Szimmetrikus polinomok

Ha az $f = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei α_1, α_2 és α_3, akkor

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + 5x + 2 &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = \\ &= x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \end{aligned}$$

következésképp

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -4, \qquad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 5, \qquad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -2.$$

Ezek segítségével a gyökök sokféle kifejezését meghatározhatjuk a gyökök kiszámítása nélkül:

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) = (-4)^2 - 2 \cdot 5 = 6$$

$$\begin{aligned} \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 - 3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) \\ &\quad + 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ &= (-4)^3 - 3 \cdot (-4) \cdot (5) + 3 \cdot (-2) = -10 \end{aligned}$$

Ha az $f = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei α_1, α_2 és α_3, akkor

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -4, \qquad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 5, \qquad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -2.$$

Ezek segítségével a gyökök sokféle kifejezését meghatározhatjuk a gyökök kiszámítása nélkül:

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 = \\
&\qquad = 18 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\
&\qquad\quad + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)^2 - 27 (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 \\
&\qquad\quad - 4 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 4 (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)^3 \\
&\qquad = 18 \cdot (-4) \cdot 5 \cdot (-2) + (-4)^2 \cdot 5^2 - 27 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-4)^3 \cdot (-2) - 4 \cdot 5^3 \\
&\qquad = 0
\end{aligned}$$

Ezekben a kifejezésekben az a közös, hogy szimmetrikusak, azaz invariánsak α_1, α_2, α_3 minden permutációjára. Mivel a Viète-formulákban szereplő $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3$ és $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ szimmetrikusak, nem meglepő, hogy minden amit belőlük fel tud(t)unk építeni, szintén szimmetrikus.

Tétel.

Legyenek az n-edfokú $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}\left[x\right]$ főpolinom komplex gyökei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (mindegyiket annyiszor feltüntetve, amennyi a multiplicitása). Ekkor fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned}
-a_{n-1} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n;\\
a_{n-2} &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n;\\
-a_{n-3} &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n;\\
&\ \vdots\\
\left(-1\right)^{n-1} a_1 &= \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-2}\alpha_n + \cdots + \alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n;\\
\left(-1\right)^{n} a_0 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n.
\end{aligned}$$

Megjegyzés.

A fenti képleteket ***Viète-formuláknak*** hívjuk. A k-adik sor bal oldalán $(-1)^k a_{n-k}$ áll, a jobb oldalon pedig az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ betűkből képezett összes k-tényezős szorzat összege, tehát egy $\binom{n}{k}$-tagú összeg. Formálisan:

$$(-1)^k a_{n-k} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1} \cdot \alpha_{i_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_k}.$$

Még formálisabban:

$$(-1)^k a_{n-k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \prod_{i \in I} \alpha_i.$$

Definíció.

Adott T test feletti ***n*-határozatlanú monomnak** nevezzük az $ax_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$ alakú formális kifejezéseket, ahol $0\neq a\in T$ és $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{N}_0$. Az ilyen monomok véges összegeit pedig T feletti ***n*-határozatlanú polinomoknak** nevezzük.

Jelölés.

A T feletti n-határozatlanú polinomok halmazát $T\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ jelöli.

Tétel.

A természetes módon definiált szorzással és összeadással $T\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ integritástartomány.

Megjegyzés.

Az n-határozatlanú polinomok gyűrűjét lehetne rekurzívan is definiálni: legyen

$$T\left[x_1,\ldots,x_n\right]=\left(T\left[x_1,\ldots,x_{n-1}\right]\right)\left[x_n\right],$$

azaz a $T\left[x_1,\ldots,x_{n-1}\right]$ integritástartomány feletti (egyhatározatlanú) polinomgyűrű.

