

Elemi törtekre bontás

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Definíció.

Elemi törteknek nevezzük a $\frac{c}{p^k}$ alakú törteket, ahol p prímszám, k és c pozitív egészek, és $c < p$.

Tétel.

Minden racionális szám felírható egy egész szám és elemi törtek összegeként.

Bizonyítás (vázlat).

Három „trükkre” lesz szükségünk:

1. Tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ($a, b \neq 0$) esetén

$$a \perp b \implies \exists x, y \in \mathbb{Z} : \frac{c}{ab} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}.$$

Ezt ismételten alkalmazva minden racionális számot fel tudunk bontani prímszámhatvány nevezőjű törtek összegére. Például:

$$\frac{157}{72} = \frac{157}{2^3 \cdot 3^2} = \frac{x}{2^3} + \frac{y}{3^2} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2}.$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Bizonyítás (folyt.)

2. Maradékos osztás segítségével leválasztva a törtek egészrészét, elérhetjük, hogy minden törtünk $\frac{c}{p^k}$ alakú legyen, ahol $0 < c < p^k$:

$$\frac{157}{72} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2} = 2 + \frac{5}{2^3} + (-1) + \frac{5}{3^2} = 1 + \frac{5}{2^3} + \frac{5}{3^2}.$$

3. Minden $\frac{c}{p^k}$ alakú törtben a számlálót felírjuk p -alapú számrendszerben, és „számjegyenként szétszedjük”:

$$\frac{5}{2^3} = \frac{101_2}{2^3} = \frac{2^2 + 1}{2^3} = \frac{2^2}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3};$$

$$\frac{5}{3^2} = \frac{12_3}{3^2} = \frac{3 + 2}{3^2} = \frac{3}{3^2} + \frac{2}{3^2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}.$$

Tehát a végeredmény:

$$\frac{157}{72} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}.$$

Polinomokra minden ugyanúgy megy

Tetszőleges T test esetén a $T[x]$ polinomgyűrű elemeivel „ugyanúgy” lehet számolni, mint egész számokkal (maradékos osztás, euklideszi algoritmus), ezért az előbbi eljárás T feletti polinomokra is működik.

Definíció.

A T test feletti **racióális törtön** $\frac{f}{g}$ alakú formális kifejezést értünk, ahol $f, g \in T[x]$ és $g \neq 0$. Minden racionális törthöz tartozik egy **racióális törtfüggvény** (a két fogalom nem összekeverendő!). A T feletti racionális törtek halmazát $T(x)$ jelöli.

Definíció.

A T test felett **elemi törtnek** (vagy parciális törtnek) olyan racionális törtet nevezünk, amelyben a nevező T felett irreducibilis (fő)polinom hatványa, és a számláló foka kisebb ezen irreducibilis polinom fokánál:

$$\frac{f}{p^k} \in T(x), \quad \text{ahol } f, p \in T[x], k \in \mathbb{N}, p \text{ irreducibilis } T \text{ felett, } \deg f < \deg p.$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Tétel.

Tetszőleges T test felett minden racionális tört felírható egy polinom és elemi racionális törtek összegeként.

Következmény.

A komplex számok teste felett minden racionális tört felírható egy polinom és véges sok

$$\frac{A}{(x+a)^k} \quad (A, a \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N})$$

alakú racionális tört összegeként.

Következmény.

A valós számok teste felett minden racionális tört felírható egy polinom és véges sok

$$\frac{A}{(x+a)^k} \quad (A, a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}), \text{ illetve}$$
$$\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k} \quad (B, C, b, c \in \mathbb{R}, b^2-4c < 0, k \in \mathbb{N})$$

alakú racionális tört összegeként.

Elemi törtre bontás \mathbb{R} feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére \mathbb{R} felett az $\frac{1}{x^2+x}$ racionális törtet.

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x + A}{x(x+1)}$$

\Leftrightarrow

$$A + B = 0 \text{ és } A = 1$$

\Leftrightarrow

$$A = 1 \text{ és } B = -1$$

Tehát

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Elemi törtekre bontás \mathbb{R} feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére \mathbb{R} felett a $\frac{3x^2 + 2x + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3}$ racionális törtet.

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 + 2x + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3} &= \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3(x^4 + 2x^2 + 1)} = \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1} + \frac{Fx + G}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{Ax^2(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1)^2 + C(x^2+1)^2 + (Dx+E)x^3(x^2+1) + (Fx+G)x^3}{x^3(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{(A+D)x^6 + (B+E)x^5 + (2A+C+D+F)x^4 + (2B+E+G)x^3 + (A+2C)x^2 + Bx + C}{x^3(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

\Updownarrow

$$A + D = 0, \quad B + E = 0, \quad 2A + C + D + F = 0,$$

$$2B + E + G = 0, \quad A + 2C = 3, \quad B = 2, \quad C = 1$$

Elemi törtkre bontás \mathbb{R} feletti racionális törtek körében

Példa (folyt.).

A kapott hétismeretlenes lineáris egyenletrendszert megoldjuk:

$$A = 1, B = 2, C = 1, D = -1, E = -2, F = -2, G = 2.$$

Tehát

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{-x - 2}{x^2 + 1} + \frac{-2x - 2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Elemi törtekre bontás \mathbb{C} feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére \mathbb{C} felett a $\frac{3x^2 + 2x + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3}$ racionális törtet.

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 + 2x + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3} &= \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3(x+i)^2(x-i)^2} = \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+i} + \frac{E}{(x+i)^2} + \frac{F}{x-i} + \frac{G}{(x-i)^2} \\ &\quad \updownarrow\end{aligned}$$

$$A + D + F = 0, \quad B - iD + E + iF + G = 0, \quad 2A + C + D - 2iE + F + 2iG = 0,$$

$$2B - iD - E + iF - G = 0, \quad A + 2C = 3, \quad B = 2, \quad C = 1$$

Elemi törtekre bontás \mathbb{C} feletti racionális törtek körében

Példa (folyt.).

A kapott hétismeretlenes lineáris egyenletrendszert megoldjuk:

$$A = 1, B = 2, C = 1, D = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, E = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, F = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, G = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Tehát

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}{x + i} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{(x + i)^2} + \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}{x - i} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{(x - i)^2}.$$