ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

házi feladatok

2016 őszi félév, BSc

1. feladat Számítsa ki az alábbi komplex számokat kanonikus alakban.

(a) $\frac{2+3i}{1+4i} = ?$

(b) $u\overline{v} + \overline{u}v = ?$, $\frac{\overline{u}}{v} + \frac{u}{\overline{v}} = ?$, $|uv| = ?$, $\left|\frac{u}{v}\right| = ?$, ahol $u = 2 - 3i$ és $v = 1 + i$

(c) $\left(\frac{-1+i}{2+i}\right)^2 - \left(\frac{-1-i}{2-i}\right)^2 = ?$

(d) $\left(\overline{2+5i}\right)^2 + \overline{(2+5i)^2} = ?$

(e) $\left(\overline{-6+9i} + 4 - 8i\right) \cdot i = ?$

2. feladat Ábrázolja a Gauss-féle számsíkon az alábbi számhalmazokat.

(a) $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}(\overline{z} - i) > 1\}$, $\{z \in \mathbb{C}\colon |iz - i| = 1\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C}\colon |\overline{z} + 2 - i| \leq 2\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C}\colon |\overline{z} - i| = 1\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C}\colon 0 \leq \operatorname{Re}(z + 3) < 1\}$

(e) $\{z \in \mathbb{C}\colon |iz - 1 - i| > 1\}$

3. feladat Számítsa ki trigonometrikus és kanonikus alakban is.

(a) $\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = ?$

(b) $\frac{(-1-i)(\sqrt{3}+i)}{(-1+i)(-\sqrt{3}+i)} = ?$

(c) $(-1-i)(\sqrt{3}+i) = ?$

(d) $(\sqrt{3}-i)(2+2\sqrt{3}i) = ?$

(e) $\frac{1-i}{1+i} = ?$

4. feladat Ábrázolja a Gauss-féle számsíkon az alábbi számhalmazokat.

(a) $\left\{z \in \mathbb{C}\colon 0 \leq \arg(zi) < \frac{\pi}{3}\right\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C}\colon \arg(z + zi) = \pi\}$

(c) $\left\{z \in \mathbb{C}\colon \frac{\pi}{6} \leq \arg(\overline{z}) < \frac{\pi}{4}\right\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C}\colon \arg(\overline{z}) = \pi/6\}$

(e) $\left\{z \in \mathbb{C}\colon \arg\left(z^2\right) = \pi/2\right\}$

5. feladat Számítsa ki a hatványokat trigonometrikus alakban, majd adja meg a végeredményt kanonikus alakban is.

(a) $(-1+i)^{2422} = ?$

(b) $(\sqrt{3}+i)^{1208} = ?$

(c) $(2+2\sqrt{3}i)^{605} = ?$

(d) $(1+i)^{1222} = ?$

(e) $(-3-3\sqrt{3}i)^{1526} = ?$

6. feladat Számítsa ki a gyök összes értékét trigonometrikus alakban, majd adja meg a végeredményt kanonikus alakban is.

(a) $\sqrt[3]{i} = ?$

(b) $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i} = ?$

(c) $\sqrt[6]{64} = ?$

(d) $\sqrt[4]{-16} = ?$

(e) $\sqrt[3]{-8} = ?$

7. feladat Egységgyökök-e a következő komplex számok, és ha igen, akkor hányadik egységgyökök?

(a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\operatorname{cis}\frac{5\pi}{12}$

(b) $\operatorname{cis}\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(c) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

(d) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

(e) $\operatorname{cis}\frac{6\pi}{7}$

8. feladat Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A választ minden esetben indokolni kell!

(a) Van olyan z komplex szám, amelyre $\operatorname{Re} z = 1$ és $|z - i| = 3$.

(b) Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $\sqrt[n]{z}$ értékei között van valós szám, akkor z is valós.

(c) Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha z^2 harmadik egységgyök, akkor z is harmadik egységgyök.

(d) Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ esetén $|z + w| = |z| + |w|$.

(e) Van olyan z komplex szám, amelyre $\operatorname{Re} z = 2$ és $|z| = 1$.

