Szimmetrikus polinomok

Ha az $f = x^2 - 4x + 10 \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei α_1 és α_2, akkor

$$x^2 - 4x + 10 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2,$$

következésképp

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 4 \quad \text{és} \quad \alpha_1\alpha_2 = 10.$$

Ezek segítségével a gyökök sokféle kifejezését meghatározhatjuk a gyökök kiszámítása nélkül:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + 1 = 10 + 4 + 1 = 15$$

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2\alpha_1\alpha_2 = 4^2 - 2 \cdot 10 = -4$$

$$\begin{aligned}\alpha_1^3 + \alpha_2^3 &= (\alpha_1 + \alpha_2)^3 - 3\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1\alpha_2^2 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)^3 - 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= 4^3 - 3 \cdot 10 \cdot 4 = -56\end{aligned}$$

Ha az $f = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei α_1, α_2 és α_3, akkor

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) =$$
$$= x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\,x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)\,x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$

következésképp

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -4, \qquad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 5, \qquad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -2.$$

Ezek segítségével a gyökök sokféle kifejezését meghatározhatjuk a gyökök kiszámítása nélkül:

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) = (-4)^2 - 2 \cdot 5 = 6$$

$$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 - 3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) + 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$
$$= (-4)^3 - 3 \cdot (-4) \cdot (5) + 3 \cdot (-2) = -10$$

Ha az $f = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei α_1, α_2 és α_3, akkor

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -4, \qquad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 5, \qquad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -2.$$

Ezek segítségével a gyökök sokféle kifejezését meghatározhatjuk a gyökök kiszámítása nélkül:

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 = \\
&\qquad = 18 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\
&\qquad\quad + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)^2 - 27 (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 \\
&\qquad\quad - 4 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 4 (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)^3 \\
&\qquad = 18 \cdot (-4) \cdot 5 \cdot (-2) + (-4)^2 \cdot 5^2 - 27 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-4)^3 \cdot (-2) - 4 \cdot 5^3 \\
&\qquad = 0
\end{aligned}$$

Ezekben a kifejezésekben az a közös, hogy szimmetrikusak, azaz invariánsak α_1, α_2, α_3 minden permutációjára. Mivel a Viète-formulákban szereplő $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3$ és $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ szimmetrikusak, nem meglepő, hogy minden amit belőlük fel tud(t)unk építeni, szintén szimmetrikus.

Tétel.

Legyenek az n-edfokú $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ főpolinom komplex gyökei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (mindegyiket annyiszor feltüntetve, amennyi a multiplicitása). Ekkor fennállnak az alábbi összefüggések:

$$
\begin{aligned}
-a_{n-1} &= \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n;\\
a_{n-2} &= \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n;\\
-a_{n-3} &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n;\\
&\vdots\\
(-1)^{n-1}a_1 &= \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}+\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-2}\alpha_n+\cdots+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n;\\
(-1)^n a_0 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n.
\end{aligned}
$$

Megjegyzés.

A fenti képleteket **Viète-formuláknak** hívjuk. A k-adik sor bal oldalán $(-1)^k a_{n-k}$ áll, a jobb oldalon pedig az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ betűkből képezett összes k-tényezős szorzat összege, tehát egy $\binom{n}{k}$-tagú összeg. Formálisan:

$$(-1)^k a_{n-k} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1} \cdot \alpha_{i_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_k}.$$

Még formálisabban:

$$(-1)^k a_{n-k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} \alpha_i.$$

Definíció.

Adott T test feletti **n-határozatlanú monomnak** nevezzük az $ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ alakú formális kifejezéseket, ahol $0 \neq a \in T$ és $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$. Az ilyen monomok véges összegeit pedig T feletti **n-határozatlanú polinomoknak** nevezzük.

Jelölés.

A T feletti n-határozatlanú polinomok halmazát $T[x_1, \ldots, x_n]$ jelöli.

Tétel.

A természetes módon definiált szorzással és összeadással $T[x_1, \ldots, x_n]$ integritástartomány.

