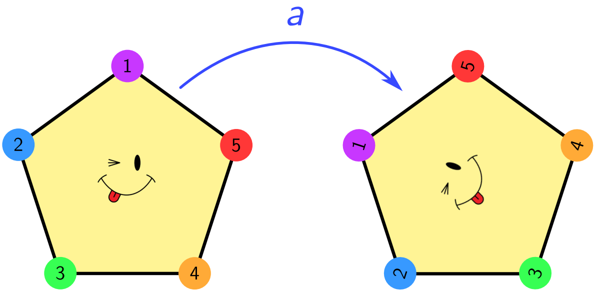


A továbbiakban t_0 helyett egyszerűen csak t-t írunk, és szeretnénk a többi tükrözést is t és a segítségével kifejezni.

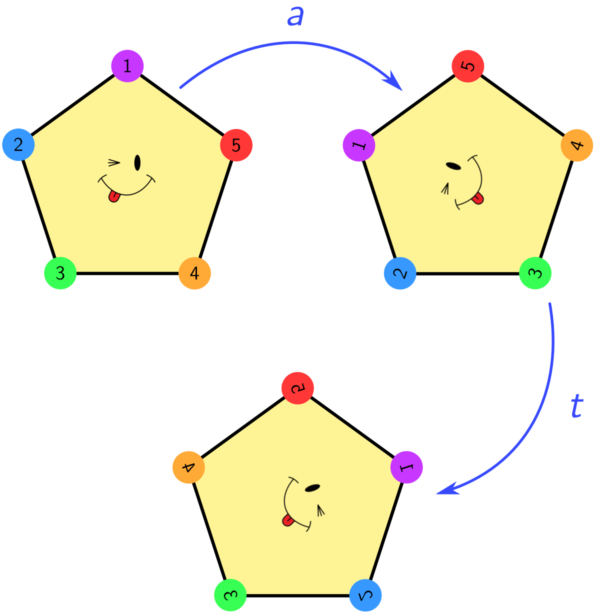
$at = ?$



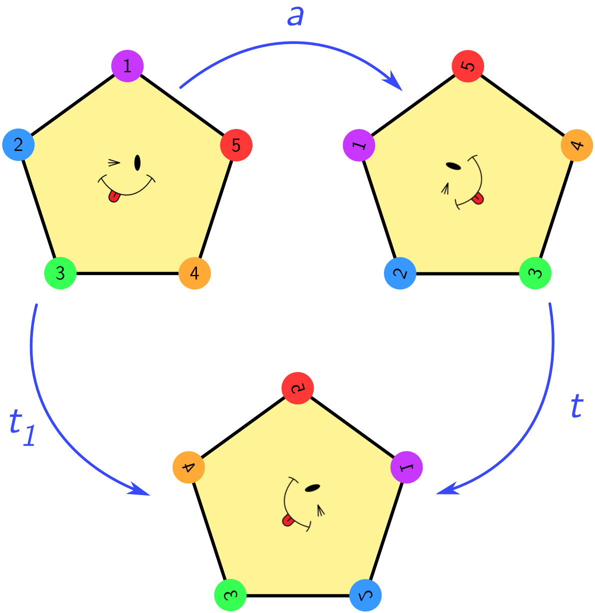
$at = ?$



$at = ?$



$at = t_1$



Diédercsoport

Hasonlóan (be)látható, hogy $t_k = a^k t$ minden $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ esetén.
Tehát ...

4.17. Tétel.

A D_n csoportnak $2n$ eleme van: $D_n = \{\, \mathrm{id}, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, t, at, a^2 t, \ldots, a^{n-1} t \,\}$, ahol

- a: a középpont körüli $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatás,
- t: egy szimmetriatengelyre való tükrözés.

Ekkor a^k a középpont körüli $\frac{2k\pi}{n}$ szögű forgatás $(0 \leq k \leq n-1)$,
a $t, at, a^2 t, \ldots, a^{n-1} t$ transzformációk pedig tengelyes tükrözések (két „szomszédos" tengely $\frac{\pi}{n}$ szöget zár be egymással).

