

Szimmetrikus polinomok

Ha az $f = x^2 - 4x + 10 \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei α_1 és α_2 , akkor

$$x^2 - 4x + 10 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2,$$

következésképp

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 4 \quad \text{és} \quad \alpha_1\alpha_2 = 10.$$

Ezek segítségével a gyökök sokféle kifejezését meghatározhatjuk a gyökök kiszámítása nélkül:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + 1 = 10 + 4 + 1 = 15$$

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2\alpha_1\alpha_2 = 4^2 - 2 \cdot 10 = -4$$

$$\begin{aligned}\alpha_1^3 + \alpha_2^3 &= (\alpha_1 + \alpha_2)^3 - 3\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1\alpha_2^2 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)^3 - 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= 4^3 - 3 \cdot 10 \cdot 4 = -56\end{aligned}$$

Ha az $f = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei α_1 , α_2 és α_3 , akkor

$$\begin{aligned}x^3 + 4x^2 + 5x + 2 &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = \\ &= x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3,\end{aligned}$$

következésképp

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -4, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 5, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -2.$$

Ezek segítségével a gyökök sokféle kifejezését meghatározhatjuk a gyökök kiszámítása nélkül:

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) = (-4)^2 - 2 \cdot 5 = 6$$

$$\begin{aligned}\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 - 3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) \\ &\quad + 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ &= (-4)^3 - 3 \cdot (-4) \cdot (5) + 3 \cdot (-2) = -10\end{aligned}$$

Ha az $f = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei α_1 , α_2 és α_3 , akkor

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -4, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 5, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -2.$$

Ezek segítségével a gyökök sokféle kifejezését meghatározhatjuk a gyökök kiszámítása nélkül:

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 = \\ & = 18 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ & \quad + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)^2 - 27 (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 \\ & \quad - 4 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 4 (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)^3 \\ & = 18 \cdot (-4) \cdot 5 \cdot (-2) + (-4)^2 \cdot 5^2 - 27 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-4)^3 \cdot (-2) - 4 \cdot 5^3 \\ & = 0 \end{aligned}$$

Ezekben a kifejezésekben az a közös, hogy **szimmetrikusak**, azaz invariánsak $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ minden permutációjára. Mivel a Viète-formulákban szereplő $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$ és $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ szimmetrikusak, nem meglepő, hogy minden amit belőlük fel tud(t)unk építeni, szintén szimmetrikus.

Tétel.

Legyenek az n -edfokú $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ főpolinom komplex gyökei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (mindegyiket annyiszor feltüntetve, amennyi a multiplicitása). Ekkor fennállnak az alábbi összefüggések:

$$-a_{n-1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n;$$

$$a_{n-2} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n;$$

$$-a_{n-3} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n;$$

$$\vdots$$

$$(-1)^{n-1} a_1 = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-2}\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-2}\alpha_n + \dots + \alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_{n-1}\alpha_n;$$

$$(-1)^n a_0 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_{n-1}\alpha_n.$$

Megjegyzés.

A fenti képleteket **Viète-formuláknak** hívjuk. A k -adik sor bal oldalán $(-1)^k a_{n-k}$ áll, a jobb oldalon pedig az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ betűkből képezett összes k -tényezős szorzat összege, tehát egy $\binom{n}{k}$ -tagú összeg. Formálisan:

$$(-1)^k a_{n-k} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \cdot \alpha_{i_2} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_k}.$$

Még formálisabban:

$$(-1)^k a_{n-k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \prod_{i \in I} \alpha_i.$$

Definíció.

Adott T test feletti **n -határozatlanú monomnak** nevezzük az $ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ alakú formális kifejezéseket, ahol $0 \neq a \in T$ és $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$. Az ilyen monomok véges összegeit pedig T feletti **n -határozatlanú polinomoknak** nevezzük.

Jelölés.

A T feletti n -határozatlanú polinomok halmazát $T[x_1, \dots, x_n]$ jelöli.

