ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET 3

házi feladatok

2019 őszi félév, OT

1. feladat (szeptember 25) Találjon ki szöveges feladatot a honlapon az „extrák” között a 2. helyen szereplő Wolfram Mathematica demonstrációhoz (`ize.cdf`). A feladat bármilyen korosztálynak szólhat általános iskolától egyetemig. A megoldáson kívül írja le röviden azt is, hogy hányadik osztályosoknak szánja a feladatot, és milyen matematikai fogalmat, összefüggést akar gyakoroltatni (felfedeztetni, elmélyíteni, stb.) a feladattal. Beküldendő emailben szeptember 25-ig. A fájl neve `VezeteknevKeresztnev-hf1.pdf` legyen (ekezetek nelkul), pl. `GipszJakab-hf1.pdf`.

2. feladat (szeptember 12) Hogyan lehet egy 21 és egy 25 literes edény segítségével kimérni 2 liter vizet? (Pluszpontért lehet általánosítani: Hogyan lehet egy a és egy b literes edénnyel kimérni c liter vizet? Milyen c értékek esetén van megoldás, és hogyan lehet azt megtalálni?)

3. feladat (szeptember 12) Egy nyuszi a számegyenesen 0-ból akar eljutni 92-be. Kéféle ugrásra képes (jobbra-balra): a kis ugrás mérete 5 egység, a nagy ugrás mérete 8 egység. Hogyan tud eljutni 92-be? Adjuk meg az összes megoldást (végtelen sok van!).

4. feladat (szeptember 12) Az előző feladatbeli nyuszinak a kisebbik ugráshoz 1 répányi energiára van szüksége, a nagyobbik ugrás energiaigénye pedig 2 répa. Legkevesebb hány répára van szüksége, hogy eljusson a 92-be? Hogyan fest a legenergiatakarékosabb ugrássorozat?

5. feladat (szeptember 12) Adja meg a $117x - 63y = 36$ diofantoszi egyenlet összes olyan (x, y) megoldását, amelyre $0 \leq x, y \leq 20$ teljesül. (Találjon ki szöveges feladatot is hozzá!)

6. feladat Kati néni az utolsó tanítási napon megajándékozta a 2d osztály 30 nebulóját: mindenki választhatott, hogy csokit vagy rágót kér. A csoki 69 Ft-tal drágább, mint a rágó, ezért Kati néni örült, hogy a gyerekek több mint fele rágót kért. Így is 2094 forintja bánja az ajándékozást. Mennyibe került a rágó, illetve a csoki, és melyiket hány gyerek választotta? (A kapott egyenlet nagyon csúnya tud lenni, ha nem a legszerencsésebb módon választjuk meg az ismeretleneket. Azt tanácsolom, hogy legyen x a rágó ára, és legyen y a rágót kérő gyerekek száma.)

7. feladat (szeptember 12) Milyen messze van egymástól a $14x - 38y = 4$ egyenletű egyenesen két szomszédos rácspont?

8. feladat (szeptember 12) Igaz-e tetszőleges a, b, c, d egész számok esetén, hogy $a \perp c \implies ab + cd = 1$?

9. feladat (szeptember 19) Mennyi lehet m értéke, ha $187 \equiv 5 \pmod{m}$ és $311 \equiv 3 \pmod{m}$?

10. feladat (szeptember 19) Igaz-e minden a egész számra, hogy ha $a \equiv 100 \pmod{2019}$, akkor a nem lehet osztható hárommal?

11. feladat (szeptember 19) Milyen számjegyre végződik tízes számrendszerben 1992^{1991}?

12. feladat (szeptember 19) Legfeljebb hány nullára végződhet tízes számrendszerben egy $9^n + 1$ alakú szám?

13. feladat (szeptember 19) Bizonyítsa be (kongruenciák segítségével), hogy $27 \mid 2^{5n+1} + 5^{n+2}$ minden n nemnegatív egész esetén.

14. feladat Bizonyítsa be (kongruenciák segítségével) a 13-mal való oszthatóságra a következő szabályt: Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 13-mal, ha tízes számrendszerbeli alakjából az utolsó jegyet levágva és a kapott számhoz a levágott jegy 4-szeresét adva, az eredmény osztható 13-mal. (Például: $2019 \rightsquigarrow 201 + 4 \cdot 9 = 237 \rightsquigarrow 23 + 4 \cdot 7 = 51 \rightsquigarrow 5 + 4 \cdot 1 = 9$. Mivel $13 \nmid 9$, a teszt azt adja, hogy $13 \nmid 2019$.)

