

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

rutinfeladatok

2017 őszi félév, BSc

1. feladat Számítsa ki az alábbi komplex számokat kanonikus alakban.

- $\frac{2+3i}{1+4i} = ?$
- $u\bar{v} + \bar{u}v = ?$, $\frac{\bar{u}}{v} + \frac{u}{\bar{v}} = ?$, $|uv| = ?$, $|\frac{u}{v}| = ?$, ahol $u = 2 - 3i$ és $v = 1 + i$
- $\left(\frac{-1+i}{2+i}\right)^2 - \left(\frac{-1-i}{2-i}\right)^2 = ?$
- $(\overline{2+5i})^2 + (2+5i)^2 = ?$
- $(-6+9i+4-8i) \cdot i = ?$

2. feladat Ábrázolja a Gauss-féle számsíkon az alábbi számhalmazokat.

- $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(\bar{z} - i) > 1\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |iz - i| = 1\}$
- $\{z \in \mathbb{C} : |\bar{z} + 2 - i| \leq 2\}$
- $\{z \in \mathbb{C} : |\bar{z} - i| = 1\}$
- $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re}(z + 3) < 1\}$
- $\{z \in \mathbb{C} : |iz - 1 - i| > 1\}$

3. feladat Számítsa ki trigonometrikus és kanonikus alakban is.

- $\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = ?$
- $\frac{(-1-i)(\sqrt{3}+i)}{(-1+i)(-\sqrt{3}+i)} = ?$
- $(-1-i)(\sqrt{3}+i) = ?$
- $(\sqrt{3}-i)(2+2\sqrt{3}i) = ?$
- $\frac{1-i}{1+i} = ?$

4. feladat Ábrázolja a Gauss-féle számsíkon az alábbi számhalmazokat.

- $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg(zi) < \frac{\pi}{3}\}$
- $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z+zi) = \pi\}$
- $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq \arg(\bar{z}) < \frac{\pi}{4}\}$
- $\{z \in \mathbb{C} : \arg(\bar{z}) = \pi/6\}$
- $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z^2) = \pi/2\}$

5. feladat Számítsa ki a hatványokat trigonometrikus alakban, majd adja meg a végeredményt kanonikus alakban is.

- $(-1+i)^{2422} = ?$
- $(\sqrt{3}+i)^{1208} = ?$
- $(2+2\sqrt{3}i)^{605} = ?$
- $(1+i)^{1222} = ?$
- $(-3-3\sqrt{3}i)^{1526} = ?$

6. feladat Számítsa ki a gyök összes értékét trigonometrikus alakban, majd adja meg a végeredményt kanonikus alakban is.

- $\sqrt[3]{i} = ?$
- $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i} = ?$
- $\sqrt[6]{64} = ?$
- $\sqrt[4]{-16} = ?$
- $\sqrt[3]{-8} = ?$

7. feladat Egységgyökök-e a következő komplex számok, és ha igen, akkor hányadik egységgyökök?

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\text{cis } \frac{5\pi}{12}$
- $\text{cis } \sqrt{2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $\text{cis } \frac{6\pi}{7}$

8. feladat Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A választ minden esetben indokolni kell!

- Van olyan z komplex szám, amelyre $\text{Re } z = 1$ és $|z - i| = 3$.
- Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $\sqrt[n]{z}$ értékei között van valós szám, akkor z is valós.
- Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha z^2 harmadik egységgyök, akkor z is harmadik egységgyök.
- Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ esetén $|z+w| = |z| + |w|$.
- Van olyan z komplex szám, amelyre $\text{Re } z = 2$ és $|z| = 1$.

9. feladat Döntse el, hogy gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkotnak-e az alábbi számhalmazok a szokásos összeadás és szorzás műveletével.

- (a) $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$
- (b) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } a \text{ is és } b \text{ is páros}\}$
- (c) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$
- (d) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } a \text{ páros}\}$
- (e) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } b \text{ páros}\}$

10. feladat Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A választ minden esetben indokolni kell!

