ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

szorgalmi feladatok

2016 őszi félév, BSc

Komplex számok

1. feladat Határozza meg az $5+12i$ komplex szám négyzetgyökeit kanonikus alakban.

2. feladat Oldja meg az $(1-2i)\,x^2+(3+i)\,x+i=0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

3. feladat Oldja meg az $i\bar{z}=z^2$ egyenletet a komplex számok halmazán.

4. feladat Ábrázolja a komplex számsíkon a $\left\{z^2 :\ \operatorname{Re} z=1\right\}$ halmazt.

5. feladat Ábrázolja a komplex számsíkon a $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\lambda$ egyenlőséget kielégítő z komplex számok halmazát.

6. feladat Mekkora szöget zárnak be egymással az origót a $(2,1)$ és az $(1,3)$ ponttal összekötő szakaszok?

7. feladat Bizonyítsa be, hogy $\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arctg} 2+\operatorname{arctg} 3=\pi$.

8. feladat Mutassa meg, hogy $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$.

9. feladat Rajzoljunk az ABC háromszög AC oldalára kifelé egy négyzetet; ennek A-val szomszédos csúcsai legyenek C és D. Hasonlóképpen, a BC oldalra rajzolt négyzet B-vel szomszédos csúcsai C és E. Mutassa meg, hogy ha a háromszög C csúcsát mozogatjuk (de az AB oldal fix), akkor a DE szakasz felezőpontja helyben marad.

10. feladat Rajzoljunk egy tetszőleges háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket. Bizonyítsa be, hogy ezen háromszögek középpontjai által meghatározott háromszög szabályos.

11. feladat Rajzoljunk egy tetszőleges négyszög oldalaira kifelé négyzeteket. Bizonyítsa be, hogy a szemközti oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait összekötő szakaszok egyenlő hosszúak és egymásra merőlegesek.

12. feladat Bizonyítsa be, hogy nem létezik szabályos rácsháromszög.

13. feladat Igazolja, hogy az $x,y,z\in\mathbb{C}$ komplex számok által meghatározott háromszög akkor és csak akkor szabályos, ha $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$.

14. feladat Fejezze ki $\cos(2016x)$-et $\cos x$ és $\sin x$ segítségével.

15. feladat Adjon zárt formulát a $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$ összegre.

16. feladat Mutassa meg, hogy $\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\cdots=\sqrt{2}^n\sin\frac{n\pi}{4}$. (Útmutatás: Számítsa ki az $(1+i)^n$ hatványt kétféleképpen.)

17. feladat Hogyan bolyong a komplex számsíkon a z^n sorozat, amint n tart végtelenbe? (A válasz persze z-től függ.)

18. feladat Oldja meg az $\left|z^3+2-2i\right|+z\bar{z}\,|z|=2\sqrt{2}$ egyenletet a komplex számok halmazán.

19. feladat Mikor lehet ε és $\varepsilon+1$ is egységgyök?

20. feladat Határozza meg $\sin 72°$ értékét. (Útmutatás: Tekintsük a $z=\operatorname{cis} 72°$ komplex számot. Ez ötödik egységgyök, így gyöke az $\frac{x^5-1}{x-1}=x^4+x^3+x^2+x+1$ polinomnak.)

21. feladat Mennyi az n-edik egységgyökök k-adik hatványainak összege?

22. feladat Határozza meg az n-edik egységgyökök szorzatát.

23. feladat Határozza meg mindazokat a komplex számokat, amelyek hetvenhatodik és századik egységgyökök is.

Gyűrűk és testek

24. feladat Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e a $\mathbb{Z}[\omega]=\{a+b\omega : a,b\in\mathbb{Z}\}$ halmaz (a szokásos összeadással és szorzással), ahol $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$?

25. feladat Legyen $\xi\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$ egy gyöke az x^2+px+q polinomnak, ahol p és q egész számok. Mutassa meg, hogy ekkor a $\mathbb{Z}[\xi]=\{a+b\xi : a,b\in\mathbb{Z}\}$ halmaz integritástartományt alkot a szokásos összeadással és szorzással.

26. feladat Határozza meg a $8+i$ és $4-2i$ Gauss-egészek legnagyobb közös osztóját.