15. feladat (szeptember 26) Hány eleme van a $\mathbb{Z}_{3125}^*$ halmaznak?

16. feladat (szeptember 26) Milyen számot kell írni x helyére, hogy $3, 29, 34, 37, 74, x$ teljes maradékrendszer legyen modulo 6, és egyúttal redukált maradékrendszer legyen modulo 7?

17. feladat (szeptember 26) Oldja meg a $24x \equiv 84 \pmod{45}$ lineáris kongruenciát. (A megoldásokat modulo 45 kell megadni!)

18. feladat (szeptember 26) Ha 44 lámpa van, akkor hova célozzak, hogy a 40-es lámpa gyulladjon ki tizenkettedikként? Keressük meg az összes megoldást, és mindegyiknél állapítsuk meg, hogy összesen hány lámpa fog kigyulladni. (Lásd a honlapon az extrák között heteddikként szereplő biliárdos játékot.)

19. feladat (szeptember 26) Oldja meg újra az 5. feladatban szereplő $117x - 63y = 36$ diofantoszi egyenletet úgy, hogy átfogalmazza lineáris kongruenciává.

20. feladat (szeptember 26) Milyen számjegyeket kell írni a és b helyére, hogy $\overline{1ab32}$ osztható legyen 47-tel?

21. feladat (szeptember 26) Igaz-e, hogy az $ax \equiv b \pmod{m}$ lineáris kongruenciának akkor és csak akkor van megoldása, ha $\operatorname{lnko}(a, b) \mid m$ (tetszőleges $a, b, m \in \mathbb{Z}, m \geq 2$ esetén)?

22. feladat (szeptember 26) Számítsa ki a $\overline{3}^{-4}$ hatványt $\mathbb{Z}_{17}$-ben.

23. feladat (október 3) Mennyi a maradék, ha a $2012^{2013} + 2013^{2012}$ összeget elosztjuk $2012 \cdot 2013$-mal? (Útmutatás: Könnyen kiszámolható a modulo 2012 és a modulo 2013 maradék (ugye?). Ezekből egy kongruenciarendszerrel ki lehet számítani a modulo $2012 \cdot 2013$ maradékot.)

24. feladat (október 3) Oldja meg az alábbi lineáris kongruenciarendszert.

$$\left.\begin{aligned} 3x &\equiv 5 \pmod{10} \\ 3x &\equiv 17 \pmod{8} \\ 14x &\equiv 10 \pmod{6} \end{aligned}\right\}$$

25. feladat (október 3) A kínai maradéktétel segítségével oldja meg az alábbi paraméteres kongruenciarendszert.

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv a \pmod{3} \\ x &\equiv b \pmod{4} \\ x &\equiv c \pmod{5} \end{aligned}\right\}$$

26. feladat (október 3) A 3d osztály kirándulni ment. Ötfős szobákban szállásolták el őket, így négy gyerek kénytelen volt Marcsi nénivel egy szobában aludni. Éjszaka Bence olyan rosszul viselkedett, hogy Marcsi néni felhívta a szüleit, akik már hajnalban hazavitték. Így a reggelinél szépen elfértek a gyerekek a hétszemélyes asztaloknál (Marcsi néni külön asztalnál ült). Panka gyomorrontást kapott a reggelitől, ezért délelőtt őt is hazavitték. Ebédnél az étteremben minden asztalnál kilenc gyerek ült (Marcsi néni külön asztalnál). Hányan járnak a 3d osztályba?

27. feladat (október 3) Igaz-e, hogy ha egy kongruenciarendszerben a modulusok nem relatív prímek, akkor a kongruenciarendszernek biztosan nincs megoldása?

28. feladat (október 17) Mennyi 10^{100} osztóinak szorzata?

29. feladat Mennyi $7!$ osztóinak száma és osztóinak összege?

30. feladat (november 7) Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek oldalai egész számok, és egyik befogója 10^{2019}? (Egybevágó háromszögeket nem különböztetünk meg.)

31. feladat (kahoot) Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek 25 osztója van?

32. feladat (kahoot) Milyen n természetes számokra lesz $\tau(n)$ páratlan?

33. feladat Oldja meg a $\sigma(n) = 93$ egyenletet a természetes számok halmazán.

34. feladat (október 9) Rajzolja le a komplex számsíkon azokat a számokat, amelyeknek abszolút értéke 1, argumentuma pedig „nevezetes” szög, azaz $\frac{\pi}{6}$ vagy $\frac{\pi}{4}$ egész számú többszöröse (tizenhat ilyen szám van). Mindegyik számot írja fel kanonikus és trigonometrikus alakban is (a szöget radiánban felírva), és mindegyiknél adja meg azt is, hogy hányadik primitív egységgyök. Beküldendő emailben, szkennelt pdf fájlban október 9-ig. A fájl neve `VezeteknevKeresztnev-hf2.pdf` legyen (ekezetek nelkul), pl. `GipszJakab-hf2.pdf`.

