Algebra és számelmélet előadás

Waldhauser Tamás
2016. szeptember 15.


THINK
BEFORE
YOU
PRINT

Házi feladat a gyakorlatra

4. feladat. Ábrázolja a Gauss-féle számsíkon az alábbi számhalmazokat.

(a) $\left\{z \in \mathbb{C}\colon 0 \leq \arg(zi) < \dfrac{\pi}{3}\right\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C}\colon \arg(z + zi) = \pi\}$

eredmény: origó kezdőpontú, a valós tengely pozitív felével $\dfrac{3\pi}{4}$ szöget bezáró nyílt félegyenes

(c) $\left\{z \in \mathbb{C}\colon \frac{\pi}{6} \leq \arg(\overline{z}) < \dfrac{\pi}{4}\right\}$

(d) $\left\{z \in \mathbb{C}\colon \arg(\overline{z}) = \dfrac{\pi}{6}\right\}$

(e) $\left\{z \in \mathbb{C}\colon \arg\left(z^2\right) = \dfrac{\pi}{2}\right\}$

Számolás trigonometrikus alakban

1.21. Tétel (Moivre-képlet).

Bármely nemzéró $z = r \operatorname{cis} \varphi$ komplex szám és $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$z^n = r^n \operatorname{cis}(n\varphi).$$

Példa.

$$(\operatorname{cis} \varphi)^2 = \operatorname{cis}(2\varphi) = \cos(2\varphi) + i \cdot \sin(2\varphi)$$
$$(\operatorname{cis} \varphi)^2 = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + i \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

Így könnyű megjegyezni a $\cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ és $\sin(2\varphi) = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ összefüggéseket, sőt hasonló képletet levezethetünk $n\varphi$ szögfüggvényeire is.

Példa.

Számítsuk ki a $-1 + i$ komplex szám 2422-edik hatványát.

$$(-1+i)^{2422} = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}\right)^{2422} = \sqrt{2}^{2422} \operatorname{cis}\left(2422 \cdot \frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= 2^{1211} \operatorname{cis}\left(1816\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2^{1211} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^{1211} i$$

Házi feladat a gyakorlatra

5. feladat. Számítsa ki a hatványokat trigonometrikus alakban, majd adja meg a végeredményt kanonikus alakban is.

(a) $(-1+i)^{2422} = ?$

eredmény: $\sqrt{2}^{2422} \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{2} = 2^{1211} i$

(b) $(\sqrt{3}+i)^{1208} = ?$

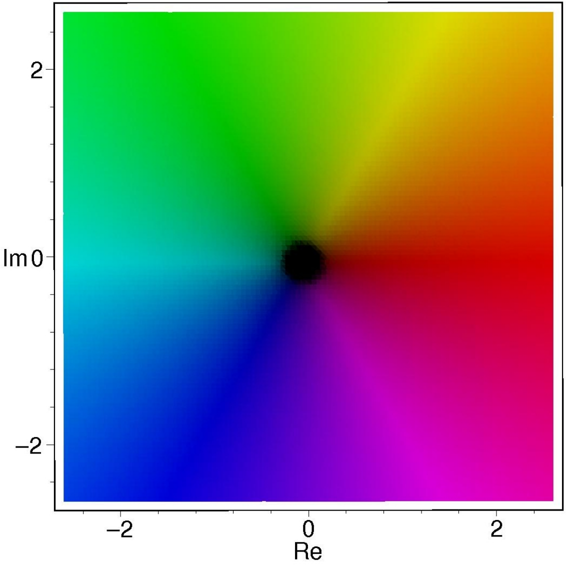
eredmény: $2^{1208} \operatorname{cis} \dfrac{4\pi}{3} = -2^{1207} - 2^{1207}\sqrt{3} i$