9. feladat Döntse el, hogy gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkotnak-e az alábbi számhalmazok a szokásos összeadás és szorzás műveletével.

(a) $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$
(b) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}$ és a is és b is páros$\}$
(c) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$
(d) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}$ és a páros$\}$
(e) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}$ és b páros$\}$

10. feladat Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A választ minden esetben indokolni kell!

(a) Létezik olyan gyűrű, ami egységelemes, de nem kommutatív és nem zérusosztómentes.
(b) Létezik olyan integritástartomány, amelyben pontosan tizenhat egység van.
(c) Az egységek minden gyűrűben csoportot alkotnak az összeadás műveletével.
(d) Létezik olyan gyűrű, ami kommutatív és egységelemes, de nem integritástartomány.
(e) Létezik olyan integritástartomány, amelyben csak véges sok egység van.

11. feladat Számítsa ki az f és g polinomok legnagyobb közös osztóját.

(a) $f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3,\ g = x^3 + x^2 + x - 3 \in \mathbb{R}[x]$
(b) $f = x^4 + x^3 + x,\ g = x^4 + x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$
(c) $f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2,\ g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 \in \mathbb{R}[x]$
(d) $f = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3,\ g = x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6 \in \mathbb{Q}[x]$
(e) $f = x^4 + x^3 + x^2 + \overline{1},\ g = x^3 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$

12. feladat Oldja meg az $fu + gv = \operatorname{lnko}(f, g)$ egyenletet.

(a) $f = x^6 + \overline{6},\ g = x^4 + \overline{5}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_7[x]$
(b) $f = x^8 - 3x + 2,\ g = x^6 - x^5 + 3x - 2 \in \mathbb{R}[x]$
(c) $f = x^5 + x + \overline{2},\ g = x^4 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$
(d) $f = x^4 + x^3 + x + \overline{1},\ g = x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
(e) $f = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 1,\ g = x^3 + 4x^2 + 4x + 3 \in \mathbb{R}[x]$

13. feladat Oldja meg az $f \cdot u \equiv \overline{1} \pmod{m}$ konruenciát.

(a) $f = x^2 + \overline{3}x + \overline{1},\ m = x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{4}x + \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$
(b) $f = x^2 + \overline{1},\ m = x^3 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$
(c) $f = \overline{3}x^2 + \overline{2},\ m = x^3 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
(d) $f = \overline{2}x^2 + \overline{4},\ m = x^3 + x^2 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
(e) $f = x^2,\ m = x^3 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$

14. feladat A Horner-módszer segítségével határozza meg az f polinom c gyökének multiplicitását.

(a) $f = x^3 - 4x^2 + 5x - 2,\ c = 1$
(b) $f = x^6 + 4x^5 + 7x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 1,\ c = -1$
(c) $f = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8,\ c = 2$
(d) $f = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16,\ c = -2$
(e) $f = x^3 + x^2 + x + 1,\ c = i$

15. feladat Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A választ minden esetben indokolni kell!

(a) Minden $f, g \in \mathbb{Z}_3[x]$ esetén, ha $f \mid g$ és $g \mid f$, akkor $f = g$.
(b) Létezik olyan $f \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinom, amelynek végtelen sok osztója van.
(c) Minden $f, g \in \mathbb{Z}_2[x]$ esetén, ha $f \mid g$ és $g \mid f$, akkor $f = g$.
(d) Léteznek olyan $f \neq g \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomok, melyekre minden $c \in \mathbb{Z}_3$ esetén $f(c) = g(c)$.
(e) Létezik olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom, amelyre $\operatorname{lnko}(f, x^3 - 1) = x + 1$.

16. feladat Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, amely a megadott helyeken a megadott értékeket veszi fel.

(a) $f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 8$
(b) $f(-1) = 6,\ f(0) = 5,\ f(1) = 0,\ f(2) = 3,\ f(3) = 2$
(c) $f(1) = 2,\ f(i) = i$
(d) $f(1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3) = 4,\ f(4) = 3$
(e) $f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ f(3) = 3,\ f(4) = 6$

17. feladat Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára a polinomokat a megadott polinomgyűrűkben.