Példa.

$$
\begin{aligned}
f = \; & 7x_1^2x_3 - 2x_1x_2x_3^4 + 9x_1x_2 - 3x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2x_3^3 - 2x_1^2 + \\
& 5x_1x_2^2x_3 - x_1^2x_2x_3 - 6x_1x_3 + 2x_3^2 + x_1x_3^2 + 4x_2^2x_3^2 + 8 \qquad \in \mathbb{R}\left[x_1, x_2, x_3\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f = \; & x_1^2 \cdot \left(-3x_2x_3^2 - x_2x_3 + 7x_3 - 2\right) + \\
& x_1 \cdot \left(5x_2^2x_3 - 2x_2x_3^4 + x_2x_3^3 + 9x_2 + x_3^2 - 6x_3\right) + \\
& \left(4x_2^2x_3^2 + 2x_3^2 + 8\right) \qquad \in \mathbb{R}\left[x_2, x_3\right]\left[x_1\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f = \; & x_1^2 \cdot \Big(x_2 \cdot \left(-3x_3^2 - x_3\right) + \left(7x_3 - 2\right)\Big) + \\
& x_1 \cdot \Big(x_2^2 \cdot \left(5x_3\right) - x_2\left(2x_3^4 + x_3^3 + 9\right) + \left(x_3^2 - 6x_3\right)\Big) + \\
& \Big(x_2^2 \cdot \left(4x_3^2\right) + \left(2x_3^2 + 8\right)\Big) \qquad \in \mathbb{R}\left[x_3\right]\left[x_2\right]\left[x_1\right]
\end{aligned}
$$

Definíció.

Az $f \in T[x_1, \ldots, x_n]$ polinomot ***szimmetrikus polinomnak*** nevezzük, ha invariáns a határozatlanok minden permutációjára, azaz

$$\forall \pi \in S_n : f(x_{1\pi}, \ldots, x_{n\pi}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Definíció.

A k-adik n-határozatlanú ***elemi szimmetrikus polinom*** az $x_1, \ldots, x_n$ határozatlanokból képezett összes k-tényezős szorzatok összege $(k = 1, \ldots, n)$.

Jelölés.

A k-adik n-határozatlanú elemi szimmetrikus polinomot σ_k jelöli (az alaptest és n értéke általában világos a szövegkörnyezetből), tehát

$$\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} x_i \in T[x_1, \ldots, x_n].$$

Megjegyzés.

Az elemi szimmetrikus polinomokkal már találkoztunk: segítségükkel fejezhetők ki egy komplex együtthatós főpolinom együtthatói a polinom gyökeiből. Tehát a Viète-formulák $\sigma_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^k a_{n-k}$ alakban is felírhatók.

Példa.

Az elemi szimmetrikus polinomok $n = 2$ esetén:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 \\
\sigma_2 &= x_1 x_2
\end{aligned}$$

Példa.

Az elemi szimmetrikus polinomok $n = 3$ esetén:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\
\sigma_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\
\sigma_3 &= x_1 x_2 x_3
\end{aligned}$$

Példa.

Az elemi szimmetrikus polinomok $n = 4$ esetén:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\sigma_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 \\
\sigma_3 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \\
\sigma_4 &= x_1 x_2 x_3 x_4
\end{aligned}$$

Tétel.

A szimmetrikus polinomok részgyűrűt alkotnak a $T[x_1, \ldots, x_n]$ polinomgyűrűben.

Tétel (a szimmetrikus polinomok alaptétele).

Bármely szimmetrikus polinom felírható, mégpedig egyetlen módon, az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként. Formálisan:

$$\forall f \in T[x_1, \ldots, x_n] : f \text{ szimmetrikus } \Longrightarrow \exists! h \in T[x_1, \ldots, x_n] : f = h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = \sigma_2 + \sigma_1 + 1 = h(\sigma_1, \sigma_2),$$

ahol $h = x_2 + x_1 + 1$.

Példa.

Fejezzük ki az $f = (x_1 - x_2)^2$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 = h(\sigma_1, \sigma_2),$$

ahol $h = x_1^2 - 4x_2$.

Ha egy $f \in T[x_1, \ldots, x_n]$ szimmetrikus polinomban szerepel az $ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ tag, akkor szerepelnie kell minden olyan monomnak is, ami ebből a határozatlanok (vagy, ha úgy tetszik, a kitevők) permutálásával megkapható.