(c) $(2+2\sqrt{3}i)^{605} = ?$

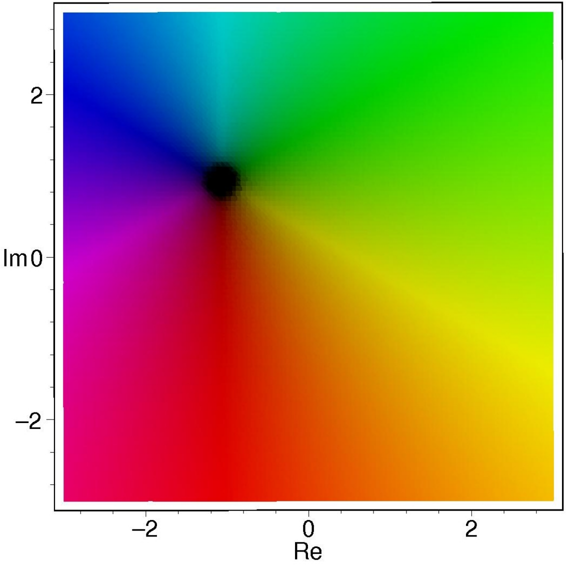
(d) $(1+i)^{1222} = ?$

(e) $(-3-3\sqrt{3}i)^{1526} = ?$

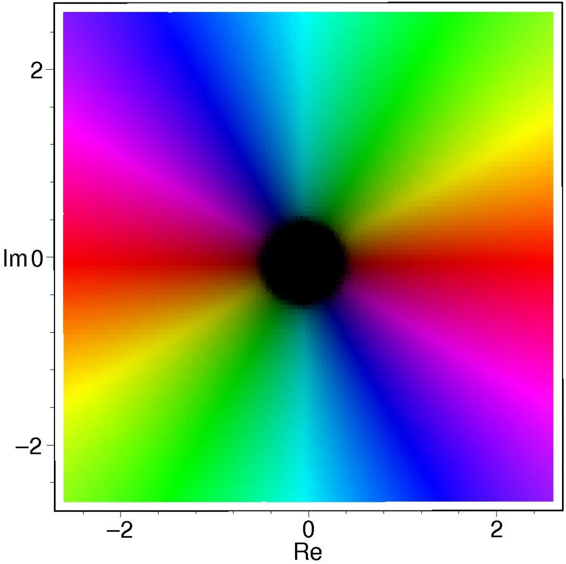
A komplex számsík színezése



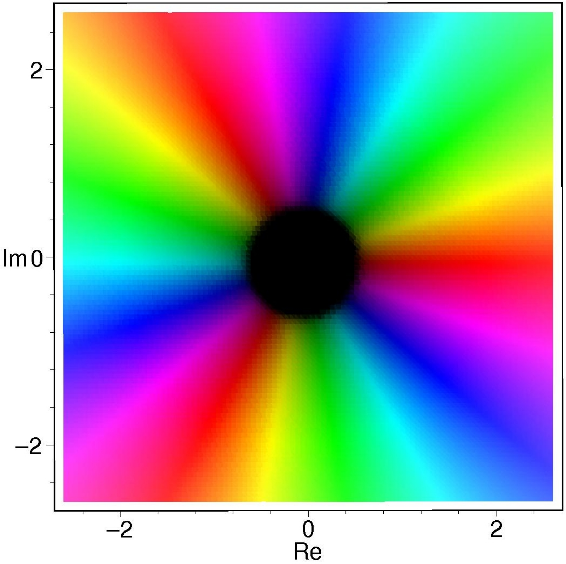
$f(z) = zi + 1 + i$ színképe



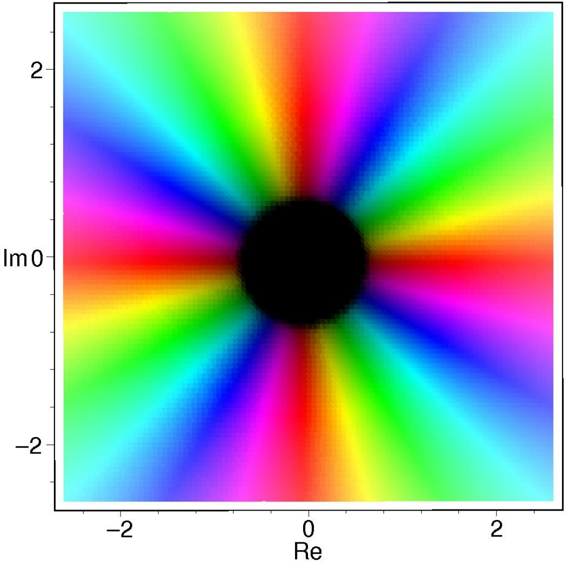
$f(z) = z^2$ színképe



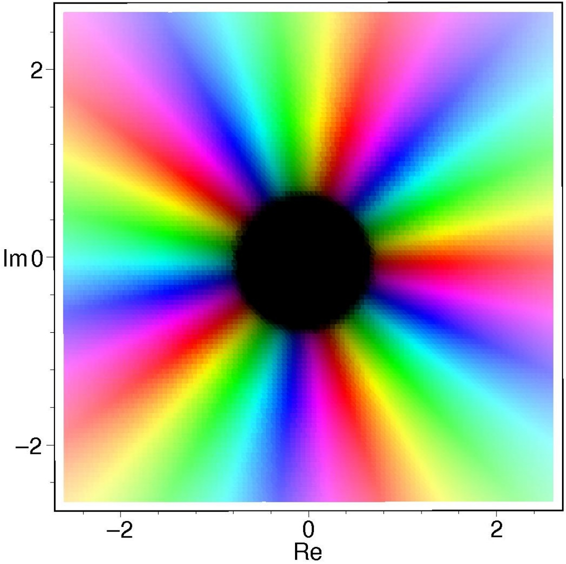
