Irreducibilis polinomok $\mathbb{Q}$ felett

5.5. Tétel (Rolle(?) tétele).

Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ egy tetszőleges egész együtthatós polinom. Ha $\frac{p}{q}$ egy egyszerűsíthetetlen tört alakjában felírt racionális szám (azaz $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ és $\operatorname{lnko}(p, q) = 1$), akkor

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \implies q \mid a_n \text{ és } p \mid a_0.$$

Racionális gyökök

5.5. Tétel (Rolle(?) tétele).

Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ egy tetszőleges egész együtthatós polinom. Ha $\frac{p}{q}$ egy egyszerűsíthetetlen tört alakjában felírt racionális szám (azaz $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ és $\operatorname{lnko}(p, q) = 1$), akkor

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \implies q \mid a_n \text{ és } p \mid a_0.$$

Speciálisan: egész együtthatós főpolinom racionális gyökei mindig egész számok.

Racionális gyökök

5.5. Tétel (Rolle(?) tétele).

Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ egy tetszőleges egész együtthatós polinom. Ha $\frac{p}{q}$ egy egyszerűsíthetetlen tört alakjában felírt racionális szám (azaz $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ és $\operatorname{lnko}(p, q) = 1$), akkor

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \implies q \mid a_n \text{ és } p \mid a_0.$$

Speciálisan: egész együtthatós főpolinom racionális gyökei mindig egész számok.

Természetesen a fenti nyíl nem fordítható meg: $q \mid a_n$ és $p \mid a_0$ nem garantálja, hogy $\frac{p}{q}$ gyöke f-nek.

Racionális gyökök

5.5. Tétel (Rolle(?) tétele).

Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ egy tetszőleges egész együtthatós polinom. Ha $\frac{p}{q}$ egy egyszerűsíthetetlen tört alakjában felírt racionális szám (azaz $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ és $\operatorname{lnko}(p, q) = 1$), akkor

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \implies q \mid a_n \text{ és } p \mid a_0.$$

Speciálisan: egész együtthatós főpolinom racionális gyökei mindig egész számok.

Természetesen a fenti nyíl nem fordítható meg: $q \mid a_n$ és $p \mid a_0$ nem garantálja, hogy $\frac{p}{q}$ gyöke f-nek.

A Rolle-tételben „az a jó”, hogy egy véges halmazt ad meg, amelyben az összes racionális gyököt megtalálhatjuk (ha van egyáltalán racionális gyök).

Racionális gyökök

Példa (22a).

Határozzuk meg a $f = 8x^3 - 6x - 1$ polinom racionális gyökeit.

Racionális gyökök

Példa (22a).

Határozzuk meg a $f = 8x^3 - 6x - 1$ polinom racionális gyökeit.

Racionális gyök csak

Racionális gyökök

Példa (22a).

Határozzuk meg a $f = 8x^3 - 6x - 1$ polinom racionális gyökeit.

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$ lehet.

Példa (22a).

Határozzuk meg a $f = 8x^3 - 6x - 1$ polinom racionális gyökeit.

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$ lehet.
Ha mindet kipróbáljuk, azt tapasztaljuk, hogy egyik sem gyöke f-nek.

Racionális gyökök

Példa (22a).

Határozzuk meg a $f = 8x^3 - 6x - 1$ polinom racionális gyökeit.

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$ lehet.

Ha mindet kipróbáljuk, azt tapasztaljuk, hogy egyik sem gyöke f-nek.

Tehát az f polinomnak nincs racionális gyöke.

Racionális gyökök

Példa (22a).

Határozzuk meg a $f = 8x^3 - 6x - 1$ polinom racionális gyökeit.

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$ lehet.

Ha mindet kipróbáljuk, azt tapasztaljuk, hogy egyik sem gyöke f-nek.

Tehát az f polinomnak nincs racionális gyöke.

Megjegyzés.

Mivel f csak harmadfokú, és nincs racionális gyöke, ezért f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett (lásd az 5.8. Állítást).