35. feladat (október 17) Számítsa ki $\varphi(7!)$ értékét.

36. feladat (október 17) Mennyit ad 11-gyel osztva maradékul 123^{123}?

37. feladat (október 17) Mennyit ad 44-gyel osztva maradékul 4447^{2018}?

38. feladat (október 17) Mennyit ad 53-mal osztva maradékul $80^{\left(111^{50}\right)}$?

39. feladat (október 24) Mennyit ad héttel osztva maradékul $111\ldots111$ (99 egyes)?

40. feladat (október 24) Hány kilencest kell egymás mellé írni, hogy a kapott $99\cdots99$ alakú szám osztható legyen 17-tel?

41. feladat (október 16) Nézze meg a jegyzetben a reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria és tranzitivitás definícióját (3.2. Definíció és 3.11. Definíció), majd döntse el a honlapon az „extrák” között a 17. helyen szereplő `relaciopeldak.pdf` fájlban szereplő relációkról, hogy rendelkeznek-e ezekkel a tulajdonságokkal. Írjon ennek megfelelően „igen”-t vagy „nem”-et a táblázat első négy oszlopába, az utolsó oszlopba pedig írjon olyan szabályt, ami épp az adott relációt definiálja. Beküldendő emailben október 16-ig. A fájl neve `VezeteknevKeresztnev-hf3` legyen (ekezetek nelkul), pl. `GipszJakab-hf3`.

42. feladat (október 24) Legyen f az $F(n) = n^2$ számelméleti függvény megfordítási függvénye. Számítsa ki $f(12)$ értékét.

43. feladat (október 24) Határozza meg az $A/\ker f$ osztályozást, ahol $A = \mathbb{Z}_8$ és $f\colon A \to \mathbb{Z}_8$, $x \mapsto x^2$.

44. feladat (október 24) Határozza meg az $A/\ker f$ osztályozást, ahol $A = \{-2, \ldots, 3\}$ és $f\colon A \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto |x|$. Írja fel az osztályozást akkor is, ha az f függvényt az $A = \mathbb{Z}$ halmazon értelmezzük.

45. feladat (október 24) Határozza meg az $A/\ker f$ osztályozást, ahol $A = \{-2, \ldots, 3\}$ és $f\colon A \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \operatorname{sgn} x$. Írja fel az osztályozást akkor is, ha az f függvényt az $A = \mathbb{R}$ halmazon értelmezzük.

46. feladat (november 7) Legyen A a következő matematikusok halmaza: Bolyai Farkas, Bolyai János, Euklidész, Leonhard Euler, Pierre de Fermat, Évariste Galois, Carl Friedrich Gauss, August Ferdinand Möbius, John Wilson. Az $f\colon A \to \mathbb{Z}$

leképezés minden matematikushoz azt az évszázadot rendeli, amelyikben született. Határozza meg f értékkészletét és az $A/\ker f$ osztályozást, majd állítsa elő az f leképezést egy szürjektív és egy injektív leképezés szorzataként.

47. feladat (november 7) Rajzolja fel a $(D_{100}; |)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját.

48. feladat (november 7) Rajzolja fel a $(D_{30}; |)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját.

49. feladat (november 7) Rajzolja fel a $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}); \subseteq)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját.

50. feladat (november 7) Rajzoljon fel minél több 4-pontú Hasse-diagramot.

51. feladat (november 7) Ismételje át a leképezésekről tanultakat (injektív, szürjektív, bijektív leképezések, leképezések szorzata és inverze), majd olvassa el a jegyzetből a 4. fejezet első felét (4.1–4.8).

52. feladat (november 21) Rajzolja fel az összes 4-pontú Hasse-diagramot, és mindegyiknél határozza meg a legkisebb, legnagyobb, minimális, maximális elemeket.

53. feladat (november 21) Rajzolja fel azt a Hasse-diagramot, ami a rikiki játékban a lapok erősségét szemlélteti (legyen mondjuk treff az adu). Mik a legkisebb, legnagyobb, minimális, maximális elemek?