Például, ha az $f \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ szimmetrikus polinomban szerepel az $5x_1^2x_2^4x_3$ tag, akkor

$$f = 5x_1^2x_2^4x_3 + 5x_1^2x_2x_3^4 + 5x_1x_2^2x_3^4 + 5x_1x_2^4x_3^2 + 5x_1^4x_2x_3^2 + 5x_1^4x_2^2x_3 + \cdots$$

Ezentúl az egy „családba” tartozó tagok közül mindig csak egyet írunk ki, mégpedig azt, amelyben a kitevők balról jobbra nemnövekvő sorrendben vannak (ilyen minden családban van!):

$$f = (5x_1^4x_2^2x_3 + \cdots) + \cdots$$

Példa.

$$\begin{aligned}
\sigma_1\sigma_2 &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\
&= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + 3x_1x_2x_3 \\
&= \left(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2\right) + 3x_1x_2x_3 \\
&= \left(x_1^2x_2 + \cdots\right) + 3x_1x_2x_3
\end{aligned}$$

Példa.

$$\begin{aligned}\sigma_1^3 &= (x_1 + x_2 + x_3)^3 \\ &= x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_2^2 + 6x_1x_2x_3 + 3x_1x_3^2 + x_2^3 + 3x_2^2x_3 + 3x_2x_3^2 + x_3^3 \\ &= \left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right) + 3\left(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2\right) + 6x_1x_2x_3 \\ &= \left(x_1^3 + \cdots\right) + 3\left(x_1^2x_2 + \cdots\right) + 6x_1x_2x_3\end{aligned}$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

$$f = (x_1^3 + \cdots)$$

$$f - \sigma_1^3 = -3(x_1^2x_2 + \cdots) - 6x_1x_2x_3$$

$$f - \sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2 = 3x_1x_2x_3$$

$$f - \sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0$$

$f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = h(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, ahol $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - 3x_1x_2 + 3x_3$.

Legyen adott egy $f \in T[x_1, \ldots, x_n]$ szimmetrikus polinom. Sorra kivonjuk f-ből $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ megfelelő szorzatait úgy, hogy kiejtsük f tagjait. Ha sikerül kiejteni minden tagot, akkor megkapjuk f felírását az elemi szimmetrikus polinomok segítségével (és így a szimmetrikus polinomok alaptételének bizonyítását).

Két kérdés merül fel az eljárással kapcsolatban:

1. Ki tudjuk-e ejteni f egy tetszés szerint kiválasztott tagját?
2. El fognak-e fogyni a tagok véges számú lépés után? (Nem világos, mert időnként több új tag jön be, mint amennyit kiejtettünk.)

Lemma.

Ha $k_1 \geq \cdots \geq k_n$, akkor léteznek olyan $i_1, \ldots, i_n$ nemnegatív egész kitevők, melyekre $\sigma_1^{i_1} \cdots \sigma_n^{i_n}$ tagjai között szerepel az $M := x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ monom.

Bizonyítás.

$\sigma_1^{i_1} \cdots \sigma_n^{i_n}$ tagjai között szerepel

$$(x_1)^{i_1}(x_1x_2)^{i_2}(x_1x_2x_3)^{i_3} \cdots (x_1x_2x_3 \cdots x_n)^{i_n} =$$

$$= x_1^{i_1+\cdots+i_n} x_2^{i_2+\cdots+i_n} x_3^{i_3+\cdots+i_n} \ldots x_{n-1}^{i_{n-1}+i_n} x_n^{i_n}.$$

Az $i_1 = k_1 - k_2, i_2 = k_2 - k_3, \ldots, i_{n-1} = k_{n-1} - k_n, i_n = k_n$ választással épp az M monomot kapjuk. □

A 2. kérdés megválaszolásához a monomokat sorba kell rendezni, és mindig a legnagyobb monomot kell kiejteni, vigyázva arra, hogy az esetlegesen fellépő új tagok mind kisebbek legyenek, mint az, amit kiejtettünk.

Egy megfelelő rendezés az úgynevezett ***lexikografikus rendezés***.

Egy másik, nagyon szemléletes rendezés található az alábbi cikkben. Itt minden monomot egy építőkockákból összerakott építménnyel szemléltetnek, és a monomokat a nekik megfelelő építmények súlypontjainak magassága szerint rendezik.