Racionális gyökök

Példa (22a).

Határozzuk meg a $f = 8x^3 - 6x - 1$ polinom racionális gyökeit.

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$ lehet.

Ha mindet kipróbáljuk, azt tapasztaljuk, hogy egyik sem gyöke f-nek.

Tehát az f polinomnak nincs racionális gyöke.

Megjegyzés.

Mivel f csak harmadfokú, és nincs racionális gyöke, ezért f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett (lásd az 5.8. Állítást). Kis trigonometriai bűvészkedéssel meg lehet mutatni, hogy $\cos 20^\circ = \cos \frac{2\pi}{9}$ gyöke f-nek.

Racionális gyökök

Példa (22a).

Határozzuk meg a $f = 8x^3 - 6x - 1$ polinom racionális gyökeit.

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$ lehet.

Ha mindet kipróbáljuk, azt tapasztaljuk, hogy egyik sem gyöke f-nek.

Tehát az f polinomnak nincs racionális gyöke.

Megjegyzés.

Mivel f csak harmadfokú, és nincs racionális gyöke, ezért f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett (lásd az 5.8. Állítást). Kis trigonometriai bűvészkedéssel meg lehet mutatni, hogy $\cos 20^\circ = \cos \frac{2\pi}{9}$ gyöke f-nek. Tehát $\cos \frac{2\pi}{9}$ irracionális szám.

Racionális gyökök

Példa (22a).

Határozzuk meg a $f = 8x^3 - 6x - 1$ polinom racionális gyökeit.

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$ lehet.

Ha mindet kipróbáljuk, azt tapasztaljuk, hogy egyik sem gyöke f-nek.

Tehát az f polinomnak nincs racionális gyöke.

Megjegyzés.

Mivel f csak harmadfokú, és nincs racionális gyöke, ezért f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett (lásd az 5.8. Állítást). Kis trigonometriai bűvészkedéssel meg lehet mutatni, hogy $\cos 20^\circ = \cos \frac{2\pi}{9}$ gyöke f-nek. Tehát $\cos \frac{2\pi}{9}$ irracionális szám.

Valójában f a legkisebb fokú egész együtthatós polinom, aminek gyöke $\cos \frac{2\pi}{9}$. Ezen alapul annak a nevezetes ténynek a bizonyítása, hogy euklideszi szerkesztéssel nem lehet bármely szöget harmadolni (például a 60°-os szöget nem lehet), illetve hogy nem lehet szabályos kilencszöget szerkeszteni.

Racionális gyökök

Példa (22b).

Határozzuk meg az alábbi polinom racionális gyökeit:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

Racionális gyökök

Példa (22b).

Határozzuk meg az alábbi polinom racionális gyökeit:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

Racionális gyök csak

Racionális gyökök

Példa (22b).

Határozzuk meg az alábbi polinom racionális gyökeit:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ lehet.

Racionális gyökök

Példa (22b).

Határozzuk meg az alábbi polinom racionális gyökeit:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ lehet.

Ezek közül -1 és $-\frac{1}{2}$ valóban gyök.

Racionális gyökök

Példa (22b).

Határozzuk meg az alábbi polinom racionális gyökeit:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ lehet.

Ezek közül -1 és $-\frac{1}{2}$ valóban gyök. Horner-módszerrel leválasztva a gyöktényezőket azt kapjuk, hogy

$$f = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x+1)^2\left(2x^4 + 12x + 24\right) = (2x+1)(x+1)^2\left(x^4 + 6x + 12\right).$$

Racionális gyökök

Példa (22b).

Határozzuk meg az alábbi polinom racionális gyökeit:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ lehet.

Ezek közül -1 és $-\frac{1}{2}$ valóban gyök. Horner-módszerrel leválasztva a gyöktényezőket azt kapjuk, hogy

$$f = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x+1)^2\left(2x^4 + 12x + 24\right) = (2x+1)(x+1)^2\left(x^4 + 6x + 12\right).$$

Megjegyzés.