(a) $x^6 + \overline{3}x^4 - x^3 + \overline{2}x^2 + x - \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
(b) $x^5 + x^4 + \overline{2}x^3 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$
(c) $x^5 + x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{2}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$
(d) $x^5 + x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
(e) $x^5 + x^3 + \overline{4}x^2 + \overline{4} \in \mathbb{Z}_5[x]$

18. feladat Döntse el, hogy testek-e a megadott faktorgyűrűk, és határozza meg elemeik számát.

(a) $\mathbb{Z}_2[x] \,/\, \big(x^3+x^2+1\big)$
(b) $\mathbb{Z}_5[x] \,/\, \big(x^2+1\big)$
(c) $\mathbb{Z}_5[x] \,/\, \big(x^3+2\big)$
(d) $\mathbb{Z}_3[x] \,/\, \big(x^2+1\big)$
(e) $\mathbb{Z}_3[x] \,/\, \big(x^3+x^2+1\big)$

19. feladat Számítsa ki a véges testek megadott elemeit.

(a) $\mathbb{Z}_2[x] \,/\, \big(x^3+x+1\big)$-ben $\overline{x}^{-1} =?$, $\overline{x^2}^{-1} =?$
(b) $\mathbb{Z}_3[x] \,/\, \big(x^3-x+1\big)$-ben $\overline{2x^2+1}^{-1} =?$, $\overline{x}/\overline{x+1} =?$
(c) $\mathbb{Z}_5[x] \,/\, \big(x^3+x+2\big)$-ben $\overline{x^2+1}^{-1} =?$, $\overline{4x+3}/\overline{x^2} =?$
(d) $\mathbb{Z}_7[x] \,/\, \big(x^3+x+1\big)$-ben $\overline{2x}^{-1} =?$, $\overline{x}/\overline{2x+2} =?$
(e) $\mathbb{Z}_5[x] \,/\, \big(x^3+x^2+2\big)$-ben $\overline{x+1}^{-1} =?$, $\overline{x^2}/\overline{3x+4} =?$

20. feladat Határozza meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását $\mathbb{C}$ és $\mathbb{R}$ felett.

(a) $x^6-27=0$
(b) $x^4-x^2+1=0$
(c) x^4+4
(d) x^7+7x^4-8x
(e) x^4+x^2-30

21. feladat Keresse meg az alábbi polinomok összes racionális gyökét.

(a) $2x^5+3x^4-7x^3-3x^2+8x-12$
(b) $x^6+x^5+2x^4+4x^3-4x^2+4x-8$
(c) $x^4+3x^3-3x^2-11x-6$
(d) $x^6-x^5-2x^3-3x^2-x-2$
(e) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$

22. feladat Határozza meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}$ felett.

(a) $2x^7+5x^6+4x^5+13x^4+54x^3+84x^2+54x+12$
(b) $3x^{100}-10x^{50}+100x-50$
(c) $3x^6+2x^5-7x^4+2$
(d) $5x^8-5x^7+4x^2-2x-2$
(e) $x^7-4x^6+4x^5+9x^4-36x^3+39x^2-12x+12$

23. feladat A derivált vizsgálatával határozza meg az alábbi polinomok többszörös gyökeit, majd az összes gyöküket (multiplicitással együtt). Az $\operatorname{lnko}(f,f')$ és $f/\operatorname{lnko}(f,f')$ polinomok kiszámításához használhat számítógépet.

(a) $x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4$
(b) $3x^4-4x^3+1$
(c) $x^5-10x^3-20x^2-15x-4$
(d) $x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1$
(e) $x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27$

24. feladat Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A választ minden esetben indokolni kell!

(a) Ha egy legalább elsőfokú polinom irreducibilis, akkor nincsen gyöke.
(b) Tetszőleges p prímszám esetén minden $f:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_p$ leképezéshez létezik olyan $\mathbb{Z}_p[x]$-beli polinom, amelynek éppen f a polinomfüggvénye.
(c) Bármely $a,b,c\in\mathbb{R}$ számokra létezik olyan $f\in\mathbb{R}[x]$ másodfokú polinom, melyre $f(0)=a$, $f(1)=b$ és $f(2)=c$.
(d) Ha egy $\mathbb{C}$ feletti polinom irreducibilis, akkor van gyöke.
(e) Ha egy polinom relatív prím a deriváltjához, akkor nincsen többszörös gyöke.