$f(z) = z^3$ színképe



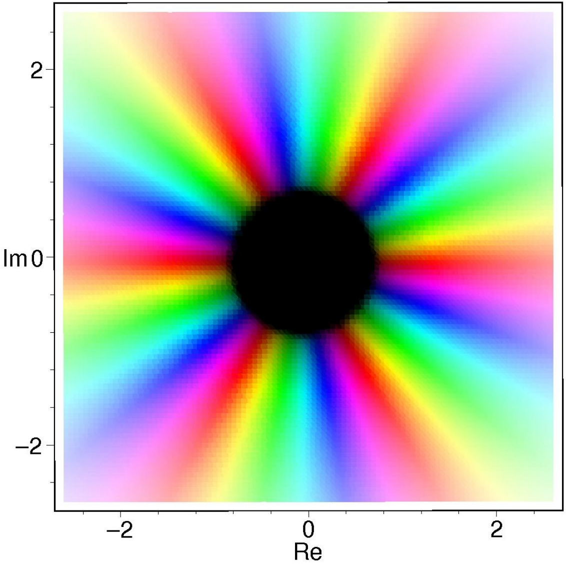
$f(z) = z^4$ színképe



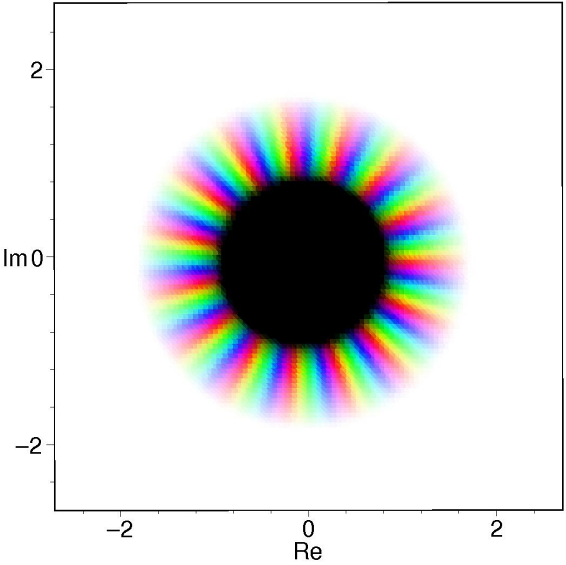
$f(z) = z^5$ színképe



$f(z) = z^6$ színképe



$f(z) = z^{15}$ színképe



Gyökvonás

1.22. Definíció.

Tetszőleges n pozitív egész szám és $z \in \mathbb{C}$ esetén azt mondjuk, hogy az u komplex szám *n-edik gyöke* z-nek, ha $u^n = z$.