A kék polinomnak már nincs racionális gyöke (ha lenne, megtaláltuk volna), de mivel negyedfokú, ebből még nem következik, hogy irreducibilis.

Áttérés egész együtthatós polinomra

Bármely $\mathbb{Q}$ feletti polinomból tudunk $\mathbb{Z}$ feletti polinomot csinálni a fellépő törtek közös nevezőjének kiemelésével.

Példa.

$$f = \frac{15}{7}x^2 + \frac{45}{4}x + \frac{5}{2} =$$

Áttérés egész együtthatós polinomra

Bármely $\mathbb{Q}$ feletti polinomból tudunk $\mathbb{Z}$ feletti polinomot csinálni a fellépő törtek közös nevezőjének kiemelésével.

Példa.

$$f = \frac{15}{7}x^2 + \frac{45}{4}x + \frac{5}{2} = \frac{60}{28}x^2 + \frac{315}{28}x + \frac{70}{28}$$

Áttérés egész együtthatós polinomra

Bármely $\mathbb{Q}$ feletti polinomból tudunk $\mathbb{Z}$ feletti polinomot csinálni a fellépő törtek közös nevezőjének kiemelésével.

Példa.

$$f = \frac{15}{7}x^2 + \frac{45}{4}x + \frac{5}{2} = \frac{60}{28}x^2 + \frac{315}{28}x + \frac{70}{28}$$

$$= \frac{1}{28} \cdot \left(60x^2 + 315x + 70\right) =$$

Áttérés egész együtthatós polinomra

Bármely $\mathbb{Q}$ feletti polinomból tudunk $\mathbb{Z}$ feletti polinomot csinálni a fellépő törtek közös nevezőjének kiemelésével.

Példa.

$$f = \frac{15}{7}x^2 + \frac{45}{4}x + \frac{5}{2} = \frac{60}{28}x^2 + \frac{315}{28}x + \frac{70}{28}$$

$$= \frac{1}{28} \cdot \left(60x^2 + 315x + 70\right) = \underbrace{\frac{5}{28}}_{r} \cdot (\underbrace{12x^2 + 63x + 14}_{f^*}).$$

Áttérés egész együtthatós polinomra

Bármely $\mathbb{Q}$ feletti polinomból tudunk $\mathbb{Z}$ feletti polinomot csinálni a fellépő törtek közös nevezőjének kiemelésével.

Példa.

$$f = \frac{15}{7}x^2 + \frac{45}{4}x + \frac{5}{2} = \frac{60}{28}x^2 + \frac{315}{28}x + \frac{70}{28}$$

$$= \frac{1}{28} \cdot \left(60x^2 + 315x + 70\right) = \underbrace{\frac{5}{28}}_{r} \cdot (\underbrace{12x^2 + 63x + 14}_{f^*}).$$

A fenti példában $f \sim f^*$, és persze ez a példa könnyen általánosítható: $\mathbb{Q}[x]$-ben asszociáltság erejéig mindig lehet egész együtthatós polinomokkal számolni.

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

Minket a $\mathbb{Q}$ feletti irreducibilitás érdekel (mert $\mathbb{Q}$ test, $\mathbb{Z}$ pedig nem az), ezért jó lenne kapcsolatot találni a $\mathbb{Q}$ feletti felbontások és a $\mathbb{Z}$ feletti felbontások között.

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

Minket a $\mathbb{Q}$ feletti irreducibilitás érdekel (mert $\mathbb{Q}$ test, $\mathbb{Z}$ pedig nem az), ezért jó lenne kapcsolatot találni a $\mathbb{Q}$ feletti felbontások és a $\mathbb{Z}$ feletti felbontások között.

Példa.

$$72x^5 - 102x^4 - 2244x^3 + 208x^2 - 1036x - 280$$

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

Minket a $\mathbb{Q}$ feletti irreducibilitás érdekel (mert $\mathbb{Q}$ test, $\mathbb{Z}$ pedig nem az), ezért jó lenne kapcsolatot találni a $\mathbb{Q}$ feletti felbontások és a $\mathbb{Z}$ feletti felbontások között.

