**ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET**

**VIZSGADOLGOZAT (MINTA)**

**Név:** ...............................................

**EHA:** ...............................................

| **1.** | **2.** | **3.** | **4.** | **5.** | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**Tudnivalók:** Az első két feladatnál röviden indokolni kell a választ, a többi feladatnál viszont elég a végeredményt megadni. Semmilyen segédeszköz nem használható, még függvénytáblázat, számológép, mobiltelefon sem. Bármiféle nem megengedett segédeszköz használata esetén a dolgozat automatikusan 0 pontos, javítási lehetőség nélkül.

---

**1. feladat** ($3 \cdot 4$ pont): Igaz-e az állítás? Válaszát röviden indokolja.

(a) A komplex egységgyökök multiplikatív csoportjának csak egy 6-elemű részcsoportja van.

(b) Létezik olyan $R$ gyűrű, hogy minden $a, b \in R$ esetén $(a+b)^3 = a^3 + b^3$.

(c) Tetszőleges $f \in \mathbb{R}[x]$ negyedfokú polinom esetén, ha $f$-nek van három valós gyöke, akkor a negyedik gyöke is valós.

**2. feladat** ($3 \cdot 4$ pont): Adjon megadott tulajdonságú példát, és röviden indokolja, hogy a példa miért rendelkezik a megkívánt tulajdonságokkal.

(a) Adjon példát olyan valós polinomra, amelynek $i$ kétszeres gyöke.

(b) Adjon példát $D_6$-ban olyan másodrendű elemekre, amelyek szorzata harmadrendű.

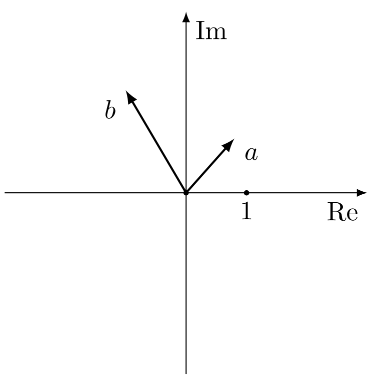
(c) Adjon példát olyan $f \in \mathbb{Q}[x]$ negyedfokú polinomra, ami $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis, de $\mathbb{R}$ felett nem.

**3. feladat** ($3 \cdot 4$ pont): Válaszoljon a kérdésekre (itt nem kell indoklást írni).

(a) Mely $m \geq 2$ számok esetén lesz $(\mathbb{Z}_m; +, \cdot)$ test, illetve integritástartomány?

(b) Egy $f \in \mathbb{C}[x]$ kilencedfokú polinomról annyit tudunk, hogy $\text{lnko}(f, f') \sim \left(x^2+1\right)(x-3)^2$. Mit lehet *biztosan* tudni ennek alapján $f$ gyökeiről? (Mik lehetnek a gyökei, és mekkora lehet az egyes gyökök multiplicitása?)

(c) Adottak a komplex számsíkon az alábbi $a$ és $b$ komplex számok. Rajzolja fel az $\dfrac{a}{b}$ hányadost.



**4. feladat** ($4 \cdot 3$ pont): Egészítse ki a definíciót vagy tételkimondást.

(a) Az $\varepsilon$ komplex számot .................. nevezzük, ha $\varepsilon^n = 1$.

(b) Legyen $R$ egységelemes gyűrű. Az $a \in R$ elemet .................. nevezzük, ha létezik multiplikatív inverze, azaz létezik olyan $a^{-1} \in R$ elem, amelyre .................. teljesül.

(c) Tetszőleges $T$ test és $f, g \in T[x]$ polinomok esetén $f$ és $g$ közös gyökei ugyanazok, mint .................. gyökei.

(d) Euler-féle $\varphi$ függvénynek nevezzük azt a $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt, amelyre $\varphi(n) =$ ..................

---

**5. feladat** (12 pont): Egészítse ki a bizonyítást.

**Tétel.** *Ciklikus csoport minden részcsoportja is ciklikus.*

**Biz.** Tegyük fel, hogy $G$ ciklikus, azaz létezik olyan $a \in G$ elem, amelyre $G =$ .................. Legyen $H$ részcsoportja $G$-nek; ha $H = \{1\}$, akkor $H$ nyilván ciklikus, ezért feltehetjük, hogy $H \neq \{1\}$. Ekkor létezik olyan $k$ *pozitív* egész szám, amelyre $a^k \in H$, mert $H$ zárt a/az ..................-ra/re. Vegyük a legkisebb ilyen $k$ kitevőt.

Célunk megmutatni, hogy $H = [a^k]$.

Az világos, hogy $[a^k] \subseteq H$, mert $[a^k]$ a leg.................. olyan részcsoport, ami tartalmazza az $a^k$ elemet.

A másik irányú tartalmazás igazolásához tekintsünk egy tetszőleges $h \in H$ elemet; azt kell megmutatnunk, hogy $h \in [a^k]$.

Feltehető, hogy $h = a^j$ (alkalmas $j$ egész számra), hiszen $G$ minden eleme ilyen alakú. Osszuk el $j$-t maradékosan $k$-val: $j = qk + r$ és .................. Ha $r = 0$, akkor készen vagyunk: $h \in [a^k]$, mivel $h =$ .................. Ha pedig $r > 0$, akkor $a^r = h \cdot$ .................., és ez az elem $H$-ban van, mert $h \in H$ és $a^k \in H$. Azt kaptuk tehát, hogy $a^r \in H$, de ez ellentmond annak, hogy $k$ a legkisebb pozitív kitevő, amelyre $a^k \in H$. $\square$