27. feladat Jelölje $\mathcal{P}(U)$ az U halmaz hatványhalmazát, azaz U összes részhalmazainak halmazát. Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e a $\mathcal{P}(U)$ halmaz a szimmetrikus differencia és a metszés műveletével? (A válasz függ U elemszámától!)

28. feladat A *duális számokat* a komplex számokhoz hasonlóan definiáljuk, de itt a „képzetes egység” négyzete nem -1, hanem 0. Tehát $\mathbb{D} = \{a + b\varepsilon \colon a, b \in \mathbb{R}\}$, ahol ε egy olyan szimbólum, amelyre $\varepsilon^2 = 0$. (Mi lehet ennek az értelme? Miért pont ε-t használunk?) Mutassa meg, hogy a duális számok (a természetes módon definiált összeadással és szorzással) kommutatív egységelemes gyűrűt alkotnak. Határozza meg a $\mathbb{D}$ gyűrű zérusosztóit és egységeit.

29. feladat Határozza meg a $\mathbb{Z}[\omega]$ gyűrű egységeit (lásd a 24. feladatot).

30. feladat Keressen egy ± 1-től különböző egységet a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ gyűrűben, majd ennek segítségével konstruáljon meg végtelen sok egységet.

31. feladat Határozza meg a véges tizedestörtek gyűrűjének egységeit.

32. feladat Definiáljunk egy újfajta összeadást és egy újfajta szorzást a valós számok halmazán: legyen $a \oplus b = a + b - 1$ és $a \odot b = a + b - ab$. Igazolja, hogy az $(\mathbb{R}; \oplus, \odot)$ struktúra test.

33. feladat Bizonyítsa be, hogy az $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ alakú valós mátrixok testet alkotnak a szokásos mátrixműveletekkel.

34. feladat Definiáljunk egy újfajta „összeadást” a pozitív valós számok halmazán: legyen $a \oplus b = a \cdot b$. Adjon meg olyan $\odot$ „szorzást”, amelyre $(\mathbb{R}^+; \oplus, \odot)$ test.

35. feladat Bizonyítsa be, hogy minden véges integritástartomány test.

36. feladat Adjon meg olyan összeadást és szorzást a $T = \{0, 1, a, b\}$ halmazon, amellyel $(T; +, \cdot)$ test.

37. feladat Mennyi lehet egy véges test összes elemének összege?

Test feletti egyhatározatlanú polinomok

38. feladat Számítsa ki az $\left(x - \overline{1}\right)\left(x - \overline{2}\right) \cdots \left(x - \overline{p-1}\right) \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomban x^{p-1}, x^{p-2}, x^{p-3} és x^0 együtthatóját, ahol $p \geq 5$ prímszám.

39. feladat Oldja meg az $\left(x^3 + x^2\right) u + \left(x^3 + x^2 + x\right) v + \left(x^3 + \overline{1}\right) w = \overline{1}$ egyenletet a $\mathbb{Z}_2[x]$ polinomgyűrűben.

40. feladat Határozza meg $x^{100} - 1$ és $x^{44} - 1$ legnagyobb közös osztóját. Hogyan lehetne általánosítani a feladatot?

41. feladat Mely p prímszámok esetén létezik multiplikatív inverze az $x - \overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomnak modulo $x^3 + x + \overline{1}$? Számítsa is ki a multiplikatív inverzet, amikor létezik.

42. feladat Bézout tételének segítségével vizsgálja meg, hogy teljesül-e a $g \mid f$ oszthatóság a $g = x^2 - 1$ és $f = x^{17} - x^{16} + x^{15} - x^{14} + x^7 - x^3 + x - 1$ polinomokra a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$, illetve $\mathbb{Z}_7$ testek fölött.

43. feladat Mely n pozitív egészekre osztható az $x^{2n} + x^n + 1$ polinom az $x^2 + x + 1$ polinommal? (Útmutatás: használjuk Bézout tételét.)

44. feladat Az a valós paraméter mely értékeire lesz az 1 kétszeres gyöke az $x^5 + 3ax^4 - 4ax^3 - 5x + 1$ polinomnak?