25. feladat Döntse el, hogy a művelettáblázat által meghatározott $\mathbb{A}$ grupoid izomorf-e a $\mathbb{B}$ grupoiddal.

(a)

$\cdot$	u	v	x	y
u	y	u	v	x
v	u	v	x	y
x	v	x	y	u
y	x	y	u	v

$\mathbb{B}=(\mathcal{P}(\{a,b\});\cup)$

(b)

$\cdot$	u	v	x	y
u	y	u	v	x
v	u	v	x	y
x	v	x	y	u
y	x	y	u	v

$\mathbb{B}=(\mathbb{Z}_4;+)$

(c)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$\mathbb{B}=(\{1,i,-1,-i\};\cdot)$

(d)

$\circ$	α	β	γ	δ
α	δ	β	α	γ
β	β	β	β	β
γ	α	β	γ	δ
δ	γ	β	δ	δ

$\mathbb{B}=(\mathbb{Z}_5^*;\cdot)$

(e)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$\mathbb{B} = (\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}; \cdot)$

26. feladat Döntse el, hogy az alábbi halmazok grupoidot, félcsoportot, csoportot alkotnak-e a megadott művelettel.
(a) $(\mathcal{P}(\{a,b\}); \triangle)$, $(\mathbb{Z}_5^*; +)$
(b) $(\mathbb{R}^{2\times 2}; +)$, $(\mathbb{R}^{2\times 2}; \cdot)$
(c) $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}; \cdot)$
(d) $(\mathcal{P}(\{a,b\}); \cap)$
(e) $(\mathbb{R}^4; +)$

27. feladat Adja meg az alábbi S_7-beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként.
(a) $((1342)(237))^{126}(3476)^{-1}$
(b) $((13)(15)(276))^{-10}(125)(63)$
(c) $(345)((7451)^{-1}(4256))^{83}$
(d) $((124)^{35}(134))^{-4}(27)$
(e) $((1247)^{-6}(154)^{103})^{-100}$

28. feladat Számítsa ki D_{15}-ben az alábbi elemeket. Az eredményt a^k vagy $a^k t$ $(k = 0, 1, \ldots, 14)$ alakban adja meg.
(a) a^{154}, $a^7 t \cdot a^{12} t$
(b) $a^{23} t \cdot a^{18}$, $\left(at \cdot a^{-5} t\right)^{-3}$
(c) $a^{10} t \cdot a^8 t$
(d) $(a^{-1} t a)^4$
(e) $(a^{10} t)^3$

29. feladat Oldja meg D_{15}-ben az alábbi egyenleteket. Az eredményt a^k vagy $a^k t$ $(k = 0, 1, \ldots, 14)$ alakban adja meg.
(a) $x \cdot ta^3 = a$, $a^4 t \cdot x \cdot a = ta^9$
(b) $ta^7 \cdot x \cdot a^2 t = a^{23} t$
(c) $ta^5 \cdot x \cdot a^2 = t$
(d) $t \cdot x \cdot ta^5 = (ta)^2$
(e) $ta^3 \cdot x = a$

30. feladat Határozza meg az alábbi csoportokban a megadott elemek rendjét.
(a) $i \in \mathbb{C}^*$, $\overline{2} \in \mathbb{Z}_5^*$
(b) $(134)(52) \in S_5$
(c) $(1245)(234) \in S_5$
(d) $\overline{5} \in \mathbb{Z}_9^*$
(e) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \in \mathbb{C}^*$

31. feladat Adjon meg a megadott csoportban n-edrendű elemet, amennyiben lehetséges.
(a) $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $n = 12$; $(\mathbb{Z}_8^*, \cdot)$, $n = 5$; D_6, $n = 3$
(b) S_6, $n = 6$
(c) S_3, $n = 4$
(d) D_8, $n = 4$
(e) $\mathbb{Z}_{12}$, $n = 3$