Megjegyzés.

Az n-határozatlanú polinomok gyűrűjét lehetne rekurzívan is definiálni: legyen

$$T[x_1, \ldots, x_n] = (T[x_1, \ldots, x_{n-1}])[x_n],$$

azaz a $T[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ integritástartomány feletti (egyhatározatlanú) polinomgyűrű.

Példa.

$$\begin{aligned} f = \; & 7x_1^2x_3 - 2x_1x_2x_3^4 + 9x_1x_2 - 3x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2x_3^3 - 2x_1^2 + \\ & 5x_1x_2^2x_3 - x_1^2x_2x_3 - 6x_1x_3 + 2x_3^2 + x_1x_3^2 + 4x_2^2x_3^2 + 8 \qquad \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f = \; & x_1^2 \cdot \left(-3x_2x_3^2 - x_2x_3 + 7x_3 - 2\right) + \\ & x_1 \cdot \left(5x_2^2x_3 - 2x_2x_3^4 + x_2x_3^3 + 9x_2 + x_3^2 - 6x_3\right) + \\ & \left(4x_2^2x_3^2 + 2x_3^2 + 8\right) \qquad \in \mathbb{R}[x_2, x_3][x_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f = \; & x_1^2 \cdot \Big(x_2 \cdot \left(-3x_3^2 - x_3\right) + \left(7x_3 - 2\right)\Big) + \\ & x_1 \cdot \Big(x_2^2 \cdot (5x_3) - x_2\left(2x_3^4 + x_3^3 + 9\right) + \left(x_3^2 - 6x_3\right)\Big) + \\ & \Big(x_2^2 \cdot \left(4x_3^2\right) + \left(2x_3^2 + 8\right)\Big) \qquad \in \mathbb{R}[x_3][x_2][x_1] \end{aligned}$$

Definíció.

Az $f \in T[x_1, \ldots, x_n]$ polinomot **szimmetrikus polinomnak** nevezzük, ha invariáns a határozatlanok minden permutációjára, azaz

$$\forall \pi \in S_n : f(x_{1\pi}, \ldots, x_{n\pi}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Definíció.

A k-adik n-határozatlanú **elemi szimmetrikus polinom** az $x_1, \ldots, x_n$ határozatlanokból képezett összes k-tényezős szorzatok összege $(k = 1, \ldots, n)$.

Jelölés.

A k-adik n-határozatlanú elemi szimmetrikus polinomot σ_k jelöli (az alaptest és n értéke általában világos a szövegkörnyezetből), tehát

$$\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} x_i \in T[x_1, \ldots, x_n].$$

Megjegyzés.

Az elemi szimmetrikus polinomokkal már találkoztunk: segítségükkel fejezhetők ki egy komplex együtthatós főpolinom együtthatói a polinom gyökeiből. Tehát a Viète-formulák $\sigma_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^k a_{n-k}$ alakban is felírhatók.

Példa.

Az elemi szimmetrikus polinomok $n = 2$ esetén:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2$$

Példa.

Az elemi szimmetrikus polinomok $n = 3$ esetén:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3$$

Példa.

Az elemi szimmetrikus polinomok $n = 4$ esetén:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4$$

$$\sigma_4 = x_1 x_2 x_3 x_4$$

Tétel.

A szimmetrikus polinomok részgyűrűt alkotnak a $T[x_1, \dots, x_n]$ polinomgyűrűben.

Tétel (a szimmetrikus polinomok alaptétele).

Bármely szimmetrikus polinom felírható, mégpedig egyetlen módon, az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként. Formálisan:

$$\forall f \in T[x_1, \dots, x_n] : f \text{ szimmetrikus} \implies \exists! h \in T[x_1, \dots, x_n] : f = h(\sigma_1, \dots, \sigma_n) .$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = \sigma_2 + \sigma_1 + 1 = h(\sigma_1, \sigma_2) ,$$

ahol $h = x_2 + x_1 + 1$.

Példa.