1.23. Tétel.

Minden nemnulla komplex számnak pontosan n különböző n-edik gyöke van.
A $z = r \operatorname{cis} \varphi$ trigonometrikus alakban megadott komplex szám n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)\,.$$

Példa.

Vonjunk köbgyököt i-ből! A trigonometrikus alak $i = 1 \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$, tehát az $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ és $n = 3$ szereposztással kell alkalmaznunk a fenti képletet.

$$\begin{aligned}
k = 0: &\qquad \operatorname{cis} \frac{\frac{\pi}{2} + 0\pi}{3} = \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \\
k = 1: &\qquad \operatorname{cis} \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \\
k = 2: &\qquad \operatorname{cis} \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} &= -i
\end{aligned}$$

Házi feladat a gyakorlatra

6. feladat. Számítsa ki a gyök összes értékét trigonometrikus alakban, majd adja meg a végeredményt kanonikus alakban is.

(a) $\sqrt[3]{i} = ?$

eredmény: $-i, \; \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

(b) $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i} = ?$

eredmény: $\pm\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2}i\right), \; \pm\left(\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt[4]{2}}{2}i\right)$

(c) $\sqrt[6]{64} = ?$

(d) $\sqrt[4]{-16} = ?$

(e) $\sqrt[3]{-8} = ?$

Egységgyökök

1.24. Definíció.

Az ε komplex számot *n-edik egységgyöknek* nevezzük, ha $\varepsilon^n = 1$.

1.25. Állítás.

Az n-edik egységgyökök a következők: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, ahol $\varepsilon_k = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}$.
Ezzel a jelöléssel $\varepsilon_0 = 1$ és $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ minden $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ esetén.

1.26. Megjegyzés.

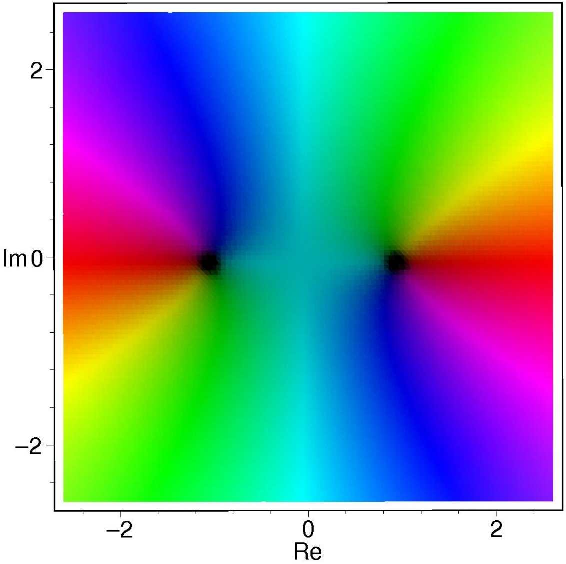
Az n-edik egységgyökök egy szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, amelynek körülírt köre az origó középpontú egységkör, és egyik csúcsa 1.
(Ez a két információ egyértelműen meg is határozza az n-szöget.)

Példa.

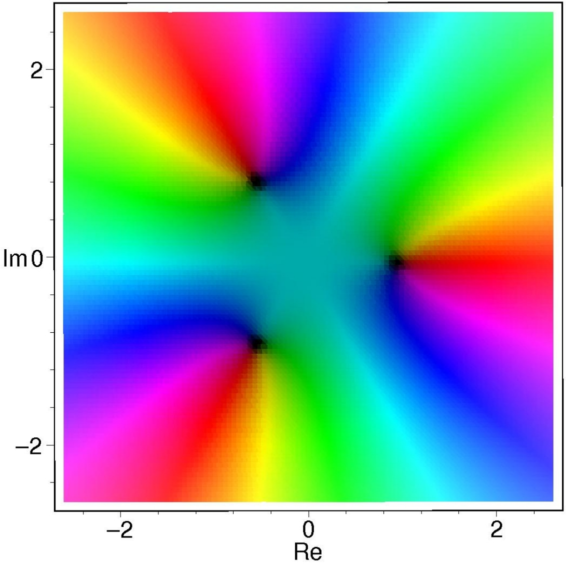
A harmadik egységgyökök:

$$\varepsilon_0 = \operatorname{cis} 0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad \varepsilon_2 = \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