Példa.

$$72x^5 - 102x^4 - 2244x^3 + 208x^2 - 1036x - 280 \quad =$$

$$= \; \left(\tfrac{15}{7}x^2 + \tfrac{45}{4}x + \tfrac{5}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{168}{5}x^3 - 224x^2 + \tfrac{448}{5}x - 112\right)$$

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

Minket a $\mathbb{Q}$ feletti irreducibilitás érdekel (mert $\mathbb{Q}$ test, $\mathbb{Z}$ pedig nem az), ezért jó lenne kapcsolatot találni a $\mathbb{Q}$ feletti felbontások és a $\mathbb{Z}$ feletti felbontások között.

Példa.

$$\begin{aligned} 72x^5 - 102x^4 - 2244x^3 + 208x^2 - 1036x - 280 &= \\ = \left(\tfrac{15}{7}x^2 + \tfrac{45}{4}x + \tfrac{5}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{168}{5}x^3 - 224x^2 + \tfrac{448}{5}x - 112\right) &= \\ = \tfrac{5}{28}\left(12x^2 + 63x + 14\right) \cdot \tfrac{56}{5}\left(3x^3 - 20x^2 + 8x - 10\right) & \end{aligned}$$

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

Minket a $\mathbb{Q}$ feletti irreducibilitás érdekel (mert $\mathbb{Q}$ test, $\mathbb{Z}$ pedig nem az), ezért jó lenne kapcsolatot találni a $\mathbb{Q}$ feletti felbontások és a $\mathbb{Z}$ feletti felbontások között.

Példa.

$$\begin{aligned}
& 72x^5 - 102x^4 - 2244x^3 + 208x^2 - 1036x - 280 &= \\
= \quad & \left(\tfrac{15}{7}x^2 + \tfrac{45}{4}x + \tfrac{5}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{168}{5}x^3 - 224x^2 + \tfrac{448}{5}x - 112\right) &= \\
= \quad & \tfrac{5}{28}\left(12x^2 + 63x + 14\right) \cdot \tfrac{56}{5}\left(3x^3 - 20x^2 + 8x - 10\right) &= \\
= \quad & \tfrac{5}{28}\tfrac{56}{5} \cdot \left(12x^2 + 63x + 14\right)\left(3x^3 - 20x^2 + 8x - 10\right) &
\end{aligned}$$

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

Minket a $\mathbb{Q}$ feletti irreducibilitás érdekel (mert $\mathbb{Q}$ test, $\mathbb{Z}$ pedig nem az), ezért jó lenne kapcsolatot találni a $\mathbb{Q}$ feletti felbontások és a $\mathbb{Z}$ feletti felbontások között.

Példa.

$$\begin{aligned}
72x^5 - 102x^4 - 2244x^3 + 208x^2 - 1036x - 280 &= \\
= \left(\tfrac{15}{7}x^2 + \tfrac{45}{4}x + \tfrac{5}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{168}{5}x^3 - 224x^2 + \tfrac{448}{5}x - 112\right) &= \\
= \tfrac{5}{28}\left(12x^2 + 63x + 14\right) \cdot \tfrac{56}{5}\left(3x^3 - 20x^2 + 8x - 10\right) &= \\
= \tfrac{5}{28}\tfrac{56}{5} \cdot \left(12x^2 + 63x + 14\right)\left(3x^3 - 20x^2 + 8x - 10\right) &= \\
= 2 \cdot \left(12x^2 + 63x + 14\right)\left(3x^3 - 20x^2 + 8x - 10\right)
\end{aligned}$$

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

Minket a $\mathbb{Q}$ feletti irreducibilitás érdekel (mert $\mathbb{Q}$ test, $\mathbb{Z}$ pedig nem az), ezért jó lenne kapcsolatot találni a $\mathbb{Q}$ feletti felbontások és a $\mathbb{Z}$ feletti felbontások között.