Fejezzük ki az $f = (x_1 - x_2)^2$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 = h(\sigma_1, \sigma_2) ,$$

ahol $h = x_1^2 - 4x_2$.

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Mivel f **homogén** harmadfokú polinom, a felírásában csak σ_1^3, $\sigma_1\sigma_2$ és σ_3 szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^3 + B \cdot \sigma_1\sigma_2 + C \cdot \sigma_3.$$

$$\begin{aligned}
\sigma_1^3 &= (x_1 + x_2 + x_3)^3 \\
&= x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_2^2 + 6x_1x_2x_3 + 3x_1x_3^2 + x_2^3 + 3x_2^2x_3 + 3x_2x_3^2 + x_3^3 \\
&= \left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right) + 3\left(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2\right) + 6x_1x_2x_3 \\
&= \left(x_1^3 + \cdots\right) + 3\left(x_1^2x_2 + \cdots\right) + 6x_1x_2x_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_1\sigma_2 &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\
&= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + 3x_1x_2x_3 \\
&= \left(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2\right) + 3x_1x_2x_3 \\
&= \left(x_1^2x_2 + \cdots\right) + 3x_1x_2x_3
\end{aligned}$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.
Mivel f homogén harmadfokú polinom, a felírásában csak σ_1^3, $\sigma_1\sigma_2$ és σ_3 szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^3 + B \cdot \sigma_1\sigma_2 + C \cdot \sigma_3.$$

$$\begin{array}{rcccc}
\sigma_1^3 = & 1 \cdot \left(x_1^3 + \cdots\right) & +3 \cdot \left(x_1^2 x_2 + \cdots\right) & +6 \cdot x_1x_2x_3 \\[2em]
\sigma_1\sigma_2 = & & 1 \cdot \left(x_1^2 x_2 + \cdots\right) & +3 \cdot x_1x_2x_3 \\[2em]
\sigma_3 = & & & 1 \cdot x_1x_2x_3
\end{array}$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.
Mivel f homogén harmadfokú polinom, a felírásában csak σ_1^3, $\sigma_1\sigma_2$ és σ_3 szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^3 + B \cdot \sigma_1\sigma_2 + C \cdot \sigma_3.$$

$$\begin{array}{llll}
A \cdot \sigma_1^3 = & A \cdot \left(x_1^3 + \cdots\right) & +3A \cdot \left(x_1^2 x_2 + \cdots\right) & +6A \cdot x_1x_2x_3 \\[2em]
B \cdot \sigma_1\sigma_2 = & & B \cdot \left(x_1^2 x_2 + \cdots\right) & +3B \cdot x_1x_2x_3 \\[2em]
C \cdot \sigma_3 = & & & C \cdot x_1x_2x_3 \\[1em]
\hline \\
\text{cél:} & 1 \cdot \left(x_1^3 + \cdots\right)^3 & +0 \cdot \left(x_1^2 x_2 + \cdots\right) & +0 \cdot x_1x_2x_3
\end{array}$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.
Mivel f homogén harmadfokú polinom, a felírásában csak σ_1^3, $\sigma_1\sigma_2$ és σ_3 szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^3 + B \cdot \sigma_1\sigma_2 + C \cdot \sigma_3.$$

	A	$3A$	$6A$
		B	$3B$
			C
cél:	1	0	0

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Mivel f homogén harmadfokú polinom, a felírásában csak σ_1^3, $\sigma_1\sigma_2$ és σ_3 szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^3 + B \cdot \sigma_1\sigma_2 + C \cdot \sigma_3.$$

Egy lineáris egyenletrendszert kaptunk az A, B, C együtthatókra:

$$\begin{array}{rcrcrl} A & & & & & = 1 \\ 3A & + & B & & & = 0 \\ 6A & + & 3B & + & C & = 0 \end{array}$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.
Mivel f homogén harmadfokú polinom, a felírásában csak σ_1^3, $\sigma_1\sigma_2$ és σ_3 szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^3 + B \cdot \sigma_1\sigma_2 + C \cdot \sigma_3.$$