32. feladat Döntse el, hogy a G csoportban részcsoportot alkot-e a megadott H részhalmaz.
(a) $G = S_4$, $H = \{\mathrm{id}, (13), (24), (13)(24)\}$; $G = D_6$, $H = \{\mathrm{id}, t, a^2, a^2 t\}$
(b) $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $H = (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$
(c) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = \mathbb{N}$
(d) $G = S_5$, $H = \{\mathrm{id}, (135), (153)\}$
(e) $G = (\mathbb{Z}_6, +)$, $H = \mathbb{Z}_6^*$

33. feladat Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A választ minden esetben indokolni kell!
(a) Minden páratlan rendű permutáció páros.
(b) Az S_4 csoportban pontosan 6 másodrendű elem van.
(c) Tetszőleges G csoport minden H, K részcsoportjára $H \cup K \leq G$.
(d) Minden páros permutáció rendje ~~páros~~ páratlan.
(e) Tetszőleges csoport tetszőleges a, b, x, y elemeire $axb = ayb \implies x = y$

34. feladat Határozza meg a G csoportban a B részhalmaz által generált részcsoportot.
(a) $G = \mathbb{Z},\ B = \{30, 42, 105\}$; $\quad G = D_{12},\ B = \{a^3, a^2t\}$
(b) $G = \mathbb{Z}_{30},\ B = \{\overline{6}, \overline{10}\}$; $\quad G = S_4,\ B = \{(1234), (13)\}$
(c) $G = \mathbb{Z}_{31},\ B = \{\overline{6}, \overline{10}\}$
(d) $G = \mathbb{C}^*,\ B = \left\{i,\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
(e) $G = D_{10},\ B = \{a^4, a^5t\}$

35. feladat Melyek izomorfak az alábbi csoportok közül? (A választ minden esetben indokolni kell!)
(a) $\mathbb{Z}_2^3,\ \mathbb{Z}_{20}^*,\ \mathcal{P}(\{a, b, c\}),\ Q$
(b) $D_6,\ A_4,\ \mathbb{Z}_{13}^*,\ \mathbb{Z}_{12}$
(c) $D_3,\ S_3,\ \mathbb{Z}_7^*,\ \mathbb{Z}_9^*$
(d) $\mathbb{Z}_5^*,\ \mathbb{Z}_8^*,\ \mathbb{Z}_{10}^*,\ \mathbb{Z}_{12}^*$
(e) $D_4,\ Q,\ \mathbb{Z}_{15}^*,\ E_8$

36. feladat Számítsa ki az alábbi csoportokban az egyes elemek generátumait (azaz a ciklikus részcsoportokat), majd határozza meg az összes részcsoportot, végül rajzolja fel a részcsoportháló Hasse-diagramját.
(a) $\mathbb{Z}_{12},\ \mathbb{Z}_{21}^*$
(b) D_4
(c) $\mathbb{Z}_{15}^*$
(d) Q
(e) S_3

37. feladat Számítsa ki az alábbi hatványok maradékait a megadott modulusra nézve.
(a) $2014^{2014} \equiv ? \pmod{7}$
(b) $27^{159} \equiv ? \pmod{40}$
(c) $4447^{2018} \equiv ? \pmod{44}$
(d) $303^{4039} \equiv ? \pmod{100}$
(e) $2019^{2019} \equiv ? \pmod{11}$

38. feladat Keressen primitív gyököt az m modulusra nézve.
(a) $m = 26$
(b) $m = 35$
(c) $m = 17$
(d) $m = 22$
(e) $m = 19$

39. feladat Készítsen indextáblázatot, és oldja meg a segítségével a kongruenciát.
(a) $x^9 \equiv 8 \pmod{13}$
(b) $11x^8 \equiv 5 \pmod{13}$
(c) $3x^4 \equiv 4 \pmod{11}$
(d) $5x^6 \equiv 3 \pmod{11}$
(e) $10x^5 \equiv 1 \pmod{11}$