Példa.

$$\begin{aligned}
& 72x^5 - 102x^4 - 2244x^3 + 208x^2 - 1036x - 280 && = \\
= \quad & \left(\tfrac{15}{7}x^2 + \tfrac{45}{4}x + \tfrac{5}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{168}{5}x^3 - 224x^2 + \tfrac{448}{5}x - 112\right) && = \\
= \quad & \tfrac{5}{28}\left(12x^2 + 63x + 14\right) \cdot \tfrac{56}{5}\left(3x^3 - 20x^2 + 8x - 10\right) && = \\
= \quad & \tfrac{5}{28}\tfrac{56}{5} \cdot \left(12x^2 + 63x + 14\right)\left(3x^3 - 20x^2 + 8x - 10\right) && = \\
= \quad & 2 \cdot \left(12x^2 + 63x + 14\right)\left(3x^3 - 20x^2 + 8x - 10\right) && = \\
= \quad & \left(24x^2 + 126x + 28\right) \cdot \left(3x^3 - 20x^2 + 8x - 10\right)
\end{aligned}$$

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

5.10. Tétel.

Ha egy legalább elsőfokú egész együtthatós polinom nem bontható fel nála kisebb fokszámú egész együtthatós polinomok szorzatára, akkor $\mathbb{Q}$ felett sem bomlik így fel, és viszont. Formálisan: ha $f \in \mathbb{Z}[x]$ és $\deg f = n \geq 1$, akkor az alábbi két állítás ekvivalens:

(1) $\nexists g, h \in \mathbb{Z}[x] : f = gh \;$ és $\; 0 < \deg g, \deg h < n$;

(2) $\nexists g, h \in \mathbb{Q}[x] : f = gh \;$ és $\; 0 < \deg g, \deg h < n$.

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

5.10. Tétel.

Ha egy legalább elsőfokú egész együtthatós polinom nem bontható fel nála kisebb fokszámú egész együtthatós polinomok szorzatára, akkor $\mathbb{Q}$ felett sem bomlik így fel, és viszont. Formálisan: ha $f \in \mathbb{Z}[x]$ és $\deg f = n \geq 1$, akkor az alábbi két állítás ekvivalens:

(1) $\nexists g, h \in \mathbb{Z}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$;

(2) $\nexists g, h \in \mathbb{Q}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$.

5.11. Megjegyzés.

Mivel $\mathbb{Q}$ test, ezért $\mathbb{Q}[x]$ egységei

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

5.10. Tétel.

Ha egy legalább elsőfokú egész együtthatós polinom nem bontható fel nála kisebb fokszámú egész együtthatós polinomok szorzatára, akkor $\mathbb{Q}$ felett sem bomlik így fel, és viszont. Formálisan: ha $f \in \mathbb{Z}[x]$ és $\deg f = n \geq 1$, akkor az alábbi két állítás ekvivalens:

(1) $\nexists g, h \in \mathbb{Z}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$;

(2) $\nexists g, h \in \mathbb{Q}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$.

5.11. Megjegyzés.

Mivel $\mathbb{Q}$ test, ezért $\mathbb{Q}[x]$ egységei a nemnulla konstans polinomok.

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

5.10. Tétel.

Ha egy legalább elsőfokú egész együtthatós polinom nem bontható fel nála kisebb fokszámú egész együtthatós polinomok szorzatára, akkor $\mathbb{Q}$ felett sem bomlik így fel, és viszont. Formálisan: ha $f \in \mathbb{Z}[x]$ és $\deg f = n \geq 1$, akkor az alábbi két állítás ekvivalens:

(1) $\nexists g, h \in \mathbb{Z}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$;

(2) $\nexists g, h \in \mathbb{Q}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$.