Egy lineáris egyenletrendszert kaptunk az A, B, C együtthatókra:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ennek van megoldása (akármi is van a jobb oldalon), mert a mátrixa trianguláris, és a főátlón nullától különböző számok vannak.

$$A = 1, \quad B = -3, \quad C = 3.$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.
Mivel f homogén harmadfokú polinom, a felírásában csak σ_1^3, $\sigma_1\sigma_2$ és σ_3 szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^3 + B \cdot \sigma_1\sigma_2 + C \cdot \sigma_3.$$

$$A = 1, \quad B = -3, \quad C = 3$$

Tehát $\quad f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = h(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, ahol

$$h = x_1^3 - 3x_1x_2 + 3x_3.$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.
Mivel f homogén negyedfokú polinom, a felírásában csak σ_1^4, $\sigma_1^2\sigma_2$, σ_2^2 és $\sigma_1\sigma_3$ szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^4 + B \cdot \sigma_1^2\sigma_2 + C \cdot \sigma_2^2 + D \cdot \sigma_1\sigma_3.$$

$$\sigma_1^4 = \left(x_1^4 + \cdots\right) + 4\left(x_1^3x_2 + \cdots\right) + 6\left(x_1^2x_2^2 + \cdots\right) + 12\left(x_1^2x_2x_3 + \cdots\right)$$

$$\sigma_1^2\sigma_2 = \left(x_1^3x_2 + \cdots\right) + 2\left(x_1^2x_2^2 + \cdots\right) + 5\left(x_1^2x_2x_3 + \cdots\right)$$

$$\sigma_2^2 = \left(x_1^2x_2^2 + \cdots\right) + 2\left(x_1^2x_2x_3 + \cdots\right)$$

$$\sigma_1\sigma_3 = \left(x_1^2x_2x_3 + \cdots\right)$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Mivel f homogén negyedfokú polinom, a felírásában csak σ_1^4, $\sigma_1^2\sigma_2$, σ_2^2 és $\sigma_1\sigma_3$ szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^4 + B \cdot \sigma_1^2\sigma_2 + C \cdot \sigma_2^2 + D \cdot \sigma_1\sigma_3.$$

$$A \cdot \sigma_1^4 = \quad A\left(x_1^4 + \cdots\right) + 4A\left(x_1^3x_2 + \cdots\right) + 6A\left(x_1^2x_2^2 + \cdots\right) + 12A\left(x_1^2x_2x_3 + \cdots\right)$$

$$B \cdot \sigma_1^2\sigma_2 = \quad B\left(x_1^3x_2 + \cdots\right) + 2B\left(x_1^2x_2^2 + \cdots\right) + 5B\left(x_1^2x_2x_3 + \cdots\right)$$

$$C \cdot \sigma_2^2 = \quad C\left(x_1^2x_2^2 + \cdots\right) + 2C\left(x_1^2x_2x_3 + \cdots\right)$$

$$D \cdot \sigma_1\sigma_3 = \quad D\left(x_1^2x_2x_3 + \cdots\right)$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.
Mivel f homogén negyedfokú polinom, a felírásában csak σ_1^4, $\sigma_1^2\sigma_2$, σ_2^2 és $\sigma_1\sigma_3$ szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^4 + B \cdot \sigma_1^2\sigma_2 + C \cdot \sigma_2^2 + D \cdot \sigma_1\sigma_3.$$

Egy lineáris egyenletrendszert kaptunk az A, B, C, D együtthatókra:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ennek van megoldása (akármi is van a jobb oldalon), mert a mátrixa trianguláris, és a főátlón nullától különböző számok vannak.