Tétel.

A természetes módon definiált szorzással és összeadással $T[x_1, \dots, x_n]$ integritástartomány.

Megjegyzés.

Az n -határozatlanú polinomok gyűrűjét lehetne rekurzívan is definiálni: legyen

$$T[x_1, \dots, x_n] = (T[x_1, \dots, x_{n-1}])[x_n],$$

azaz a $T[x_1, \dots, x_{n-1}]$ integritástartomány feletti (egyhatározatlanú) polinomgyűrű.

Példa.

$$f = 7x_1^2x_3 - 2x_1x_2x_3^4 + 9x_1x_2 - 3x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2x_3^3 - 2x_1^2 +$$
$$5x_1x_2^2x_3 - x_1^2x_2x_3 - 6x_1x_3 + 2x_3^2 + x_1x_3^2 + 4x_2^2x_3^2 + 8 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$$

$$f = x_1^2 \cdot (-3x_2x_3^2 - x_2x_3 + 7x_3 - 2) +$$
$$x_1 \cdot (5x_2^2x_3 - 2x_2x_3^4 + x_2x_3^3 + 9x_2 + x_3^2 - 6x_3) +$$
$$(4x_2^2x_3^2 + 2x_3^2 + 8) \in \mathbb{R}[x_2, x_3][x_1]$$

$$f = x_1^2 \cdot \left(x_2 \cdot (-3x_3^2 - x_3) + (7x_3 - 2) \right) +$$
$$x_1 \cdot \left(x_2^2 \cdot (5x_3) - x_2 (2x_3^4 + x_3^3 + 9) + (x_3^2 - 6x_3) \right) +$$
$$\left(x_2^2 \cdot (4x_3^2) + (2x_3^2 + 8) \right) \in \mathbb{R}[x_3][x_2][x_1]$$

Definíció.

Az $f \in T[x_1, \dots, x_n]$ polinomot **szimmetrikus polinomnak** nevezzük, ha invariáns a határozatlanok minden permutációjára, azaz

$$\forall \pi \in S_n : f(x_{1\pi}, \dots, x_{n\pi}) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Definíció.

A k -adik n -határozatlanú **elemi szimmetrikus polinom** az x_1, \dots, x_n határozatlanokból képezett összes k -tényezős szorzatok összege ($k = 1, \dots, n$).

Jelölés.

A k -adik n -határozatlanú elemi szimmetrikus polinomot σ_k jelöli (az alaptest és n értéke általában világos a szövegkörnyezetből), tehát

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \dots \cdot x_{i_k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \prod_{i \in I} x_i \in T[x_1, \dots, x_n].$$

Megjegyzés.

Az elemi szimmetrikus polinomokkal már találkoztunk: segítségükkel fejezhetők ki egy komplex együtthatós főpolinom együtthatói a polinom gyökeiből. Tehát a Viète-formulák $\sigma_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (-1)^k a_{n-k}$ alakban is felírhatók.

Példa.

Az elemi szimmetrikus polinomok $n = 2$ esetén:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2$$

Példa.

Az elemi szimmetrikus polinomok $n = 3$ esetén:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3$$

Példa.

Az elemi szimmetrikus polinomok $n = 4$ esetén:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4$$

$$\sigma_4 = x_1 x_2 x_3 x_4$$

Tétel.

A szimmetrikus polinomok részgyűrűt alkotnak a $T[x_1, \dots, x_n]$ polinomgyűrűben.

Tétel (a szimmetrikus polinomok alaptétele).

Bármely szimmetrikus polinom felírható, mégpedig egyetlen módon, az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként. Formálisan:

$$\forall f \in T[x_1, \dots, x_n] : f \text{ szimmetrikus} \implies \exists! h \in T[x_1, \dots, x_n] : f = h(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Példa.

Fejazzük ki az $f = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = \sigma_2 + \sigma_1 + 1 = h(\sigma_1, \sigma_2),$$

ahol $h = x_2 + x_1 + 1$.