Meg lehet mutatni, hogy ha mindig a legmagasabb súlypontú tagokat ejtjük ki, akkor a bejövő új tagok súlypontja alacsonyabban lesz, mint a kiejtett tagoké, ezért az eljárás véges számú lépésben befejeződik.

Ben Blum-Smith, Samuel Coskey: *The Fundamental Theorem on Symmetric Polynomials: History's First Whiff of Galois Theory,*
The College Mathematics Journal **48** (2017), 18–29.

`https://doi.org/10.4169/college.math.j.48.1.18`

`https://arxiv.org/abs/1301.7116`

Példa.

Írjuk fel az $f = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok segítségével.

$$\begin{aligned} f &= x_1^4x_2^2 - 2x_1^4x_2x_3 + x_1^4x_3^2 - 2x_1^3x_2^3 + 2x_1^3x_2^2x_3 + 2x_1^3x_2x_3^2 - 2x_1^3x_3^3 \\ &\quad + x_1^2x_2^4 + 2x_1^2x_2^3x_3 - 6x_1^2x_2^2x_3^2 + 2x_1^2x_2x_3^3 + x_1^2x_3^4 - 2x_1x_2^4x_3 \\ &\quad + 2x_1x_2^3x_3^2 + 2x_1x_2^2x_3^3 - 2x_1x_2x_3^4 + x_2^4x_3^2 - 2x_2^3x_3^3 + x_2^2x_3^4 = \\ &= (x_1^4x_2^2 + \cdots) - 2(x_1^4x_2x_3 + \cdots) - 2(x_1^3x_2^3 + \cdots) + 2(x_1^3x_2^2x_3 + \cdots) \end{aligned}$$

$$f = (x_1^4 x_2^2 + \cdots) - 2(x_1^4 x_2 x_3 + \cdots) - 2(x_1^3 x_2^3 + \cdots) + 2(x_1^3 x_2^2 x_3 + \cdots)$$

$$f - \sigma_1^2 \sigma_2^2 = -4(x_1^4 x_2 x_3 + \cdots) - 4(x_1^3 x_2^3 + \cdots) - 6(x_1^3 x_2^2 x_3 + \cdots) - 21 x_1^2 x_2^2 x_3^2$$

$$f - \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 4\sigma_1^3 \sigma_3 = -4(x_1^3 x_2^3 + \cdots) + 6(x_1^3 x_2^2 x_3 + \cdots) + 3 x_1^2 x_2^2 x_3^2$$

$$f - \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 4\sigma_1^3 \sigma_3 + 4\sigma_2^3 = 18(x_1^3 x_2^2 x_3 + \cdots) + 27 x_1^2 x_2^2 x_3^2$$

$$f - \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 4\sigma_1^3 \sigma_3 + 4\sigma_2^3 - 18\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = -27 x_1^2 x_2^2 x_3^2$$

$$f - \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 4\sigma_1^3 \sigma_3 + 4\sigma_2^3 - 18\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + 27\sigma_3^2 = 0$$

$$f = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 4\sigma_1^3 \sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - 27\sigma_3^2$$

Ha az $f = x^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei α_1 és α_2, akkor

$$x^2 + bx + c = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2,$$

következésképp

$$-b = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{és} \quad c = \alpha_1\alpha_2.$$

Az egyenlet megoldásához magát α_1-et (vagy α_2-t) kellene megkapni, ez pedig nem szimmetrikus kifejezés. Valahogyan tehát meg kell törni a szimmetriát.

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 - \alpha_2)^2 &= (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = b^2 - 4c \\
\alpha_1 - \alpha_2 &= \pm\sqrt{b^2 - 4c} \\
\alpha_1 + \alpha_2 &= -b \\
2\alpha_1 &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4c} \\
\alpha_1 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}
\end{aligned}$$

Definíció.