5.11. Megjegyzés.

Mivel $\mathbb{Q}$ test, ezért $\mathbb{Q}[x]$ egységei a nemnulla konstans polinomok. Ebből következik, hogy az alábbi két feltétel ekvivalens minden n-edfokú $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom esetén (lásd az 5.6. Állítást):

(2) $\nexists g, h \in \mathbb{Q}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$;

(2') f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

5.10. Tétel.

Ha egy legalább elsőfokú egész együtthatós polinom nem bontható fel nála kisebb fokszámú egész együtthatós polinomok szorzatára, akkor $\mathbb{Q}$ felett sem bomlik így fel, és viszont. Formálisan: ha $f \in \mathbb{Z}[x]$ és $\deg f = n \geq 1$, akkor az alábbi két állítás ekvivalens:

(1) $\nexists g, h \in \mathbb{Z}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$;

(2) $\nexists g, h \in \mathbb{Q}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$.

5.11. Megjegyzés (folyt.).

Viszont $\mathbb{Z}$ nem test: $\mathbb{Z}[x]$-ben csak

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

5.10. Tétel.

Ha egy legalább elsőfokú egész együtthatós polinom nem bontható fel nála kisebb fokszámú egész együtthatós polinomok szorzatára, akkor $\mathbb{Q}$ felett sem bomlik így fel, és viszont. Formálisan: ha $f \in \mathbb{Z}[x]$ és $\deg f = n \geq 1$, akkor az alábbi két állítás ekvivalens:

(1) $\nexists g, h \in \mathbb{Z}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$;

(2) $\nexists g, h \in \mathbb{Q}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$.

5.11. Megjegyzés (folyt.).

Viszont $\mathbb{Z}$ nem test: $\mathbb{Z}[x]$-ben csak a konstans 1 és konstans -1 polinomok egységek.

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

5.10. Tétel.

Ha egy legalább elsőfokú egész együtthatós polinom nem bontható fel nála kisebb fokszámú egész együtthatós polinomok szorzatára, akkor $\mathbb{Q}$ felett sem bomlik így fel, és viszont. Formálisan: ha $f \in \mathbb{Z}[x]$ és $\deg f = n \geq 1$, akkor az alábbi két állítás ekvivalens:

(1) $\nexists g, h \in \mathbb{Z}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$;

(2) $\nexists g, h \in \mathbb{Q}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$.

5.11. Megjegyzés (folyt.).

Viszont $\mathbb{Z}$ nem test: $\mathbb{Z}[x]$-ben csak a konstans 1 és konstans -1 polinomok egységek. Ezért az alábbi két feltétel NEM ekvivalens minden n-edfokú $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom esetén:

(1) $\nexists g, h \in \mathbb{Z}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$;

(1') f irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

5.10. Tétel.

Ha egy legalább elsőfokú egész együtthatós polinom nem bontható fel nála kisebb fokszámú egész együtthatós polinomok szorzatára, akkor $\mathbb{Q}$ felett sem bomlik így fel, és viszont. Formálisan: ha $f \in \mathbb{Z}[x]$ és $\deg f = n \geq 1$, akkor az alábbi két állítás ekvivalens:

(1) $\nexists g, h \in \mathbb{Z}[x] : f = gh \ \text{ és } \ 0 < \deg g, \deg h < n$;

(2) $\nexists g, h \in \mathbb{Q}[x] : f = gh \ \text{ és } \ 0 < \deg g, \deg h < n$.

5.11. Megjegyzés (folyt.).

Viszont $\mathbb{Z}$ nem test: $\mathbb{Z}[x]$-ben csak a konstans 1 és konstans -1 polinomok egységek. Ezért az alábbi két feltétel NEM ekvivalens minden n-edfokú $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom esetén:

(1) $\nexists g, h \in \mathbb{Z}[x] : f = gh \ \text{ és } \ 0 < \deg g, \deg h < n$;

(1') f irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.

Például az $f = 2x$ polinomra (1) teljesül, de (1') nem, mert $\mathbb{Z}[x]$-ben az $f = 2 \cdot x$ felbontás nem triviális (hiszen se 2 se x nem egység $\mathbb{Z}[x]$-ben).