Fennáll továbbá a $ta = a^{-1} t$ összefüggés.

28. feladat

Számítsa ki D_{15}-ben az alábbi elemeket. Az eredményt a^k vagy $a^k t$ $(k = 0, 1, \ldots, 14)$ alakban adja meg.

(a) $a^{154} = \quad a^4$

$a^7 t \cdot a^{12} t = \quad a^{10}$

(b) $a^{23} t \cdot a^{18} = \quad a^5 t$

$\left(at \cdot a^{-5} t\right)^{-3} = \quad a^{12}$

29. feladat

Oldja meg D_{15}-ben az alábbi egyenleteket. Az eredményt a^k vagy $a^k t$ $(k = 0, 1, \dots, 14)$ alakban adja meg.

(a) $x \cdot ta^3 = a$ $\quad x = a^{13}t$

$a^4 t \cdot y \cdot a = ta^9$ $\quad y = a^{12}$

4.18. Definíció.

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait *permutációcsoportoknak* nevezzük.

4.19. Definíció.

Az $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz összes permutációi alkotta csoportot *n-edfokú szimmetrikus csoportnak* nevezzük, és S_n-nel jelöljük.

Megjegyzés.

Egy $\pi \in S_n$ permutációt megadhatunk úgy, hogy $\{1, 2, \ldots, n\}$ minden eleme alá odaírjuk a π melletti képét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1\pi & 2\pi & 3\pi & \cdots & n\pi \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy π bijektivitása azt jelenti, hogy a mátrix alsó sorában az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációja van.

Ciklusfelbontás

4.20. Definíció.

Legyenek $a_1, \ldots, a_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ különböző elemek, és legyen $\pi \in S_n$ az alábbi permutáció:

$$a_1\pi = a_2, \;\; a_2\pi = a_3, \; \ldots, \; a_{k-1}\pi = a_k, \;\; a_k\pi = a_1 \quad \text{és}$$
$$b\pi = b \text{ ha } b \notin \{a_1, \ldots, a_k\}\,.$$

Ezt a π permutációt így jelöljük: $\pi = \left(a_1\, a_2 \,\cdots\, a_{k-1}\, a_k\right)$ és *ciklikus permutációnak* vagy röviden *ciklusnak* nevezzük.

4.21. Definíció.

Két permutáció *idegen*, ha *mozgatott elemeik* halmaza diszjunkt.

4.22. Tétel.

Ha π és ρ idegen permutációk, akkor fölcserélhetőek, azaz $\pi\rho = \rho\pi$.

4.23. Tétel.

Minden S_n-beli permutáció előáll páronként idegen ciklusok szorzataként, és ez az előállítás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Transzpozíciók

4.24. Definíció.

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az $(i\,j)$ alakú permutációkat *transzpozícióknak* nevezzük.

4.25. Tétel.

Az S_n csoportot *generálják* a transzpozíciók, azaz minden S_n-beli permutáció előáll transzpozíciók szorzataként.

Bizonyítás.

Elég ciklusokra bizonyítani: $(a_1\,a_2\,\cdots\,a_{k-1}\,a_k) = (a_1\,a_2)\,(a_1\,a_3)\cdots(a_1\,a_k)$. □

4.26. Tétel.

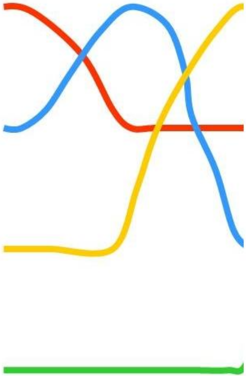
Egy S_n-beli permutáció transzpozíciók szorzataként való felírásában a tényezők számának paritása egyértelműen meghatározott.

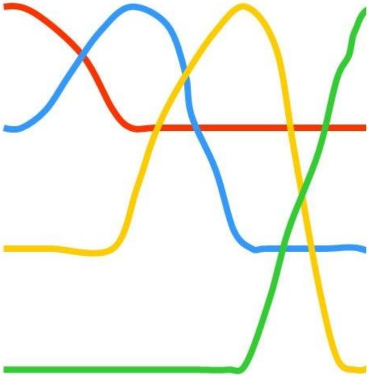
Bizonyítás.