45. feladat Legyen f a $\left(k, (-1)^k\right)$, $k = 0, \ldots, 9$ pontokra illesztett interpolációs polinom. Mennyi $f(10)$ értéke?

46. feladat Legyenek $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ az n-edik egységgyökök, és legyen $f \in \mathbb{C}[x]$ az $(\varepsilon_0, y_0), (\varepsilon_1, y_1), \ldots, (\varepsilon_{n-1}, y_{n-1})$ pontokra illesztett Lagrange-féle interpolációs polinom. Igazolja, hogy $f(0)$ éppen az $y_0, \ldots, y_{n-1}$ számok átlaga.

47. feladat A $(0, a_0), (1, a_1), (2, a_2)$ pontokra akkor és csak akkor illeszthető egyenes, ha $a_0 - 2a_1 + a_2 = 0$ (ugye?). Mutassa meg, hogy a $(0, a_0), (1, a_1), (2, a_2), (3, a_3)$ pontokra akkor és csak akkor illeszthető parabola (amely elfajuló esetben lehet egyenes is), ha $a_0 - 3a_1 + 3a_2 - a_3 = 0$.

48. feladat Az előző feladat általánosításaként bizonyítsa be, hogy a $(0, a_0), (1, a_1), \ldots, (n+1, a_{n+1})$ pontok akkor és csak akkor illeszkednek egy legfeljebb n-edfokú polinomfüggvény grafikonjára, ha

$$\binom{n+1}{0} a_0 - \binom{n+1}{1} a_1 + \binom{n+1}{2} a_2 + \cdots + (-1)^k \binom{n+1}{k} a_k + \cdots + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} a_{n+1} = 0.$$

49. feladat Mutassa meg, hogy egy $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom akkor és csak akkor vesz fel egész értéket minden egész helyen, ha előáll $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-(k-1))}{k!}$ alakú polinomok egész együtthatós lineáris kombinációjaként.

50. feladat Adja meg az $x^5 + \overline{6}x^4 + x^3 + \overline{6}x^2 + \overline{2}x + \overline{5} \in \mathbb{Z}_7[x]$ polinom irreducibilis felbontását.

51. feladat Hány másodfokú irreducibilis polinom van $\mathbb{Z}_p[x]$-ben?

52. feladat Adja meg az $x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom irreducibilis felbontását tetszőleges p prímszám esetén.

53. feladat Adja meg az $x^5 + x^3 + ax^2 + a \in T[x]$ polinom irreducibilis felbontását, ahol $T = \{0, 1, a, b\}$ a négyelemű test.

54. feladat Határozza meg a 121-elemű test összes elemének összegét.

55. feladat Határozza meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $x^2 + \overline{1} \mid x^{2008} - \overline{23}x^{1922} + \overline{13}x^{600} + \overline{8}$ teljesül a $\mathbb{Z}_p[x]$ polinomgyűrűben. (Útmutatás: használjuk Bézout tételét vagy magában a $\mathbb{Z}_p$ testben, vagy annak egy alkalmas bővítésében.)

56. feladat Képzelje el (de ne írja fel!) az $x^{1973} - 1997$ polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{R}$ felett. Hány tényezőt lát (a lelki szemeivel), és hányadfokúak ezek?

57. feladat Írja fel az $f = (x-1)\left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right)\left(x^4-1\right)$ és $g = (x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^3+1\right)\left(x^4+1\right)$ polinomok irreducibilis felbontását a kedvenc számteste felett, majd számítsa ki ennek segítségével f és g legnagyobb közös osztóját.

58. feladat Határozza meg az egységkörbe írt szabályos n-szög egy csúcsából kiinduló átlói hosszának szorzatát. (Itt most átlónak tekintjük az oldalakat is, tehát egy csúcsból $n-1$ átló indul ki.)

59. feladat Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg a $3x^5 + 6x^4 + 9x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ polinom gyökeinek négyzetösszegét.

60. feladat Határozza meg a λ komplex paraméter értékét úgy, hogy az $x^3 - 7x + \lambda$ polinom egyik gyöke valamelyik másik gyök kétszerese legyen.

61. feladat Adja meg az $x^p - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom irreducibilis felbontását, ahol p tetszőleges prímszám. (Útmutatás: térjünk át az $y = x - 1$ határozatlanra.)