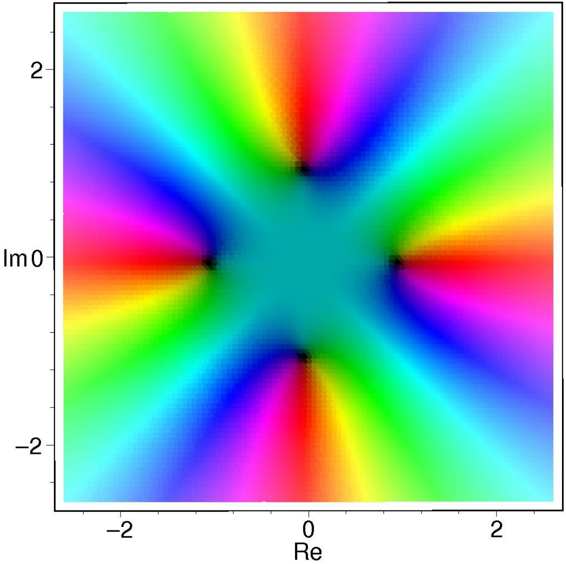
$f(z) = z^2 - 1$ színképe



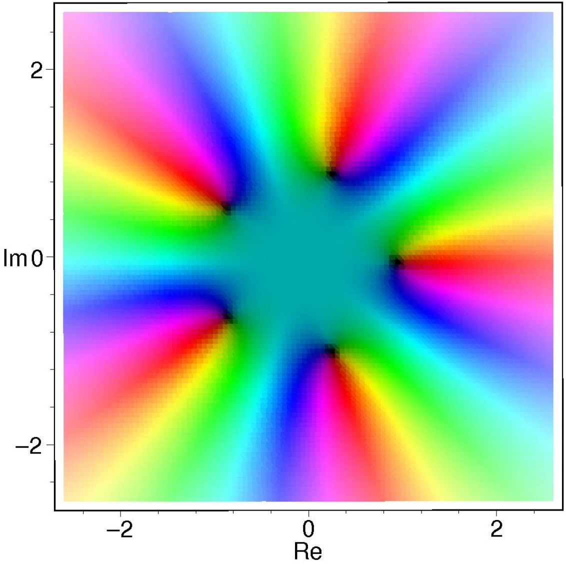
$f(z) = z^3 - 1$ színképe



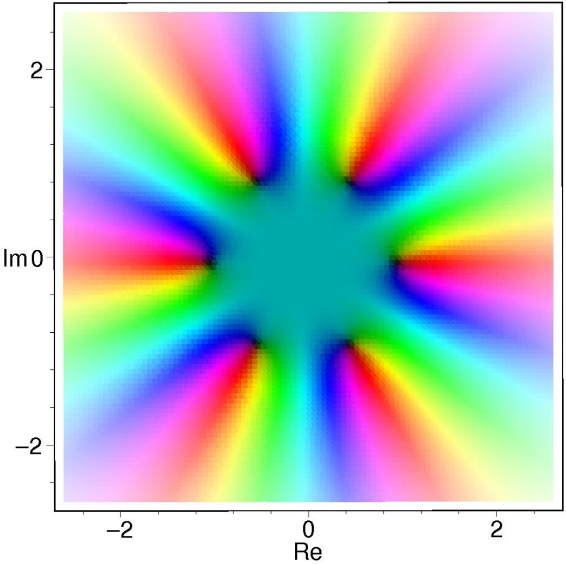
$f(z) = z^4 - 1$ színképe



$f(z) = z^5 - 1$ színképe



$f(z) = z^6 - 1$ színképe



Egységgyökök

1.27. Következmény.

Egy nemnulla komplex szám összes n-edik gyökét megkapjuk, ha egy rögzített n-edik gyökét megszorozzuk sorra az n-edik egységgyökökkel.
Tehát ha $u_0^n = z \neq 0$, akkor a z komplex szám n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = u_0 \varepsilon_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Példa.