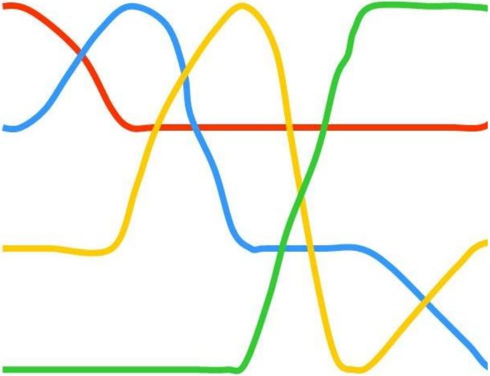
Tegyük fel, hogy $\tau_1\tau_2\cdots\tau_{2k+1} = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2l}$, ahol mindegyik τ_i és σ_j transzpozíció. Ekkor az identikus permutáció előáll páratlan sok transzpozíció szorzataként:

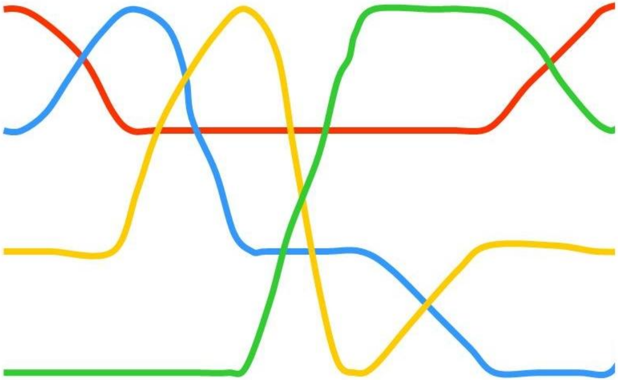
$$\mathrm{id} = \tau_1\tau_2\cdots\tau_{2k+1}\sigma_{2l}\cdots\sigma_2\sigma_1.$$

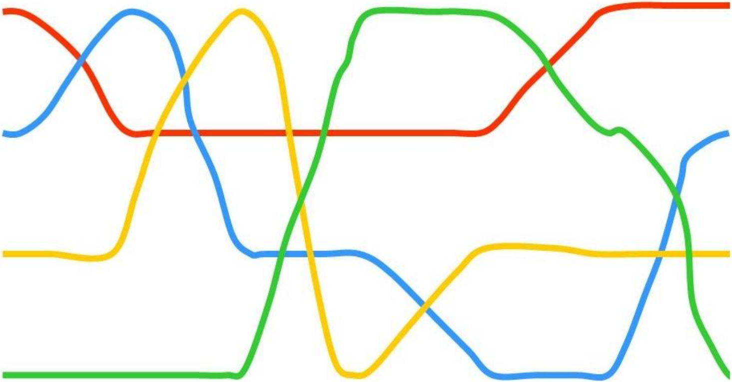
Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen ...