62. feladat Adjon meg végtelen sok olyan n egész számot, melyre az $x^2 + 100x + n$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és végtelen sok olyat is, amelyre nem irreducibilis.

63. feladat Mely p prímszámok esetén van racionális gyöke az $x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 2x + p$ polinomnak?

64. feladat Bizonyítsa be, hogy tetszőleges T test és tetszőleges $a_0, \ldots, a_n \in T$, $a_0, a_n \neq 0$ elemek esetén az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ is az.

65. feladat Mutassa meg, hogy a $\left\{a + b\sqrt[3]{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ halmaz nem zárt a szorzásra.

66. feladat Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy olyan 101-edfokú polinom, amely legalább 101 egész számra ± 1 értéket vesz fel. Bizonyítsa be, hogy f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. (Útmutatás: használjuk Kronecker módszerét.)

67. feladat Bizonyítsa be, hogy az $f = x^n + ax + p$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett bármely $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, p$ prímszám, $p > |a| + 1$ esetén. (Útmutatás: Először azt mutassuk meg, hogy f minden α gyökére $|\alpha| > 1$.)

68. feladat Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy főpolinom, melynek konstans tagja nem nulla (azaz $f(0) \neq 0$). Tegyük fel, hogy f-nek egyetlen komplex gyöke van az egységkörön kívül, az összes többi gyöke pedig az egységkör belsejében helyezkedik el (a körvonalon nincs egy gyök se). Bizonyítsa be, hogy f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

69. feladat Mikor osztható egy polinom a saját deriváltjával?

70. feladat Határozza meg az a, b paraméterek értékét úgy, hogy legyen háromszoros gyöke a $3x^5 - 10x^3 + ax + b \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak.

71. feladat Mutassa meg, hogy az $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ polinomnak nincs többszörös gyöke a komplex számok testében.

72. feladat Legyenek az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom komplex gyökei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Tegyük fel, hogy a gyökök páronként különbözők, és egy konvex n-szöget alkotnak a komplex számsíkon. Bizonyítsa be, hogy f' gyökei csak ennek a sokszögnek a belsejében vagy a határán helyezkedhetnek el.

Csoportok

73. feladat Tetszőleges R kommutatív egységelemes gyűrű esetén legyen $L_R = \{x \mapsto ax + b : a \in R^*, b \in R\}$ az R feletti bijektív „lineáris” függvények halmaza. Mutassa meg, hogy L_R csoportot alkot a leképezésszorzás műveletével.

74. feladat Érvényes-e minden csoportban tetszőleges x, y elemekre az $x^2 = y^2,\ x^3 = y^3 \implies x = y$ következtetés?

75. feladat Bizonyítsa be, hogy a $(\mathbb{Q}^+; \cdot)$ és $(\mathbb{Z}[x]; +)$ csoportok izomorfak egymással.

76. feladat Hány eleme van a $\mathrm{GL}(\mathbb{Z}_p, 2)$ csoportnak?

77. feladat Hány eleme van a kocka mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának?

78. feladat Oldja meg S_6-ban a $\pi^2 = (1\ 2)$, illetve a $\pi^2 = (1\ 2\ 3)$ egyenleteket.

79. feladat A páronként idegen ciklusokra bontott alak segítségével adjon meg szükséges és elegendő feltételt arra, hogy egy permutáció előálljon valamely permutáció négyzeteként (azaz második hatványaként).

80. feladat Milyen a ciklusszerkezete egy n hosszúságú ciklus k-adik hatványának?

81. feladat Bizonyítsa be, hogy S_n minden permutációja felírható legfeljebb $n-1$ transzpozíció szorzataként.

82. feladat Igazolja, hogy egy n hosszúságú ciklus nem írható fel $n-1$-nél kevesebb transzpozíció szorzataként.

83. feladat Igazolja, hogy ha egy csoportban az a és b véges rendű elemek felcserélhetőek, akkor $o(ab) \mid \mathrm{lkkt}(o(a), o(b))$.

84. feladat Határozza meg az $L_{\mathbb{R}}$ csoport véges rendű elemeit (lásd a 73. feladatot).