Láttuk, hogy $\sqrt[3]{i} = -i, \ \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$. A három köbgyök közül a „legszebb” $u_0 = -i$ (erre akár számolás nélkül is rá is lehetett volna érezni).
Ebből megkaphatjuk a többit a harmadik egységgyökök ismeretében.

$$\begin{aligned}
-i \cdot \varepsilon_0 &= -i \cdot 1 &&= -i \\
-i \cdot \varepsilon_1 &= -i \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) &&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \\
-i \cdot \varepsilon_2 &= -i \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) &&= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i
\end{aligned}$$

Utolsó tétel komplex számokról

1.28. Tétel.

Ha $n > 1$, akkor az n-edik egységgyökök összege 0.

Bizonyítás.

Legyen $\varepsilon = \operatorname{cis} \dfrac{2\pi}{n}$. Ha $n \geq 2$, akkor $\varepsilon \neq 1$.

Ekkor az n-edik egységgyökök összege

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1} = \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} = \frac{1-1}{1-\varepsilon} = 0.$$

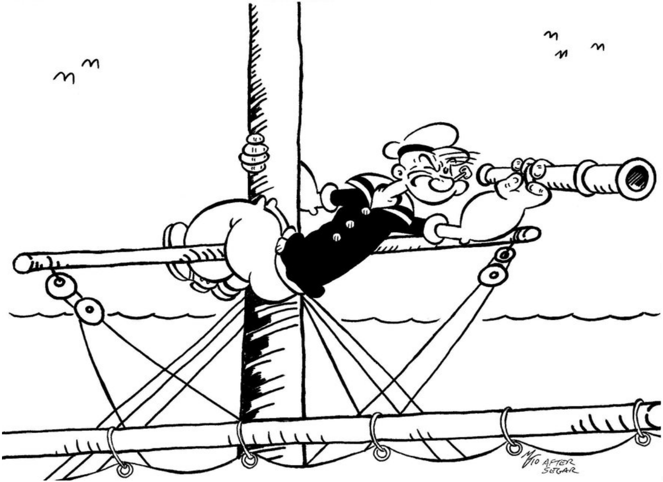
□

Második házi feladat az előadásra

Jelölje be a komplex egységkörön azokat a számokat, amelyeknek az argumentuma nevezetes szög (összesen 16 db szám). Mindegyiknek írja fel a kanonikus és a trigonometrikus alakját, és határozza meg a legkisebb olyan n kitevőt, amelyre n-edik egységgyök.

- beküldendő emailben: `twaldha@math.u-szeged.hu`
- pdf fájl legyen (lehet szkennelt is)
- fájlnév: `EHA-eahf2.pdf` (például `WATHAAS-eahf2.pdf`)
- határidő: szeptember 28, reggel 8 óra

Kitekintés: harmad- és negyedfokú egyenletek



A másodfokú tag kiejtése

Állítás.

Az $ay^3 + by^2 + cy + d = 0 \ \left(a, b, c, d \in \mathbb{C}, a \neq 0\right)$ harmadfokú egyenletből az $x = y + \frac{b}{3a}$ új ismeretlenre való áttéréssel eltűnik a másodfokú tag, tehát a főegyütthatóval való leosztás után

$$x^3 + px + q = 0 \ \left(p, q \in \mathbb{C}\right)$$

alakú egyenletet kapunk.

A főszereplők

Scipione del Ferro (1465–1526)

A főszereplők

Niccolo Fontana Tartaglia (1500–1557)

A főszereplők

Girolamo Cardano (1501–1576)

A főszereplők

Lodovico Ferrari (1522–1565)

A sztori

- Del Ferro megoldja a harmadfokú egyenlet bizonyos típusait, de módszerét titokban tartja.
- 1526: halálos ágyán elárulja a titkot tanítványának, Fiornak, a jegyzetfüzetét pedig vejére bízza.
- 1535: Fior és Tartaglia versenye.
- 1539: Cardano (nagy nehezen) kiszedi Tartagliából a módszert:

  „Esküszöm Önnek az Úr Szent Evangéliumára, és nem csak egy igaz ember szavát adom Önnek, hogy soha nem publikálom az Ön felfedezését, ha rám bízza, de ígérem azt is, és legyen igaz keresztény lelkiismeretem az Ön biztosítéka, hogy oly módon titkosítom, hogy halálom után senki sem tudja majd elolvasni a feljegyzetteket. Ha Ön úgy gondolja, hogy megérdemlem a bizalmat, akkor tegye meg nekem ezt a szívességet, ha pedig nem, akkor fejezzük be ezt a beszélgetést."