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ főpolinom ***diszkriminánsa***:

$$\prod_{1 \le i < j \le n} \left(\alpha_i - \alpha_j\right)^2 .$$

Példa (a harmadfokú polinom diszkriminánsa).

$$D := \left(x_1 - x_2\right)^2 \left(x_1 - x_3\right)^2 \left(x_2 - x_3\right)^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2$$

Ha $\left(x - \alpha_1\right)\left(x - \alpha_2\right)\left(x - \alpha_3\right) = x^3 + px + q$, akkor a Viéte-formulák szerint

$$\sigma_1\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right) = 0,$$

$$\sigma_2\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right) = p,$$

$$\sigma_3\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right) = -q,$$

tehát

$$D\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right) = -4\sigma_2\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right)^3 - 27\sigma_3\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right)^2$$

$$= -4p^3 - 27q^2 = -108\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)$$

Az $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ harmadfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x = -\frac{a}{3} + \sqrt[3]{\frac{-2a^3 + 9ab - 27c + \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}} +$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-2a^3 + 9ab - 27c - \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}}$$

Forrás: `http://planetmath.org/cubicformula`

Az $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ negyedfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x = \frac{-a}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{\sqrt[3]{2}\,(b^2 - 3ac + 12d)}{3\sqrt[3]{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}} + \sqrt[3]{\frac{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}{54}}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{4b}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}\,(b^2 - 3ac + 12d)}{3\sqrt[3]{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}} - \sqrt[3]{\frac{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}{54}} \pm \frac{-a^3 + 4ab - 8c}{4\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{\sqrt[3]{2}\,(b^2 - 3ac + 12d)}{3\sqrt[3]{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}} + \sqrt[3]{\frac{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}{54}}}}}$$

Forrás: `http://planetmath.org/quarticformula`

Algebrai és transzcendens számok

Algebrai és transzcendens számok

Definíció.

Az α komplex számot ***algebrai számnak*** nevezzük, ha gyöke valamely nemzéró racionális együtthatós polinomnak. A nem algebrai számokat ***transzcendens számoknak*** nevezzük.

Definíció.

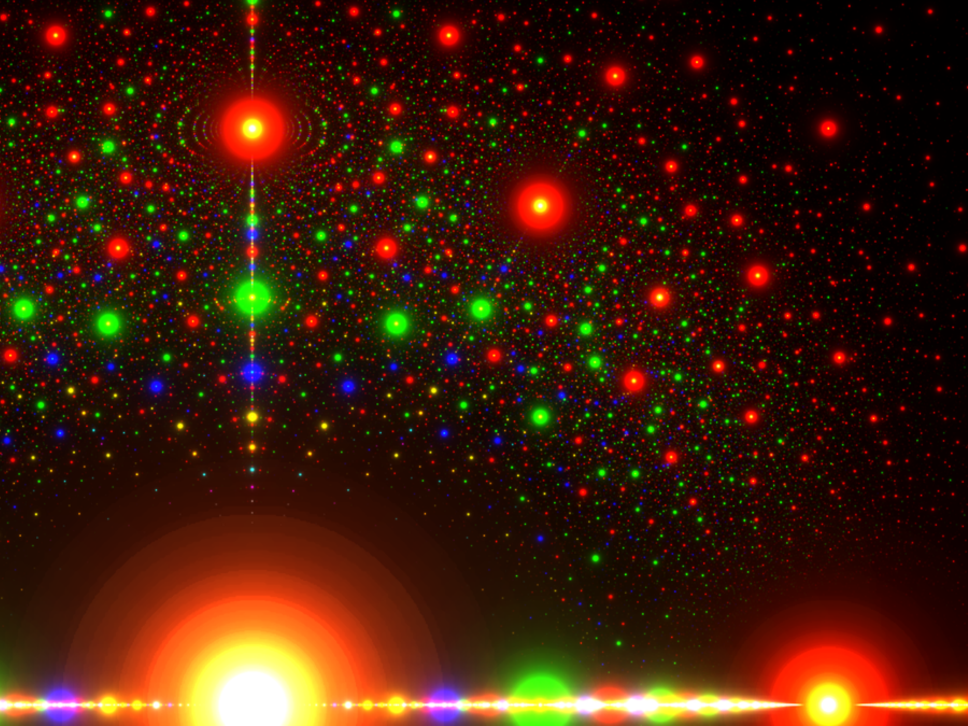
Ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ minimális fokszámú mindazon nemzéró racionális együtthatós főpolinomok között, melyeknek α gyöke, akkor f-et az α algebrai szám ***minimálpolinomjának*** nevezzük.

Tétel.