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.
Mivel f homogén negyedfokú polinom, a felírásában csak σ_1^4, $\sigma_1^2\sigma_2$, σ_2^2 és $\sigma_1\sigma_3$ szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^4 + B \cdot \sigma_1^2\sigma_2 + C \cdot \sigma_2^2 + D \cdot \sigma_1\sigma_3.$$

$$A = 1, \quad B = -4, \quad C = 2, \quad D = 4.$$

Tehát $f = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 = h(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, ahol

$$h = x_1^4 - 4x_1^2x_2 + 2x_2^2 + 4x_1x_3.$$

Ha f helyett bármilyen más homogén negyedfokú szimmetrikus polinomot veszünk $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$-ből, akkor csak az egyenletrendszer jobb oldalán álló számok változnak meg. Tehát mindig lesz megoldás, és a megoldás mindig egyértelmű.

Ha egy $f \in T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ szimmetrikus polinomban szerepel egy

$$ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

monom, akkor a szimmetria miatt szerepelni fog (mégpedig ugyanazzal az a együtthatóval) az összes olyan monom, ami ebből a kitevők permutálásával keletkezik: $ax_1^{k_{1\pi}} x_2^{k_{2\pi}} \cdots x_n^{k_{n\pi}}$ $(\pi \in S_n)$.

Minden szimmetrikus polinom előáll ilyen „monom-családok" összegeként (figyelem, nem minden családnak van $n!$ tagja, lehet kevesebb is!), ezért a szimmetrikus polinomok alaptételének bizonyításához elég azt belátni, hogy minden $n, d \in \mathbb{N}$ esetén a $T[x_1, x_2, \ldots, x_n]$-beli homogén d-edfokú szimmetrikus polinomokból keletkező mátrix trianguláris, és 1-esek vannak a főátlóján.

A mátrix sorai a $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ elemi szimmetrikus polinomokból készíthető összes d-edfokú szorzatoknak felelnek meg, oszlopai pedig a d-edfokú monomok családjainak. A mátrix elemei nem mások, mint a „szigma-szorzatok” kifejtésében szereplő „család-együtthatók”.

A sorokat és oszlopokat megfelelő sorrendben kell felírni, hogy a mátrix valóban trianguláris legyen. Egy megfelelő sorrendet ad az úgynevezett **lexikografikus rendezés**. Egy másik, nagyon szemléletes rendezés található az alábbi cikkben:

Ben Blum-Smith, Samuel Coskey: *The Fundamental Theorem on Symmetric Polynomials: History's First Whiff of Galois Theory,*
The College Mathematics Journal **48** (2017), 18–29.

`https://doi.org/10.4169/college.math.j.48.1.18`

`https://arxiv.org/abs/1301.7116`

Példa.

Legyenek az $2x^3 + 4x^2 - 6x + 2$ polinom komplex gyökei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Határozzuk meg $\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4$ értékét a gyökök kiszámítása nélkül.

Az előbb kiszámoltuk, hogy

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3.$$

Értékeljük ki mindkét oldalt az $(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ helyen.
A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -2,\\
\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -3,\\
\alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= \sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -1.
\end{aligned}$$

$$\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 = (-2)^4 - 4 \cdot (-2)^2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-3)^2 = 90.$$

Ha az $f = x^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei α_1 és α_2, akkor

$$x^2 + bx + c = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2,$$

következésképp

$$-b = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{és} \quad c = \alpha_1\alpha_2.$$

Az egyenlet megoldásához magát α_1-et (vagy α_2-t) kellene megkapni, ez pedig nem szimmetrikus kifejezés. Valahogyan tehát meg kell törni a szimmetriát.

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 - \alpha_2)^2 &= (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = b^2 - 4c \\
\alpha_1 - \alpha_2 &= \pm\sqrt{b^2 - 4c} \\
\alpha_1 + \alpha_2 &= -b \\
2\alpha_1 &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4c} \\
\alpha_1 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}
\end{aligned}$$

Definíció.

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ főpolinom **diszkriminánsa**:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 .$$

Példa (a harmadfokú polinom diszkriminánsa).