A sztori

- 1539: Cardano tovább vizsgálja a harmadfokú egyenleteket, felfedezi a casus irreduciblist.
- 1540: Ferrari megoldja a negyedfokú egyenletet, de nem publikálhatja Cardano fogadalma miatt.
- 1543: Cardano és Ferrari Bolognába utazik, és del Ferro veje megmutatja nekik a jegyzetfüzetet.
- 1545: Cardano kiadja Ars Magna című művét, benne a harmadfokú egyenlet megoldásával, hivatkozva del Ferro és Tartaglia munkájára. Tartaglia kiakad. $\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(5-\sqrt{-15}\right)=25-(-15)=40$
- 1548: Ferrari és Tartaglia levelezése.Tartaglia nem akar Ferrarival megküzdeni, Cardano pedig Tartagliával nem akar.
- 1548: Tartaglia egy jó állás reményében mégis elfogadja Ferrari kihívását, de alulmarad, és az éj leple alatt megszökik.

Tartaglia verse

When the cube and things together
Are equal to some discreet number, ... $x^3 + px = q$
Find two other numbers differing in this one. $U - V = q$
Then you will keep this as a habit
That their product should always be equal
Exactly to the cube of a third of the things. . . . . $UV = \left(\frac{p}{3}\right)^3$
The remainder then as a general rule
Of their cube roots subtracted
Will be equal to your principal thing . . . . $x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}$
In the second of these acts,
When the cube remains alone, ... $x^3 = px + q$
You will observe these other agreements:
You will at once divide the number into two parts . . . . $U + V = q$
So that the one times the other produces clearly
The cube of the third of the things exactly. . . . . $UV = \left(\frac{p}{3}\right)^3$
Then of these two parts, as a habitual rule,
You will take the cube roots added together,
And this sum will be your thought. . . . . $x = \sqrt[3]{U} + \sqrt[3]{V}$

Tartaglia verse (folyt.)

The third of these calculations of ours . . . . $x^3 + q = px$
Is solved with the second if you take good care,
As in their nature they are almost matched.
These things I found, and not with sluggish steps,
In the year one thousand five hundred, four and thirty.
With foundations strong and sturdy
In the city girdled by the sea.

A Cardano-képlet

Tétel.
Az $x^3 + px + q = 0$ $(p, q \in \mathbb{C})$ harmadfokú egyenlet minden megoldása megkapható a Cardano-képlet segítségével:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

A képlet kilenc számot is adhat, de ezek közül természetesen legfeljebb három lehet megoldása az egyenletnek, nevezetesen azok, ahol a két köbgyök szorzata $-\frac{p}{3}$.

Ha u és v a két köbgyök egy-egy ilyen értéke, akkor az $x^3 + px + q$ polinom három gyöke (multiplicitással):

$$u + v, \; u\varepsilon + v\bar{\varepsilon}, \; u\bar{\varepsilon} + v\varepsilon,$$

ahol ε primitív harmadik egységgyök.

Pozitív szám a gyök alatt

Példa.

Oldjuk meg az $x^3 + 6x = 20$ egyenletet.

Behelyettesítve a Cardano-képletebe ($p = 6$, $q = -20$), ezt kapjuk:

$$\underbrace{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}_{u} + \underbrace{\sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}}_{v}.$$

A két köbgyök három-három értéke (figyelni kell a párbaállításra: $u_i v_i = -2$):

$$u_1 = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \quad u_2 = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \cdot \varepsilon \quad u_3 = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \cdot \bar{\varepsilon}$$
$$v_1 = \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} \quad v_2 = \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} \cdot \bar{\varepsilon} \quad v_3 = \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} \cdot \varepsilon$$

Tehát az egyenlet megoldásai:

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} = 2$$

$$\alpha_2 = -1 + 3i$$

$$\alpha_3 = -1 - 3i$$

Negatív szám a gyök alatt (casus irreducibilis)

Példa.