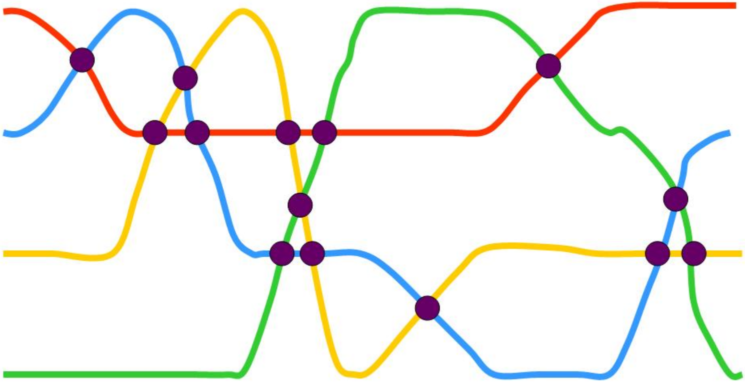


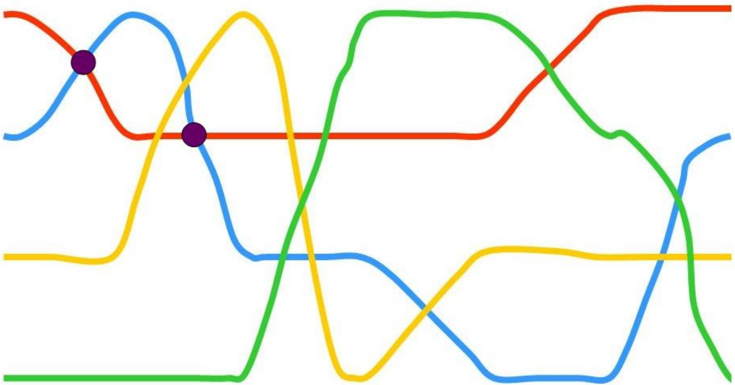




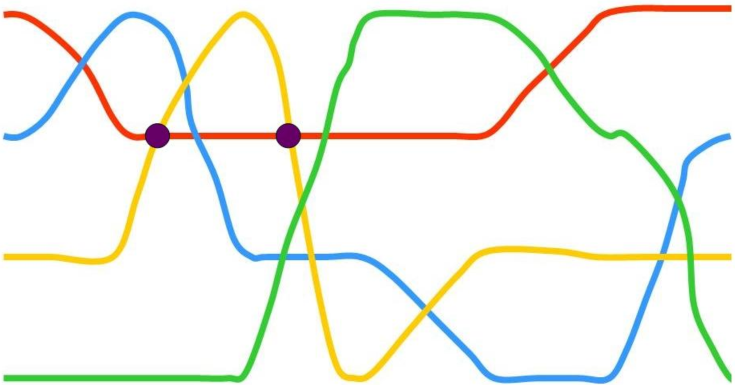




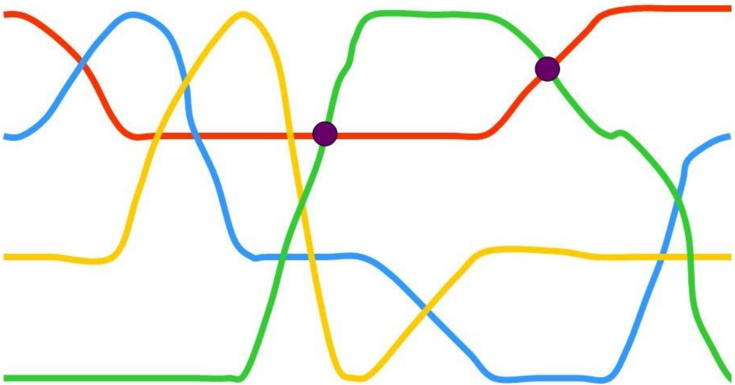




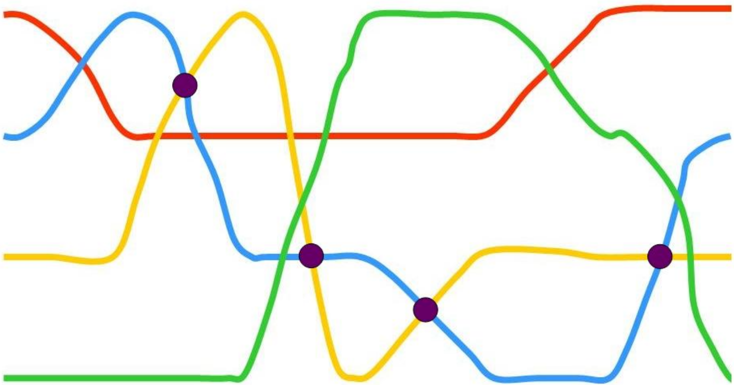
metszéspontok: 2



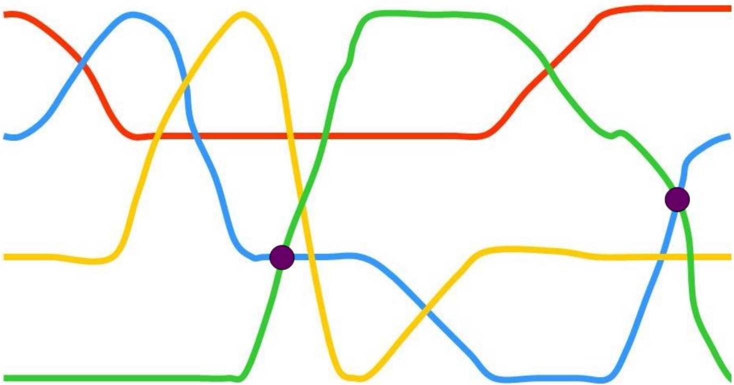
metszéspontok: $2+2$



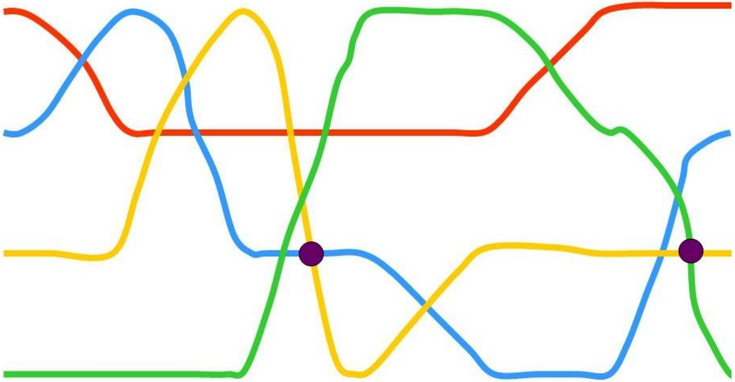
metszéspontok: $2 + 2 + 2$



metszéspontok: $2 + 2 + 2 + 4$

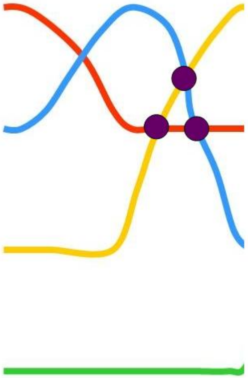


metszéspontok: $2 + 2 + 2 + 4 + 2$

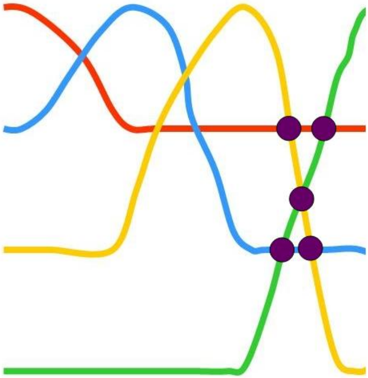


metszéspontok: $2+2+2+4+2+2 \equiv 0 \pmod 2$

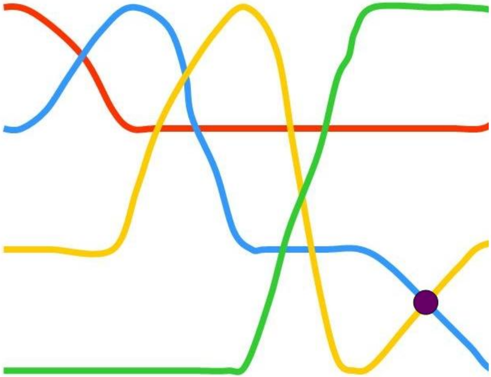
metszéspontok: 1



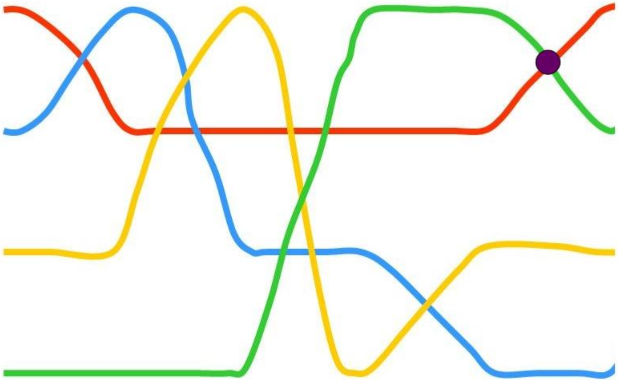
metszéspontok: $1 + 3$