$D := (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 4\sigma_1^3 \sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - 27\sigma_3^2$

Ha $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = x^3 + px + q$, akkor a Viéte-formulák szerint

$$\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0,$$

$$\sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = p,$$

$$\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -q,$$

tehát

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -4\sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^3 - 27\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^2$$

$$= -4p^3 - 27q^2 = -108\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)$$

Az $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ harmadfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x = -\frac{a}{3} + \sqrt[3]{\frac{-2a^3 + 9ab - 27c + \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}} +$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-2a^3 + 9ab - 27c - \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}}$$

Forrás: http://planetmath.org/encyclopedia/CubicFormula.html

Az $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ negyedfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x = \frac{-a}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{\sqrt[3]{2}(b^2 - 3ac + 12d)}{3\sqrt[3]{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}} + \sqrt[3]{\frac{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}{54}}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{4b}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}(b^2 - 3ac + 12d)}{3\sqrt[3]{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}} - \sqrt[3]{\frac{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}{54}} \pm \frac{-a^3 + 4ab - 8c}{4\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{\sqrt[3]{2}(b^2 - 3ac + 12d)}{3\sqrt[3]{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}} + \sqrt[3]{\frac{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}{54}}}}}$$

Forrás: http://planetmath.org/encyclopedia/QuarticFormula.html

Algebrai és transzcendens számok

Algebrai és transzcendens számok

Definíció.

Az α komplex számot **algebrai számnak** nevezzük, ha gyöke valamely nemzéró racionális együtthatós polinomnak. A nem algebrai számokat **transzcendens számoknak** nevezzük.

Definíció.

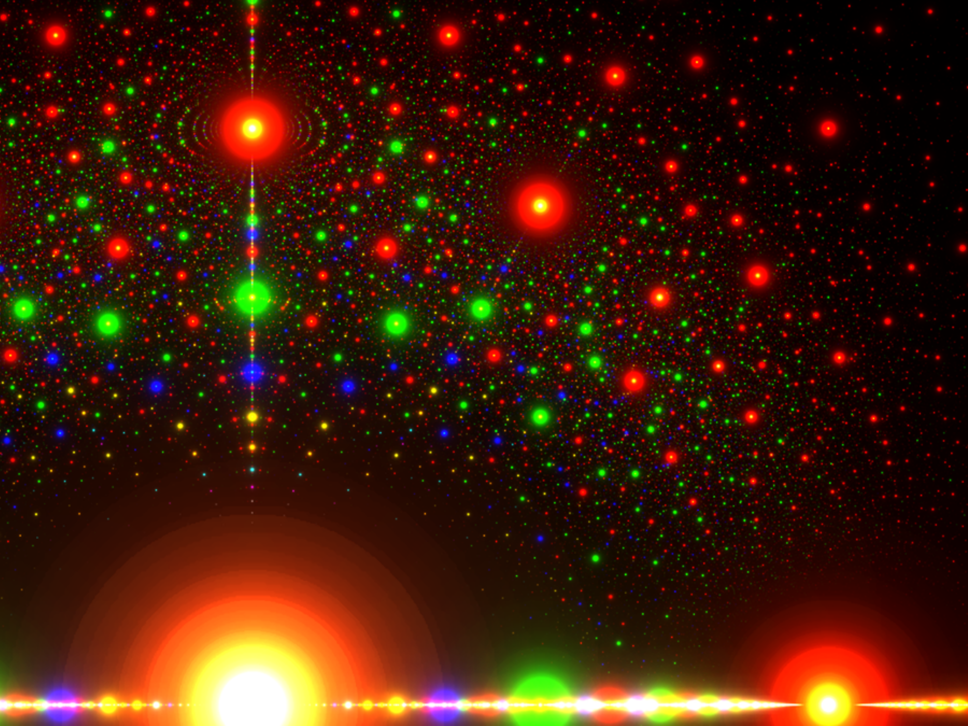
Ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ minimális fokszámú mindazon nemzéró racionális együtthatós főpolinomok között, melyeknek α gyöke, akkor f-et az α algebrai szám **minimálpolinomjának** nevezzük.

Tétel.

Algebrai szám minimálpolinomja mindig egyértelműen meghatározott, és irreducibilis a racionális számtest felett. Továbbá, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ olyan irreducibilis főpolinom melynek az α algebrai szám gyöke, akkor f megegyezik α minimálpolinomjával.