- (a) Létezik olyan gyűrű, ami egységelemes, de nem kommutatív és nem zérusosztómentes.
- (b) Létezik olyan integritástartomány, amelyben pontosan tizenhat egység van.
- (c) Az egységek minden gyűrűben csoportot alkotnak az összeadás műveletével.
- (d) Létezik olyan gyűrű, ami kommutatív és egységelemes, de nem integritástartomány.
- (e) Létezik olyan integritástartomány, amelyben csak véges sok egység van.

11. feladat Számítsa ki az f és g polinomok legnagyobb közös osztóját.

- (a) $f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3, g = x^3 + x^2 + x - 3 \in \mathbb{R}[x]$
- (b) $f = x^4 + x^3 + x, g = x^4 + x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$
- (c) $f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 \in \mathbb{R}[x]$
- (d) $f = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3, g = x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6 \in \mathbb{Q}[x]$
- (e) $f = x^4 + x^3 + x^2 + \bar{1}, g = x^3 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$

12. feladat Oldja meg az $fu + gv = \text{lko}(f, g)$ egyenletet.

- (a) $f = x^6 + \bar{6}, g = x^4 + \bar{5}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_7[x]$
- (b) $f = x^8 - 3x + 2, g = x^6 - x^5 + 3x - 2 \in \mathbb{R}[x]$
- (c) $f = x^5 + x + \bar{2}, g = x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$
- (d) $f = x^4 + x^3 + x + \bar{1}, g = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (e) $f = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 1, g = x^3 + 4x^2 + 4x + 3 \in \mathbb{R}[x]$

13. feladat Oldja meg az $f \cdot u \equiv \bar{1} \pmod{m}$ konruenciát.

- (a) $f = x^2 + \bar{3}x + \bar{1}, m = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{4}x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (b) $f = x^2 + \bar{1}, m = x^3 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$
- (c) $f = \bar{3}x^2 + \bar{2}, m = x^3 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (d) $f = \bar{2}x^2 + \bar{4}, m = x^3 + x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (e) $f = x^2, m = x^3 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$

14. feladat A Horner-módszer segítségével határozza meg az f polinom c gyökének multiplicitását.

- (a) $f = x^3 - 4x^2 + 5x - 2, c = 1$
- (b) $f = x^6 + 4x^5 + 7x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 1, c = -1$
- (c) $f = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, c = 2$
- (d) $f = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16, c = -2$
- (e) $f = x^3 + x^2 + x + 1, c = i$

15. feladat Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A választ minden esetben indokolni kell!

- (a) Minden $f, g \in \mathbb{Z}_3[x]$ esetén, ha $f \mid g$ és $g \mid f$, akkor $f = g$.
- (b) Létezik olyan $f \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinom, amelynek végtelen sok osztója van.
- (c) Minden $f, g \in \mathbb{Z}_2[x]$ esetén, ha $f \mid g$ és $g \mid f$, akkor $f = g$.
- (d) Léteznek olyan $f \neq g \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomok, melyekre minden $c \in \mathbb{Z}_3$ esetén $f(c) = g(c)$.
- (e) Létezik olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom, amelyre $\text{lko}(f, x^3 - 1) = x + 1$.

16. feladat Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, amely a megadott helyeken a megadott értékeket veszi fel.

- (a) $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8$
- (b) $f(-1) = 6, f(0) = 5, f(1) = 0, f(2) = 3, f(3) = 2$
- (c) $f(1) = 2, f(i) = i$
- (d) $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 3$
- (e) $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 6$

17. feladat Bontsa irreducibilis tényezőik szorzatára a polinomokat a megadott polinomgyűrűkben.

- (a) $x^6 + \bar{3}x^4 - x^3 + \bar{2}x^2 + x - \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (b) $x^5 + x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$
- (c) $x^5 + x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{2}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$
- (d) $x^5 + x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (e) $x^5 + x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{4} \in \mathbb{Z}_5[x]$

18. feladat Döntse el, hogy testek-e a megadott faktorgyűrűk, és határozza meg elemeik számát.