Oldjuk meg az $x^3 = 15x + 4$ egyenletet.

Behelyettesítve a Cardano-képletebe $(p = -15,\ q = -4)$, ezt kapjuk:

$$\underbrace{\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}}_{u} + \underbrace{\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}}_{v}.$$

A $\sqrt[3]{2+11i}$ köbgyökvonást elvégezni bajos! Vegyük észre, hogy $(2+i)^3 = 2+11i$!

Tehát az egyenlet megoldásai:

$$\alpha_1 = (2+i) + (2-i) = 4$$

$$\alpha_2 = (2+i)\,\varepsilon + (2-i)\,\overline{\varepsilon} = -2-\sqrt{3}$$

$$\alpha_3 = (2+i)\,\overline{\varepsilon} + (2-i)\,\varepsilon = -2+\sqrt{3}$$

A valós együtthatós harmadfokú egyenlet

Tétel.
A valós együtthatós $x^3 + px + q$ harmadfokú polinom valós, illetve nemvalós gyökeinek száma a $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ szám előjelétől függ az alábbi módon:

- ha $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$, akkor egy valós és két nemvalós konjugált komplex gyök van;
- ha $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, akkor minden gyök valós, és közülük (legalább) kettő egybeesik;
- ha $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, akkor három különböző valós gyök van (ezt az esetet nevezzük casus irreducibilisnek).

A diszkrimináns

Definíció.

A $D = -108\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)$ számot nevezzük az $x^3 + px + q$ polinom *diszkriminánsának*.

Megjegyzés.

Meg lehet mutatni, hogy a diszkrimináns nem más, mint

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \cdot (\alpha_2 - \alpha_3)^2 \cdot (\alpha_3 - \alpha_1)^2\,,$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a polinom komplex gyökei. Valójában ez a diszkrimináns definíciója. Hasonlóan lehet definiálni tetszőleges fokszámú polinom diszkriminánsát is: az $f = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ polinom diszkriminánsa

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2\,.$$

TILOS MEGTANULNI!

Definíció.

Az $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ negyedfokú egyenlet *kubikus rezolvensének* az

$$(a\alpha - c)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} + 2\alpha - b\right)\left(\alpha^2 - d\right) = 0$$

egyenletet nevezzük (ami az α ismeretlenre nézve harmadfokú egyenlet).

Ferrari módszere

Tétel.

Legyen $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$, és legyen α megoldása az $f(x) = 0$ negyedfokú egyenlet kubikus rezolvensének. Ekkor az

$$\left(\frac{a^2}{4} + 2\alpha - b\right) x^2 + (a\alpha - c)\, x + \left(\alpha^2 - d\right)$$

másodfokú polinom teljes négyzet, azaz valamely $h \in \mathbb{C}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinom négyzete. A $g = x^2 + \frac{a}{2}x + \alpha$ jelölést használva

$$f = g^2 - h^2 = (g + h)(g - h)\,,$$

vagyis f két másodfokú polinom szorzatára bomlik, és így gyökei a másodfokú egyenlet megoldóképletével meghatározhatók.

Az általános harmadfokú egyenlet

Az $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ harmadfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x = -\frac{a}{3} + \sqrt[3]{\frac{-2a^3 + 9ab - 27c + \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}} +$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-2a^3 + 9ab - 27c - \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}}$$

Forrás: http://planetmath.org/encyclopedia/CubicFormula.html

Az általános negyedfokú egyenlet

Az $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ negyedfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x = \frac{-a}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{\sqrt[3]{2}(b^2 - 3ac + 12d)}{3\sqrt[3]{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}} + \sqrt[3]{\frac{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}{54}}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{4b}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}(b^2 - 3ac + 12d)}{3\sqrt[3]{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}} - \sqrt[3]{\frac{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}{54}} \pm \frac{-a^3 + 4ab - 8c}{4\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{\sqrt[3]{2}(b^2 - 3ac + 12d)}{3\sqrt[3]{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}} + \sqrt[3]{\frac{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}{54}}}}}$$

Forrás: http://planetmath.org/encyclopedia/QuarticFormula.html