Példa.

Fejazzük ki az $f = (x_1 - x_2)^2$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 = h(\sigma_1, \sigma_2),$$

ahol $h = x_1^2 - 4x_2$.

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Mivel f **homogén** harmadfokú polinom, a felírásában csak σ_1^3 , $\sigma_1\sigma_2$ és σ_3 szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^3 + B \cdot \sigma_1\sigma_2 + C \cdot \sigma_3.$$

$$\begin{aligned}\sigma_1^3 &= (x_1 + x_2 + x_3)^3 \\ &= x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_2^2 + 6x_1x_2x_3 + 3x_1x_3^2 + x_2^3 + 3x_2^2x_3 + 3x_2x_3^2 + x_3^3 \\ &= (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 3(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2) + 6x_1x_2x_3 \\ &= (x_1^3 + \dots) + 3(x_1^2x_2 + \dots) + 6x_1x_2x_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1\sigma_2 &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + 3x_1x_2x_3 \\ &= (x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2) + 3x_1x_2x_3 \\ &= (x_1^2x_2 + \dots) + 3x_1x_2x_3\end{aligned}$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Mivel f homogén harmadfokú polinom, a felírásában csak σ_1^3 , $\sigma_1\sigma_2$ és σ_3 szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^3 + B \cdot \sigma_1\sigma_2 + C \cdot \sigma_3.$$

$$\sigma_1^3 = 1 \cdot (x_1^3 + \dots) + 3 \cdot (x_1^2x_2 + \dots) + 6 \cdot x_1x_2x_3$$

$$\sigma_1\sigma_2 = 1 \cdot (x_1^2x_2 + \dots) + 3 \cdot x_1x_2x_3$$

$$\sigma_3 = 1 \cdot x_1x_2x_3$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Mivel f homogén harmadfokú polinom, a felírásában csak σ_1^3 , $\sigma_1\sigma_2$ és σ_3 szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^3 + B \cdot \sigma_1\sigma_2 + C \cdot \sigma_3.$$

$$A \cdot \sigma_1^3 = A \cdot (x_1^3 + \dots) + 3A \cdot (x_1^2 x_2 + \dots) + 6A \cdot x_1 x_2 x_3$$

$$B \cdot \sigma_1\sigma_2 = B \cdot (x_1^2 x_2 + \dots) + 3B \cdot x_1 x_2 x_3$$

$$C \cdot \sigma_3 = C \cdot x_1 x_2 x_3$$

$$\text{cél:} \quad 1 \cdot (x_1^3 + \dots) + 0 \cdot (x_1^2 x_2 + \dots) + 0 \cdot x_1 x_2 x_3$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Mivel f homogén harmadfokú polinom, a felírásában csak σ_1^3 , $\sigma_1\sigma_2$ és σ_3 szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^3 + B \cdot \sigma_1\sigma_2 + C \cdot \sigma_3.$$

A

$3A$

$6A$

B

$3B$

C

cél:

1

0

0

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Mivel f homogén harmadfokú polinom, a felírásában csak σ_1^3 , $\sigma_1\sigma_2$ és σ_3 szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^3 + B \cdot \sigma_1\sigma_2 + C \cdot \sigma_3.$$

Egy lineáris egyenletrendszert kaptunk az A , B , C együtthatókra:

$$A = 1$$

$$3A + B = 0$$

$$6A + 3B + C = 0$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Mivel f homogén harmadfokú polinom, a felírásában csak σ_1^3 , $\sigma_1\sigma_2$ és σ_3 szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^3 + B \cdot \sigma_1\sigma_2 + C \cdot \sigma_3.$$

Egy lineáris egyenletrendszert kaptunk az A , B , C együtthatókra:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ennek van megoldása (akármilyen is van a jobb oldalon), mert a mátrixa trianguláris, és a főátlón nullától különböző számok vannak.