85. feladat Adjon meg olyan végtelen csoportot, amelynek minden eleme véges rendű, valamint olyan végtelen csoportot, melyben csak véges sok véges rendű elem van. Van-e olyan csoport, amelynek véges sok végtelen rendű eleme van?

86. feladat Igazolja, hogy ha egy csoportban az egységelemtől különböző összes elem rendje ugyanaz, akkor az végtelen vagy prímszám.

87. feladat Igazolja, hogy ha egy csoport minden elemének rendje legfeljebb 2, akkor a csoport kommutatív.

88. feladat Mutassa meg, hogy ha egy véges csoport elemszáma páros, akkor a csoportban van másodrendű elem.

89. feladat Mutassa meg, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ esetén van olyan csoport és abban két olyan másodrendű elem, amelyek szorzatának rendje k.

90. feladat Mutassa meg, hogy minden Abel-csoport legfeljebb másodrendű elemeinek halmaza részcsoportot alkot. Adjon példát olyan Abel-csoportra, melyben a legfeljebb harmadrendű elemek nem alkotnak részcsoportot.

91. feladat Igazolja, hogy S_n minden részcsoportjában vagy minden permutáció páros, vagy a permutációknak pontosan a fele páros.

92. feladat Mutassa meg, hogy tetszőleges p prímszám esetén a $\mathbb{C}^*$ csoportban részcsoportot alkot a következő halmaz: $E_{p^\infty} = \{\, u \in \mathbb{C}^* : \text{van olyan } k \in \mathbb{N}_0, \text{ amelyre } u^{p^k} = 1 \,\}$.

93. feladat Bizonyítsa be, hogy az E_{p^∞} csoport minden valódi részcsoportja ciklikus (lásd a 92. feladatot).

94. feladat Jelölje D_∞ a $\cdots$ TTTTTTTTTTTTT $\cdots$ alakzat szimmetriacsoportját. Mutassa meg, hogy $D_\infty \cong L_{\mathbb{Z}}$, továbbá ez a csoport izomorf az $\begin{pmatrix} \varepsilon & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alakú mátrixok csoportjával, ahol $\varepsilon \in \{1, -1\}$ és $k \in \mathbb{Z}$ (lásd a 73. feladatot).

95. feladat Igazolja, hogy egy csoport akkor és csak akkor véges, ha véges sok részcsoportja van.

96. feladat Igazolja, hogy az S_n csoportot generálják az $(1\ 2)$ és $(1\ 2\ \ldots\ n)$ permutációk.

97. feladat Igazolja, hogy az A_n csoportot generálják az összes 3 hosszúságú ciklusok.

98. feladat Adjon meg $1, 2$, illetve 3 elemű *minimális* generátorrendszert a $\mathbb{Z}_{18}$, illetve az S_3 csoportban (ha létezik).

99. feladat Mutassa meg, hogy ha egy G csoport nem Abel-féle, de minden valódi részcsoportja Abel-féle, akkor G-nek van kételemű generátorrendszere.

100. feladat Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{Q}$ csoport minden végesen generált részcsoportja ciklikus, és adjon meg olyan valódi részcsoportját, amely nem ciklikus.

Hatványozás modulo m

101. feladat Mennyit ad 53-mal osztva maradékul $80^{\left(111^{50}\right)}$?

102. feladat Mennyit ad héttel osztva maradékul $111\ldots111$ (99 egyes)?

103. feladat Bizonyítsa be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az n, n^8-1, n^8+1 számok valamelyike osztható 17-tel.

104. feladat Mutassa meg, hogy ha $(a, 100) = 1$, akkor $a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$ teljesül. Hasonlítsa össze ezt az állítást az Euler-Fermat–tétellel.

105. feladat Igazolja, hogy $a^{561} \equiv a \pmod{561}$ bármely a egész számra.

106. feladat Bizonyítsa be, hogy ha n nem osztható se 2-vel se 5-tel, akkor van $99\cdots99$ alakú többszöröse.

107. feladat Legyen p és q két különböző prímszám. Mutassa meg, hogy $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

108. feladat Igazolja, hogy bármely p páratlan prímszámra $2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$.

109. feladat Legyen p páratlan prímszám. Lehetséges-e, hogy két modulo p primitív gyök szorzata is primitív gyök?