- (a) $\mathbb{Z}_2[x] / (x^3 + x^2 + 1)$
- (b) $\mathbb{Z}_5[x] / (x^2 + 1)$
- (c) $\mathbb{Z}_5[x] / (x^3 + 2)$
- (d) $\mathbb{Z}_3[x] / (x^2 + 1)$
- (e) $\mathbb{Z}_3[x] / (x^3 + x^2 + 1)$

19. feladat Számítsa ki a véges testek megadott elemeit.

- (a) $\mathbb{Z}_2[x] / (x^3 + x + 1)$ -ben $\bar{x}^{-1} = ?$, $\overline{x^2}^{-1} = ?$
- (b) $\mathbb{Z}_3[x] / (x^3 - x + 1)$ -ben $\overline{2x^2 + 1}^{-1} = ?$, $\overline{x/x + 1} = ?$
- (c) $\mathbb{Z}_5[x] / (x^3 + x + 2)$ -ben $\overline{x^2 + 1}^{-1} = ?$, $\overline{4x + 3/x^2} = ?$
- (d) $\mathbb{Z}_7[x] / (x^3 + x + 1)$ -ben $\overline{2x}^{-1} = ?$, $\overline{x/2x + 2} = ?$
- (e) $\mathbb{Z}_5[x] / (x^3 + x^2 + 2)$ -ben $\overline{x + 1}^{-1} = ?$, $\overline{x^2/3x + 4} = ?$

20. feladat Határozza meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását \mathbb{C} és \mathbb{R} felett.

- (a) $x^6 - 27 = 0$
- (b) $x^4 - x^2 + 1 = 0$
- (c) $x^4 + 4$
- (d) $x^7 + 7x^4 - 8x$
- (e) $x^4 + x^2 - 30$

21. feladat Keresse meg az alábbi polinomok összes racionális gyökét.

- (a) $2x^5 + 3x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 8x - 12$
- (b) $x^6 + x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 8$
- (c) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$
- (d) $x^6 - x^5 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2$
- (e) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$

22. feladat Határozza meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását \mathbb{Q} felett.

- (a) $2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12$
- (b) $3x^{100} - 10x^{50} + 100x - 50$
- (c) $3x^6 + 2x^5 - 7x^4 + 2$
- (d) $5x^8 - 5x^7 + 4x^2 - 2x - 2$
- (e) $x^7 - 4x^6 + 4x^5 + 9x^4 - 36x^3 + 39x^2 - 12x + 12$

23. feladat A derivált vizsgálatával határozza meg az alábbi polinomok többszörös gyökeit, majd az összes gyöküket (multiplicitással együtt). Az $\text{luko}(f, f')$ és $f/\text{luko}(f, f')$ polinomok kiszámításához használhat számológépet.

- (a) $x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$
- (b) $3x^4 - 4x^3 + 1$
- (c) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$
- (d) $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$
- (e) $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$

24. feladat Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A választ minden esetben indokolni kell!

- (a) Ha egy legalább elsőfokú polinom irreducibilis, akkor nincsen gyöke.
- (b) Tetszőleges p prímszám esetén minden $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ leképezéshez létezik olyan $\mathbb{Z}_p[x]$ -beli polinom, amelynek éppen f a polinomfüggvénye.
- (c) Bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ számokra létezik olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ másodfokú polinom, melyre $f(0) = a$, $f(1) = b$ és $f(2) = c$.
- (d) Ha egy \mathbb{C} feletti polinom irreducibilis, akkor van gyöke.
- (e) Ha egy polinom relatív prím a deriváltjához, akkor nincsen többszörös gyöke.

25. feladat Döntse el, hogy a műveletábrázat által meghatározott \mathbb{A} grupoid izomorf-e a \mathbb{B} grupoiddal.