$$A = 1, \quad B = -3, \quad C = 3.$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Mivel f homogén harmadfokú polinom, a felírásában csak σ_1^3 , $\sigma_1\sigma_2$ és σ_3 szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^3 + B \cdot \sigma_1\sigma_2 + C \cdot \sigma_3.$$

$$A = 1, \quad B = -3, \quad C = 3$$

Tehát $f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = h(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, ahol

$$h = x_1^3 - 3x_1x_2 + 3x_3.$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Mivel f homogén negyedfokú polinom, a felírásában csak σ_1^4 , $\sigma_1^2\sigma_2$, σ_2^2 és $\sigma_1\sigma_3$ szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^4 + B \cdot \sigma_1^2\sigma_2 + C \cdot \sigma_2^2 + D \cdot \sigma_1\sigma_3.$$

$$\sigma_1^4 = (x_1^4 + \dots) + 4(x_1^3x_2 + \dots) + 6(x_1^2x_2^2 + \dots) + 12(x_1^2x_2x_3 + \dots)$$

$$\sigma_1^2\sigma_2 = (x_1^3x_2 + \dots) + 2(x_1^2x_2^2 + \dots) + 5(x_1^2x_2x_3 + \dots)$$

$$\sigma_2^2 = (x_1^2x_2^2 + \dots) + 2(x_1^2x_2x_3 + \dots)$$

$$\sigma_1\sigma_3 = (x_1^2x_2x_3 + \dots)$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Mivel f homogén negyedfokú polinom, a felírásában csak σ_1^4 , $\sigma_1^2\sigma_2$, σ_2^2 és $\sigma_1\sigma_3$ szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^4 + B \cdot \sigma_1^2\sigma_2 + C \cdot \sigma_2^2 + D \cdot \sigma_1\sigma_3.$$

$$A \cdot \sigma_1^4 = A(x_1^4 + \dots) + 4A(x_1^3x_2 + \dots) + 6A(x_1^2x_2^2 + \dots) + 12A(x_1^2x_2x_3 + \dots)$$

$$B \cdot \sigma_1^2\sigma_2 = B(x_1^3x_2 + \dots) + 2B(x_1^2x_2^2 + \dots) + 5B(x_1^2x_2x_3 + \dots)$$

$$C \cdot \sigma_2^2 = C(x_1^2x_2^2 + \dots) + 2C(x_1^2x_2x_3 + \dots)$$

$$D \cdot \sigma_1\sigma_3 = D(x_1^2x_2x_3 + \dots)$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Mivel f homogén negyedfokú polinom, a felírásában csak σ_1^4 , $\sigma_1^2\sigma_2$, σ_2^2 és $\sigma_1\sigma_3$ szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^4 + B \cdot \sigma_1^2\sigma_2 + C \cdot \sigma_2^2 + D \cdot \sigma_1\sigma_3.$$

Egy lineáris egyenletrendszert kaptunk az A , B , C , D együtthatókra:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ennek van megoldása (akármilyen is van a jobb oldalon), mert a mátrixa trianguláris, és a főátlón nullától különböző számok vannak.

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Mivel f homogén negyedfokú polinom, a felírásában csak σ_1^4 , $\sigma_1^2\sigma_2$, σ_2^2 és $\sigma_1\sigma_3$ szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^4 + B \cdot \sigma_1^2\sigma_2 + C \cdot \sigma_2^2 + D \cdot \sigma_1\sigma_3.$$

$$A = 1, \quad B = -4, \quad C = 2, \quad D = 4.$$

Tehát $f = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 = h(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, ahol

$$h = x_1^4 - 4x_1^2x_2 + 2x_2^2 + 4x_1x_3.$$

Ha f helyett bármilyen más homogén negyedfokú szimmetrikus polinomot veszünk $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ -ből, akkor csak az egyenletrendszer jobb oldalán álló számok változnak meg. Tehát mindig lesz megoldás, és a megoldás mindig egyértelmű.