Tétel.

Létezik transzcendens szám.



Algebrai és transzcendens számok

Példa.

- $\sqrt{2}$ algebrai szám, minimálpolinomja: $x^2 - 2$ (miért irreducibilis?).
- $\sqrt[n]{2}$ algebrai szám, minimálpolinomja: $x^n - 2$ (miért irreducibilis?).
- i algebrai szám, minimálpolinomja: $x^2 + 1$ (miért irreducibilis?).
- π és e transzcendens számok.
- A Liouville-féle $\sum \frac{1}{10^{n!}}$ konstans transzcendens szám.
- Gelfond–Schneider-tétel: Ha $\alpha \neq 0, 1$ és $\beta \notin \mathbb{Q}$ algebrai számok, akkor α^β transzcendens szám.

  Például $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ és $i^i = e^{-\pi/2}$ transzcendens számok.

Diofantoszi approximáció

Megjegyzés.

A 6.32. Tétel (egyik) bizonyítása azon múlik, hogy algebrai számokat nem lehet nagyon jól közelíteni racionális számokkal (lásd a 6.38. Tételt). Ez a *diofantoszi approximáció* témaköre: adott α valós számhoz szeretnénk olyan $\frac{p}{q}$ közelítő törtet találni ($p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, $p \perp q$), amelyre $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ kicsi, és q nem túl nagy.

Tétel (Dirichlet approximációs tétele).

Minden α valós szám és minden N természetes szám esetén van α-nak olyan $\frac{p}{q}$ közelítése, amelyre

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq} \quad \text{és} \quad q \leq N.$$

Következmény.

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor végtelen sok olyan $\frac{p}{q}$ közelítése van, amelyre $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

Állítás.

Ha $\alpha \in \mathbb{Q}$, akkor csak véges sok olyan $\frac{p}{q}$ közelítése van, amelyre $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

Diofantoszi approximáció

Tétel (Hurwitz tétele).

Ha α irracionális szám, akkor végtelen sok olyan $\frac{p}{q}$ közelítése van, amelyre

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Ha $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, akkor az állítás nem javítható: nem írhatunk a nevezőbe semmilyen $\sqrt{5}$-nél nagyobb számot.

Tétel (Liouville, Thue, Siegel, Roth).

Ha α irracionális algebrai szám és $\varepsilon > 0$, akkor csak véges sok olyan $\frac{p}{q}$ közelítése van, amelyre

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Algebrai számok és gyökmennyiségek

Tétel.

Az algebrai számok résztestet alkotnak a komplex számok testében.

Tétel.

Ha α algebrai szám és $n \geq 2$, akkor $\sqrt[n]{\alpha}$ is algebrai szám (a gyöknek mind az n értékére).

Definíció.

Az α komplex számot **gyökmennyiségnek** nevezzük, ha megkapható racionális számokból kiindulva a négy alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) és egész kitevős gyökvonás véges számú alkalmazásával.

Következmény.

A gyökmennyiségek algebrai számok.

Példa.

Ez a szám algebrai:

$$\frac{\sqrt[3]{3 - \sqrt{\sqrt[4]{2} + \sqrt[5]{\frac{3}{17}}}} + \sqrt[17]{323 - \sqrt{2014}}}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5}}$$

Algebrai számok és gyökmennyiségek

Tétel.
Van olyan algebrai szám, ami nem gyökmennyiség.

A fenti ártatlannak látszó tételből következik, hogy nem minden egyenlet oldható meg gyökjelek segítségével. Az ötödfokú egyenletnek már nincs általános megoldóképlete, sőt, például az $x^5 - 4x + 2 = 0$ egyenletnek még „ad hoc" megoldóképlete sincs, mert gyökei nem gyökmennyiségek.

Tétel.
Az algebrai számok teste algebrailag zárt, azaz ha $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke a legalább elsőfokú $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomnak, ahol $a_0, \ldots, a_n$ algebrai számok, akkor α maga is algebrai szám.