$\varphi(360)$ kiszámítása

Mivel 360 prímfelbontása $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, az univerzum és a „szitálandó" halmazok ebben az esetben a következők lesznek:

$$U = \{1, 2, \ldots, 360\}, \quad A_1 = \{a \in U : 2 \mid a\}, \quad A_2 = \{a \in U : 3 \mid a\}, \quad A_3 = \{a \in U : 5 \mid a\}.$$

Minden második szám osztható 2-vel, minden harmadik szám osztható 3-mal, és minden ötödik szám osztható 5-tel, ezért a fenti halmazok elemszáma

$$|U| = 360, \quad |A_1| = \frac{360}{2} = 180, \quad |A_2| = \frac{360}{3} = 120, \quad |A_3| = \frac{360}{5} = 72.$$

Pontosan azok a számok relatív prímek 360-hoz, amelyek se 2-vel, se 3-mal, se 5-tel nem oszthatóak, tehát $\varphi(360) = \left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right|$. Erre a szita-formula a következőképpen fest:

$$\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right| = |U| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Ki kell tehát számítanunk a halmazok páronkénti metszeteinek, valamint a három halmaz metszetének elemszámát. Lévén 2 és 3 relatív prím, $A_1 \cap A_2$ pontosan azokat az U-beli számokat tartalmazza, amelyek 6-tal oszthatóak, ilyenből pedig $\frac{360}{6} = 60$ van. Hasonló meggondolással kapjuk az $A_1 \cap A_3, A_2 \cap A_3$ és az $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ halmazokat illetve elemszámukat:

$$A_1 \cap A_2 = \{a \in U : 2 \mid a \text{ és } 3 \mid a\} = \{a \in U : 6 \mid a\}, \qquad |A_1 \cap A_2| = \tfrac{360}{6} = 60;$$

$$A_1 \cap A_3 = \{a \in U : 2 \mid a \text{ és } 5 \mid a\} = \{a \in U : 10 \mid a\}, \qquad |A_1 \cap A_3| = \tfrac{360}{10} = 36;$$

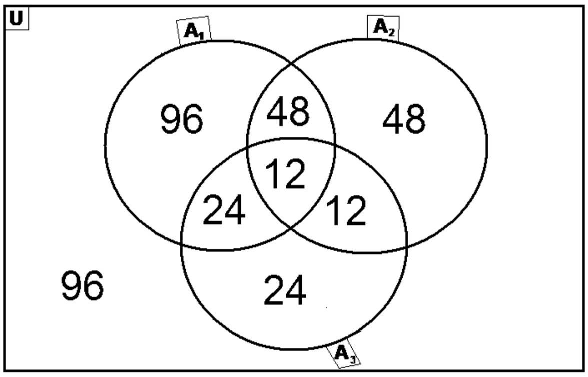
$$A_2 \cap A_3 = \{a \in U : 3 \mid a \text{ és } 5 \mid a\} = \{a \in U : 15 \mid a\}, \qquad |A_2 \cap A_3| = \tfrac{360}{15} = 24;$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{a \in U : 2 \mid a \text{ és } 3 \mid a \text{ és } 5 \mid a\} = \{a \in U : 30 \mid a\}, \qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \tfrac{360}{30} = 12.$$

Mindezeket behelyettesítve a szita-formulába, megkapjuk $\varphi(360)$ értékét:

$$\varphi(360) = 360 - 180 - 120 - 72 + 60 + 36 + 24 - 12 = 96.$$

Számításainkat ellenőrizhetjük az alábbi Venn-diagramon. (Figyelem, a diagramon kettő 96-os is van! Melyik az „igazi"?)



Ha nem számolunk ki mindent, akkor megfigyelhetjük, hogyan alakul ki a $\varphi(n)$-re vonatkozó formula ebben a speciális esetben:

$$\begin{aligned}\varphi(360) &= 360 - \frac{360}{2} - \frac{360}{3} - \frac{360}{5} + \frac{360}{2\cdot 3} + \frac{360}{2\cdot 5} + \frac{360}{3\cdot 5} - \frac{360}{2\cdot 3\cdot 5} = \\ &= 360 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}\right) = \\ &= 360 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right).\end{aligned}$$

A legutolsó lépés, a szorzattá alakítás, egy kicsit trükkösnek tűnhet. Könnyebb követni, ha jobbról balra olvassuk: az $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right)$ szorzatban bontsuk fel a zárójeleket (szorozzunk össze „mindenkit mindenkivel"), és figyeljük meg, hogy valóban a középső sorban álló kifejezést kapjuk. Ha ez már stimmel, akkor gondolkodjunk el azon, hogy hogyan fest az $\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ szorzat hasonló kifejtése. (Hány tagja lesz, és hogy néz ki egy tipikus tag?)