	\cdot	u	v	x	y	
	u	y	u	v	x	
(a)	v	u	v	x	y	$\mathbb{B} = (\mathcal{P}(\{a, b\}); \cup)$
	x	v	x	y	u	
	y	x	y	u	v	

	\cdot	u	v	x	y	
	u	y	u	v	x	
(b)	v	u	v	x	y	$\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; +)$
	x	v	x	y	u	
	y	x	y	u	v	

	$*$	a	b	c	d	
	a	a	b	c	d	
(c)	b	b	a	d	c	$\mathbb{B} = (\{1, i, -1, -i\}; \cdot)$
	c	c	d	a	b	
	d	d	c	b	a	

	\circ	α	β	γ	δ	
	α	δ	β	α	γ	
(d)	β	β	β	β	β	$\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_5^*; \cdot)$
	γ	α	β	γ	δ	
	δ	γ	β	δ	δ	

*	a	b	c	d	$\mathbb{B} = (\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}; \cdot)$
a	a	b	c	d	
(e) b	b	a	d	c	
c	c	d	a	b	
d	d	c	b	a	

26. feladat Döntse el, hogy az alábbi halmazok grupoidot, félcsoportot, csoportot alkotnak-e a megadott művelettel.

- (a) $(\mathcal{P}(\{a, b\}); \Delta)$, $(\mathbb{Z}_5^*; +)$
- (b) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +)$, $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; \cdot)$
- (c) $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}; \cdot)$
- (d) $(\mathcal{P}(\{a, b\}); \cap)$
- (e) $(\mathbb{R}^4; +)$

27. feladat Adja meg az alábbi S_7 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként.

- (a) $((1342)(237))^{126}(3476)^{-1}$
- (b) $((13)(15)(276))^{-10}(125)(63)$
- (c) $(345)((7451)^{-1}(4256))^{83}$
- (d) $((124)^{35}(134))^{-4}(27)$
- (e) $((1247)^{-6}(154)^{103})^{-100}$

28. feladat Számítsa ki D_{15} -ben az alábbi elemeket. Az eredményt a^k vagy $a^k t$ ($k = 0, 1, \dots, 14$) alakban adja meg.

- (a) a^{154} , $a^7 t \cdot a^{12} t$
- (b) $a^{23} t \cdot a^{18}$, $(at \cdot a^{-5} t)^{-3}$
- (c) $a^{10} t \cdot a^8 t$
- (d) $(a^{-1} t a)^4$
- (e) $(a^{10} t)^3$

29. feladat Oldja meg D_{15} -ben az alábbi egyenleteket. Az eredményt a^k vagy $a^k t$ ($k = 0, 1, \dots, 14$) alakban adja meg.

- (a) $x \cdot t a^3 = a$, $a^4 t \cdot x \cdot a = t a^9$
- (b) $t a^7 \cdot x \cdot a^2 t = a^{23} t$
- (c) $t a^5 \cdot x \cdot a^2 = t$
- (d) $t \cdot x \cdot t a^5 = (t a)^2$
- (e) $t a^3 \cdot x = a$

30. feladat Határozza meg az alábbi csoportokban a megadott elemek rendjét.

- (a) $i \in \mathbb{C}^*$, $\bar{2} \in \mathbb{Z}_5^*$
- (b) $(134)(52) \in S_5$
- (c) $(1245)(234) \in S_5$
- (d) $\bar{5} \in \mathbb{Z}_9^*$
- (e) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \in \mathbb{C}^*$

31. feladat Adjon meg a megadott csoportban n -edrendű elemet, amennyiben lehetséges.

- (a) (\mathbb{C}^*, \cdot) , $n = 12$; (\mathbb{Z}_8^*, \cdot) , $n = 5$; D_6 , $n = 3$
- (b) S_6 , $n = 6$
- (c) S_3 , $n = 4$
- (d) D_8 , $n = 4$
- (e) \mathbb{Z}_{12} , $n = 3$

32. feladat Döntse el, hogy a G csoportban részcsoporthoz alkot-e a megadott H részhalmaz.

