

Ekvivalenciarelációk a számfogalom felépítésében

Az ekvivalenciareláció, mint fogalomalkotó eszköz

Ekvivalenciarelációk segítségével meg tudjuk fogalmazni, hogy mi a közös két dologban. Ilyenkor az ekvivalenciareláció nem más, mint annak a leképezésnek a magja, ami minden dologhoz azokat a tulajdonságait rendeli hozzá, amelyek szerint össze akarjuk őket hasonlítani.

De lehet fordított is a helyzet: Tudjuk (vagy érezzük), hogy valami közös bizonyos dolgokban, de nem tudjuk, mi ez a „valami”. Ilyenkor az ekvivalenciareláció (vagy osztályozás) van megadva, de nem tudjuk, mi az a függvény, aminek ez a magja.

Példa.

- ▶ $A =$ a sík egyeneseseinek halmaza, $a \rho b \iff a \parallel b$ \rightsquigarrow az irány fogalma
- ▶ $A =$ háromszögek halmaza, $a \rho b \iff a$ és b hasonló \rightsquigarrow az „alak” fogalma
- ▶ $A = \mathcal{P}(U)$, $a \rho b \iff$ létezik $a \rightarrow b$ bijekció \rightsquigarrow a számosság fogalma
- ▶ $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(a_1, a_2) \rho (b_1, b_2) \iff a_1 b_2 = a_2 b_1$ \rightsquigarrow a tört fogalma

A számfogalom (egy) felépítése

Természetes számok

A véges halmazok „halmazán” értelmezzük a ρ ekvivalenciarelációt a következőképpen:

$$A\rho B \iff \text{létezik } A \rightarrow B \text{ bijekció.}$$

A természetes számok nem mások, mint a megfelelő ekvivalenciaosztályok. Például

$$3 = \overline{\{1, 2, 3\}} = \overline{\{a, b, c\}} = \overline{\{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}} = \dots$$

Az összeadás a diszjunkt unió segítségével definiálható: $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \dot{\cup} B}$. Például

$$\begin{aligned} 2 + 3 &= \overline{\{\text{🐱}, \text{🐱}\}} + \overline{\{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}} = \overline{\{\text{🐱}, \text{🐱}\} \dot{\cup} \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}} = \\ &= \overline{\{\text{🐱}, \text{🐱}, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}} = 5. \end{aligned}$$

A szorzás a Descartes-szorzat segítségével definiálható: $\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A \times B}$. Például

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 &= \overline{\{\text{🐱}, \text{🐱}\}} \cdot \overline{\{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}} = \overline{\{\text{🐱}, \text{🐱}\} \times \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}} = \\ &= \overline{\{(\text{🐱}, \spadesuit), (\text{🐱}, \heartsuit), (\text{🐱}, \clubsuit), (\text{🐱}, \spadesuit), (\text{🐱}, \heartsuit), (\text{🐱}, \clubsuit)\}} = 6. \end{aligned}$$

Ezek a műveletek *jóldefiniáltak* (mit jelent ez?) és rendelkeznek a szokásos műveleti tulajdonságokkal. (Lásd még: [Peano-axiómarendszer](#).)

A számfogalom (egy) felépítése

Egész számok

Az $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ halmazon értelmezzük a ρ ekvivalenciarelációt a következőképpen:

$$(a_1, a_2) \rho (b_1, b_2) \iff a_1 + b_2 = a_2 + b_1.$$

Az egész számok nem mások, mint a megfelelő ekvivalenciaosztályok. Például

$$-3 = \overline{(0, 3)} = \overline{(1, 4)} = \overline{(2, 5)} = \dots$$

Az összeadás, kivonás és szorzás művelete értelmezhető ezen ekvivalenciaosztályok halmazán (hogyan?), és rendelkeznek a szokásos műveleti tulajdonságokkal. Így kapjuk az egész számok \mathbb{Z} gyűrűjét.

Racionális számok

A $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ halmazon értelmezzük a ρ ekvivalenciarelációt a következőképpen:

$$(a_1, a_2) \rho (b_1, b_2) \iff a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

A racionális számok nem mások, mint a megfelelő ekvivalenciaosztályok. Például

$$\frac{2}{5} = \overline{(2, 5)} = \overline{(4, 10)} = \overline{(6, 15)} = \dots$$

Az összeadás, kivonás, szorzás és osztás művelete értelmezhető ezen ekvivalenciaosztályok halmazán (hogyan?), és rendelkeznek a szokásos műveleti tulajdonságokkal. Így kapjuk a racionális számok \mathbb{Q} testét.

A számfogalom (egy) felépítése

Valós számok

A racionális számokból álló **Cauchy-sorozatok** halmazán értelmezzük a ρ ekvivalenciarelációt a következőképpen:

$$\{a_n\} \rho \{b_n\} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

A valós számok nem mások, mint a megfelelő ekvivalenciaosztályok. Például

$$\pi = \overline{(3, 3,1, 3,14, 3,141, \dots)} = \overline{(4, 3,2, 3,15, 3,142, \dots)} = \dots$$

Az összeadás, kivonás, szorzás és osztás művelete értelmezhető ezen ekvivalenciaosztályok halmazán (hogyan?), és rendelkeznek a szokásos műveleti tulajdonságokkal. Így kapjuk a valós számok \mathbb{R} **testét**. (Lásd még: **Dedekind-szeletek**.)

Komplex számok

A komplex számok szokásos definíciója nem használ ekvivalenciarelációkat, de később majd látunk egy alternatív definíciót valós polinomok ekvivalenciaosztályai segítségével.