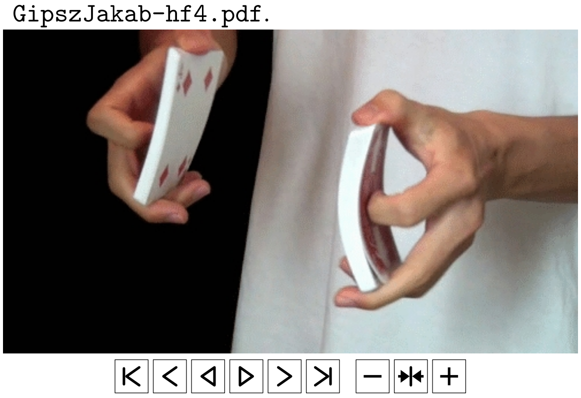
54. feladat (november 21) Adja meg idegen ciklusok szorzataként az $(1234)^{-1}(1524)(1234) \in S_5$ permutációt.

55. feladat (november 21) Adja meg a $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 7 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_8$ permtáció 2019-edik hatványát kétsoros alakban és idegen ciklusok szorzataként is.

56. feladat (november 21) Oldja meg S_6-ban az $(123)(2345)\pi(456) = (134)$ egyenletet.

57. feladat (november 21) Oldja meg S_5-ben a $\pi^2 = (134)$ egyenletet (több megoldás van; az összeset keressük meg!).

58. feladat (november 20) Egy 32 lapos magyarkártya-pakli „tökéletes” keverésénél a paklit pontosan középen kettéosztjuk, és a két felet „fésűsen” egyesítjük (az eredetileg felül lévő lap kerül felülre, és az eredetileg alul lévő lap kerül alulra). Milyen a ciklusszerkezete a keverést leíró permutációnak? Mi történik, ha többször egymás után végrehajtjuk ezt a keverést? Beküldendő emailben, pdf fájlban november 20-ig. A fájl neve `VezeteknevKeresztnev-hf4.pdf` legyen (ekezetek nelkul), pl. `GipszJakab-hf4.pdf`.



59. feladat (november 28) Határozza meg a következő három permutáció paritását, minél egyszerűbben (a π permutációt lásd az 55. feladatban):

$$\left((1346)(45761)(352)(4162)\right)^{2019}, \quad (12)(45)(1245), \quad \pi^{33550336}.$$

60. feladat (november 21) Ismételje át a polinomokról korábban tanultakat, és olvassa el a jegyzetből a polinomokról szóló fejezet első négy részét (5.1–5.40). A következő két feladat megoldásához további segítséget talál a honlapon az „extrák” között (a 25. helyen).

61. feladat (november 21) Számítsa ki az f és g polinomok legnagyobb közös osztóját, és adja meg az $fu + gv = \mathrm{lnko}(f,g)$ egyenlet egy megoldását az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben.

$$f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3, \qquad g = x^3 + x^2 + x - 3$$

62. feladat (november 21) Adja meg az $fu + gv = \overline{1}$ egyenlet egy megoldását a $\mathbb{Z}_7[x]$ polinomgyűrűben.

$$f = x^3 + x + \overline{1}, \qquad g = \overline{3}x^2 + \overline{2}$$

63. feladat (november 27) Ha az 58. feladatbeli módszerrel keverünk egy n lapból álló paklit (n páros), akkor hány keverés után áll vissza az alapsorrend? Próbáljon minél egyszerűbb módszert adni a keverések számának meghatározására (ne kelljen felírni az összes ciklust). Beküldendő emailben, pdf fájlban november 27-ig. A fájl neve `VezeteknevKeresztnev-hf5.pdf` legyen (ekezetek nelkul), pl. `GipszJakab-hf5.pdf`.

64. feladat (november 28) Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az $f = x^6 + \overline{3}x^4 - x^3 + \overline{2}x^2 + x - \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomot.

65. feladat (november 28) Bizonyítsa be, hogy $\cos 20^\circ$ gyöke a $8x^3 - 6x - 1$ polinomnak.

66. feladat (november 28) Határozza meg az $f = 2x^6 - 2x^5 - 4x^3 - 6x^2 - 2x - 4$ polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}$ felett.

67. feladat (november 28) Határozza meg az $f = 5x^8 - 5x^7 + 4x^2 - 2x - 2$ polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}$ felett.

68. feladat Határozza meg az $f = x^6 + 125$ polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}$ felett.

69. feladat Határozza meg az $f = x^4 + 36$ polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}$ felett.

70. feladat Határozza meg az $f = x^8 - 81$ polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}$ felett.

71. feladat Határozza meg az $f = x^4 - x^2 + 1$ polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}$ felett.

72. feladat Határozza meg az $f = x^7 + 7x^4 - 8x$ polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}$ felett.