- (a) $G = S_4$, $H = \{\text{id}, (13), (24), (13)(24)\}$; $G = D_6$, $H = \{\text{id}, t, a^2, a^2 t\}$
- (b) $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $H = (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$
- (c) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = \mathbb{N}$
- (d) $G = S_5$, $H = \{\text{id}, (135), (153)\}$
- (e) $G = (\mathbb{Z}_6, +)$, $H = \mathbb{Z}_6^*$

33. feladat Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A választ minden esetben indokolni kell!

- (a) Minden páratlan rendű permutáció páros.
- (b) Az S_4 csoportban pontosan 6 másodrendű elem van.
- (c) Tetszőleges G csoport minden H, K részcsoporthoz $H \cup K \leq G$.
- (d) Minden páros permutáció rendje páros páratlan.
- (e) Tetszőleges csoport tetszőleges a, b, x, y elemeire $axb = ayb \implies x = y$

34. feladat Határozza meg a G csoportban a B részhalmaz által generált részcsoportot.

- (a) $G = \mathbb{Z}$, $B = \{30, 42, 105\}$; $G = D_{12}$, $B = \{a^3, a^2t\}$
- (b) $G = \mathbb{Z}_{30}$, $B = \{\bar{6}, \bar{10}\}$; $G = S_4$, $B = \{(1234), (13)\}$
- (c) $G = \mathbb{Z}_{31}$, $B = \{\bar{6}, \bar{10}\}$
- (d) $G = \mathbb{C}^*$, $B = \left\{i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- (e) $G = D_{10}$, $B = \{a^4, a^5t\}$

35. feladat Melyek izomorfak az alábbi csoportok közül? (A választ minden esetben indokolni kell!)

- (a) \mathbb{Z}_2^3 , \mathbb{Z}_{20}^* , $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$, Q
- (b) D_6 , A_4 , \mathbb{Z}_{13}^* , \mathbb{Z}_{12}
- (c) D_3 , S_3 , \mathbb{Z}_7^* , \mathbb{Z}_9^*
- (d) \mathbb{Z}_5^* , \mathbb{Z}_8^* , \mathbb{Z}_{10}^* , \mathbb{Z}_{12}^*
- (e) D_4 , Q , \mathbb{Z}_{15}^* , E_8

36. feladat Számítsa ki az alábbi csoportokban az egyes elemek generátumait (azaz a ciklikus részcsoportokat), majd határozza meg az összes részcsoportot, végül rajzolja fel a részcsoportháló Hasse-diagramját.

- (a) \mathbb{Z}_{12} , \mathbb{Z}_{21}^*
- (b) D_4
- (c) \mathbb{Z}_{15}^*
- (d) Q
- (e) S_3

37. feladat Számítsa ki az alábbi hatványok maradékait a megadott modulusra nézve.

- (a) $2014^{2014} \equiv ? \pmod{7}$
- (b) $27^{159} \equiv ? \pmod{40}$
- (c) $4447^{2018} \equiv ? \pmod{44}$
- (d) $303^{4039} \equiv ? \pmod{100}$
- (e) $2019^{2019} \equiv ? \pmod{11}$

38. feladat Keressen primitív gyököt az m modulusra nézve.

- (a) $m = 26$
- (b) $m = 35$
- (c) $m = 17$
- (d) $m = 22$
- (e) $m = 19$

39. feladat Készítsen indextáblázatot, és oldja meg a segítségével a kongruenciát.

- (a) $x^9 \equiv 8 \pmod{13}$
- (b) $11x^8 \equiv 5 \pmod{13}$
- (c) $3x^4 \equiv 4 \pmod{11}$
- (d) $5x^6 \equiv 3 \pmod{11}$
- (e) $10x^5 \equiv 1 \pmod{11}$