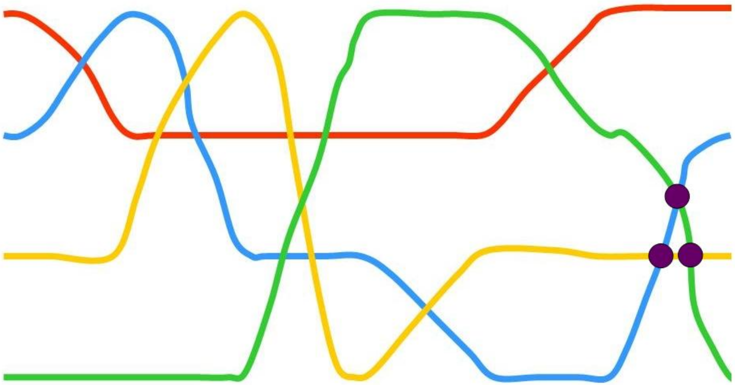
metszéspontok: $1 + 3 + 5$



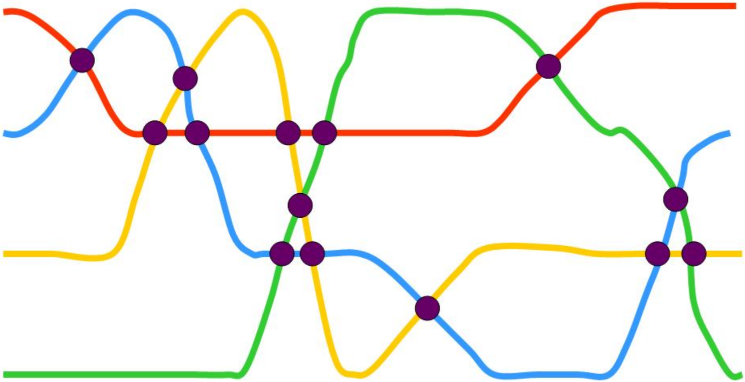
metszéspontok: $1+3+5+1$



metszéspontok: $1 + 3 + 5 + 1 + 1$



metszéspontok: $1 + 3 + 5 + 1 + 1 + 3 \equiv$ cserék száma $\pmod 2$



metszéspontok: $0 \equiv$ cserék száma $\pmod 2$ ⚡ □

Az alternáló csoport

4.27. Állítás.

A páros hosszúságú ciklusok páratlan permutációk, míg a páratlan hosszúságú ciklusok páros permutációk.

4.28. Tétel.

A páros permutációk egy 2 indexű részcsoportot alkotnak S_n-ben. Ezt a csoportot *alternáló csoportnak* nevezzük, és A_n-nel jelöljük.

Megjegyzés.

Tekintsük az alábbi n-változós polinomfüggvényt (pl. $\mathbb{R}$ felett):

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

A változók bármely permutációja esetén V vagy nem változik, vagy előjelet vált:

$$V(x_{1\pi}, \ldots, x_{n\pi}) = \pm V(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{sgn} \pi \cdot V(x_1, \ldots, x_n).$$

A $\pi \in S_n$ permutáció előjele aszerint 1 vagy -1, hogy π páros-e vagy páratlan.

Az alternáló csoport

Példa.

- $A_2 = \{\mathrm{id}\}$
- $A_3 = \{\mathrm{id}, (123), (132)\} \cong \mathbb{Z}_3$
- $A_4 = \{\mathrm{id}, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

4.29. Tétel.
Az alternáló csoportot generálják a 3 hosszúságú ciklusok, azaz minden A_n-beli permutáció előáll 3 hosszúságú ciklusok szorzataként.