Horner-módszer

Horner-elrendezés

Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ egy n-edfokú polinom és $c \in T$.

Ha $f(c)$ értékét szeretének kiszámítani, akkor az $f(c) = a_n c^n + \cdots + a_1 c + a_0$ felírást használva $2n - 1$ szorzást és n összeadást kell elvégeznünk.

Ha viszont a disztributivitást kihasználva $f(c)$-t a következő alakban írjuk fel, akkor csak n szorzást és n összeadást kell elvégezni:

$$f(c) = ((\cdots(((a_n \cdot c + a_{n-1}) \cdot c + a_{n-2}) \cdot c + a_{n-3}) \cdots + a_2) \cdot c + a_1) \cdot c + a_0.$$

Ezt nevezzük *Horner-elrendezésnek*. Figyeljük meg, hogy balról jobbra haladva elvégezve a műveleteket a következő részeredmény mindig úgy adódik, hogy az előzőt megszorozzuk c-vel, és hozzáadjuk f soron következő együtthatóját. (Itt részeredményen az egy zárójelpáron belüli kifejezéseket értjük.)

Horner-módszer

A számolást kényelmesebb az alábbi táblázatban elvégezni.

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\cdots$	a_0
c	a_n	$a_n \cdot c + a_{n-1}$	$\cdots$	$\clubsuit$	$\clubsuit \cdot c + \spadesuit$	$\cdots$	$f(c)$

Amint a következő tételből és következményéből kiderül, a Horner-elrendezés valójában nem csak $f(c)$ kiszámítására alkalmas.

Tétel (Horner-módszer).

Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ egy n-edfokú polinom és $c \in T$. Ha a Horner-módszerrel elkészített táblázat alsó sorában álló elemek $b_n, \ldots, b_1, b_0$, azaz $b_n = a_n$ és $b_i = b_{i+1} \cdot c + a_i \ \ (i = n-1, \ldots, 0)$, akkor b_0 nem más, mint az f-nek az $x - c$ polinommal való osztásakor keletkező maradék, $b_n x^{n-1} + \cdots + b_2 x + b_1$ pedig ugyanezen osztás hányadosa:

$$f = (x - c) \cdot \left(b_n x^{n-1} + \cdots + b_2 x + b_1 \right) + b_0.$$

Negyedik házi feladat az előadásra

Bizonyítsa be az előző oldalon lévő tételt, vagyis az

$$f = (x - c) \cdot \left(b_n x^{n-1} + \cdots + b_2 x + b_1 \right) + b_0$$

egyenlőséget, ahol $f \in T[x]$ tetszőleges polinom (és T tetszőleges test).

- beküldendő emailben: `twaldha@math.u-szeged.hu`
- pdf fájl legyen
- fájlnév: `nev-eahf4.pdf`
  (a név ékezetek nélkül, pl. `Waldhauser-Tamas-eahf4.pdf`)
- határidő: október 17, reggel 8 óra
- önálló munka!

Iterált Horner-módszer

Következmény (iterált Horner-módszer).

Alkalmazzuk a Horner-módszert az $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinomra és a $c \in T$ elemre, majd egészítsük ki a táblázatot egy újabb, az előzőnél eggyel rövidebb sorral a fentebb leírt számolási szabályt követve. Folytassuk újabb, egyre rövidebb sorokkal, míg végül egy háromszög alakú táblázatot kapunk:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
c			$\cdots$		d_0
c			$\cdots$	d_1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$		
c		d_{n-1}			
c	d_n				

Ha $d_0 = \cdots = d_{k-1} = 0$ és $d_k \neq 0$, akkor a $c \in T$ elem k-szoros gyöke f-nek.

A táblázat jobb szélén átlósan elhelyezkedő elemek megadják annak a polinomnak az együtthatóit, amelyet f-ből az $x - c$ határozatlanra való áttéréssel kapunk:

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = d_n (x - c)^n + \cdots + d_1 (x - c) + d_0.$$