Algebrai szám minimálpolinomja mindig egyértelműen meghatározott, és irreducibilis a racionális számtest felett. Továbbá, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ olyan irreducibilis főpolinom melynek az α algebrai szám gyöke, akkor f megegyezik α minimálpolinomjával.

Tétel.

Létezik transzcendens szám.



Algebrai és transzcendens számok

Példa.

- $\sqrt{2}$ algebrai szám, minimálpolinomja: $x^2 - 2$ (miért irreducibilis?).
- $\sqrt[n]{2}$ algebrai szám, minimálpolinomja: $x^n - 2$ (miért irreducibilis?).
- i algebrai szám, minimálpolinomja: $x^2 + 1$ (miért irreducibilis?).
- π és e transzcendens számok.
- A Liouville-féle $\sum \frac{1}{10^{n!}}$ konstans transzcendens szám.
- Gelfond–Schneider-tétel: Ha $\alpha \neq 0, 1$ és $\beta \notin \mathbb{Q}$ algebrai számok, akkor α^β transzcendens szám.

  Például $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ és $i^i = e^{-\pi/2}$ transzcendens számok.

Diofantoszi approximáció

Megjegyzés.

Nem könnyű feladat egy konkrét számról belátni, hogy transzcendens. Az ilyen bizonyítások általában azt használják fel, hogy algebrai számokat nem lehet nagyon jól közelíteni racionális számokkal. Ez a *diofantoszi approximáció* témaköre: adott α valós számhoz szeretnénk olyan $\frac{p}{q}$ közelítő törtet találni ($p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, $p \perp q$), amelyre $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ kicsi, és q nem túl nagy.

Tétel (Dirichlet approximációs tétele).

Minden α valós szám és minden N természetes szám esetén van α-nak olyan $\frac{p}{q}$ közelítése, amelyre

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq} \quad \text{és} \quad q \leq N.$$

Következmény.

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor végtelen sok olyan $\frac{p}{q}$ közelítése van, amelyre $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

Állítás.

Ha $\alpha \in \mathbb{Q}$, akkor csak véges sok olyan $\frac{p}{q}$ közelítése van, amelyre $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

Diofantoszi approximáció

Tétel (Hurwitz tétele).

Ha α irracionális szám, akkor végtelen sok olyan $\frac{p}{q}$ közelítése van, amelyre

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Ha $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, akkor az állítás nem javítható: nem írhatunk a nevezőbe semmilyen $\sqrt{5}$-nél nagyobb számot.

Tétel (Liouville, Thue, Siegel, Roth).

Ha α irracionális algebrai szám és $\varepsilon > 0$, akkor csak véges sok olyan $\frac{p}{q}$ közelítése van, amelyre

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Algebrai számok és gyökmennyiségek

Tétel.

Az algebrai számok résztestet alkotnak a komplex számok testében.

Tétel.

Ha α algebrai szám és $n \geq 2$, akkor $\sqrt[n]{\alpha}$ is algebrai szám (a gyöknek mind az n értékére).

Definíció.

Az α komplex számot ***gyökmennyiségnek*** nevezzük, ha megkapható racionális számokból kiindulva a négy alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) és egész kitevős gyökvonás véges számú alkalmazásával.

Következmény.

A gyökmennyiségek algebrai számok.

Példa.

Ez a szám algebrai:

$$\frac{\sqrt[3]{3-\sqrt{\sqrt[4]{2}+\sqrt[5]{\frac{3}{17}}}}+\sqrt[17]{323-\sqrt{2014}}}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}}$$

Algebrai számok és gyökmennyiségek

Tétel.

Van olyan algebrai szám, ami nem gyökmennyiség.

A fenti ártatlannak látszó tételből következik, hogy nem minden egyenlet oldható meg gyökjelek segítségével. Az ötödfokú egyenletnek már nincs általános megoldóképlete, sőt, például az $x^5 - 4x + 2 = 0$ egyenletnek még „ad hoc" megoldóképlete sincs, mert gyökei nem gyökmennyiségek.

Tétel.

Az algebrai számok teste algebrailag zárt, azaz ha $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke a legalább elsőfokú $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomnak, ahol $a_0, \ldots, a_n$ algebrai számok, akkor α maga is algebrai szám.