Ha egy $f \in T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ szimmetrikus polinomban szerepel egy

$$ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

monom, akkor a szimmetria miatt szerepelni fog (mégpedig ugyanazzal az a együtthatóval) az összes olyan monom, ami ebből a kitevők permutálásával keletkezik: $ax_1^{k_{1\pi}} x_2^{k_{2\pi}} \dots x_n^{k_{n\pi}}$ ($\pi \in S_n$).

Minden szimmetrikus polinom előáll ilyen „monom-családok” összegeként (figyelem, nem minden családnak van $n!$ tagja, lehet kevesebb is!), ezért a szimmetrikus polinomok alaptételének bizonyításához elég azt belátni, hogy minden $n, d \in \mathbb{N}$ esetén a $T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ -beli homogén d -edfokú szimmetrikus polinomokból keletkező mátrix trianguláris, és 1-esek vannak a főátlóján.

A mátrix sorai a $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ elemi szimmetrikus polinomokból készíthető összes d -edfokú szorzatoknak felelnek meg, oszlopai pedig a d -edfokú monomok családjainak. A mátrix elemei nem mások, mint a „szigma-szorzatok” kifejtésében szereplő „család-együtthetők”.

A sorokat és oszlopokat megfelelő sorrendben kell felírni, hogy a mátrix valóban trianguláris legyen. Egy megfelelő sorrendet ad az úgynevezett **lexikografikus rendezés**. Egy másik, nagyon szemléletes rendezés található az alábbi cikkben:

Ben Blum-Smith, Samuel Coskey: *The Fundamental Theorem on Symmetric Polynomials: History's First Whiff of Galois Theory*,
The College Mathematics Journal **48** (2017), 18–29.

<https://doi.org/10.4169/college.math.j.48.1.18>

<https://arxiv.org/abs/1301.7116>

Példa.

Legyenek az $2x^3 + 4x^2 - 6x + 2$ polinom komplex gyökei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Határozzuk meg $\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4$ értékét a gyökök kiszámítása nélkül.

Az előbb kiszámoltuk, hogy

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3.$$

Értékeljük ki mindkét oldalt az $(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ helyen. A Viète-formulák szerint

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -2,$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -3,$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -1.$$

$$\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 = (-2)^4 - 4 \cdot (-2)^2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-3)^2 = 90.$$

Ha az $f = x^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei α_1 és α_2 , akkor

$$x^2 + bx + c = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2,$$

következésképp

$$-b = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{és} \quad c = \alpha_1\alpha_2.$$

Az egyenlet megoldásához magát α_1 -et (vagy α_2 -t) kellene megkapni, ez pedig nem szimmetrikus kifejezés. Valahogyan tehát meg kell törni a szimmetriát.

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = b^2 - 4c$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pm \sqrt{b^2 - 4c}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -b$$

$$2\alpha_1 = -b \pm \sqrt{b^2 - 4c}$$

$$\alpha_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Definíció.

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ főpolinom **diszkriminánsa**:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Példa (a harmadfokú polinom diszkriminánsa).

$$D := (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 4\sigma_1^3 \sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - 27\sigma_3^2$$

Ha $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = x^3 + px + q$, akkor a Viéte-formulák szerint

$$\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0,$$

$$\sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = p,$$

$$\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -q,$$

tehát

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= -4\sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^3 - 27\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^2 \\ &= -4p^3 - 27q^2 = -108 \left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \right) \end{aligned}$$

Az $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ harmadfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x = -\frac{a}{3} + \sqrt[3]{\frac{-2a^3 + 9ab - 27c + \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}} +$$
$$+ \sqrt[3]{\frac{-2a^3 + 9ab - 27c - \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}}$$

Forrás: <http://planetmath.org/encyclopedia/CubicFormula.html>

Az $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ negyedfokú egyenlet megoldóképlete:



Forrás: <http://planetmath.org/encyclopedia/QuarticFormula.html>