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

5.10. Tétel.

Ha egy legalább elsőfokú egész együtthatós polinom nem bontható fel nála kisebb fokszámú egész együtthatós polinomok szorzatára, akkor $\mathbb{Q}$ felett sem bomlik így fel, és viszont. Formálisan: ha $f \in \mathbb{Z}[x]$ és $\deg f = n \geq 1$, akkor az alábbi két állítás ekvivalens:

(1) $\nexists g, h \in \mathbb{Z}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$;

(2) $\nexists g, h \in \mathbb{Q}[x] : f = gh$ és $0 < \deg g, \deg h < n$.

5.11. Megjegyzés (folyt.).

Tehát a fenti tételt NEM fogalmazhatjuk meg egyszerűen úgy, hogy bármely $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.

Felbontás $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ felett

5.10. Tétel.

Ha egy legalább elsőfokú egész együtthatós polinom nem bontható fel nála kisebb fokszámú egész együtthatós polinomok szorzatára, akkor $\mathbb{Q}$ felett sem bomlik így fel, és viszont. Formálisan: ha $f \in \mathbb{Z}[x]$ és $\deg f = n \geq 1$, akkor az alábbi két állítás ekvivalens:

(1) $\nexists g, h \in \mathbb{Z}[x] : f = gh \;\text{ és }\; 0 < \deg g, \deg h < n$;

(2) $\nexists g, h \in \mathbb{Q}[x] : f = gh \;\text{ és }\; 0 < \deg g, \deg h < n$.

5.11. Megjegyzés (folyt.).

Tehát a fenti tételt NEM fogalmazhatjuk meg egyszerűen úgy, hogy bármely $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.

Ez a tétel mégis jól használható $\mathbb{Q}$ feletti irreducibilitás vizsgálatára. Adott $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom esetén azt kell eldöntenünk, hogy f felbomlik-e két kisebb fokszámú egész együtthatós polinom szorzatára. Ehhez pedig oszthatósági feltételeket lehet használni...

Kronecker módszere

Példa.

Irreducibilis-e az $f = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom?

Példa.

Irreducibilis-e az $f = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom?

Tfh. $f = g \cdot h$, ahol $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ és $0 < \deg g \overset{\text{ÁMN}}{\leq} \deg h < n$.

Kronecker módszere

Példa.

Irreducibilis-e az $f = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom?

Tfh. $f = g \cdot h$, ahol $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ és $0 < \deg g \overset{\text{ÁMN}}{\leq} \deg h < n$.

Ekkor $\deg g \leq$

Példa.

Irreducibilis-e az $f = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom?

Tfh. $f = g \cdot h$, ahol $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ és $0 < \deg g \overset{\text{ÁMN}}{\leq} \deg h < n$.

Ekkor $\deg g \leq 2$,

Kronecker módszere

Példa.

Irreducibilis-e az $f = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom?

Tfh. $f = g \cdot h$, ahol $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ és $0 < \deg g \overset{\text{ÁMN}}{\leq} \deg h < n$.

Ekkor $\deg g \leq 2$, és minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $g(k) \mid f(k)$.

Kronecker módszere

Példa.

Irreducibilis-e az $f = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom?

Tfh. $f = g \cdot h$, ahol $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ és $0 < \deg g \overset{\text{ÁMN}}{\leq} \deg h < n$.

Ekkor $\deg g \leq 2$, és minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $g(k) \mid f(k)$. Például

$$a := g(0) \mid f(0) = 3, \quad b := g(1) \mid f(1) = 1, \quad c := g(2) \mid f(2) = 3.$$

Kronecker módszere

Példa.

Irreducibilis-e az $f = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom?

Tfh. $f = g \cdot h$, ahol $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ és $0 < \deg g \overset{\text{ÁMN}}{\leq} \deg h < n$.

Ekkor $\deg g \leq 2$, és minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $g(k) \mid f(k)$. Például

$$a := g(0) \mid f(0) = 3, \quad b := g(1) \mid f(1) = 1, \quad c := g(2) \mid f(2) = 3.$$

Tehát az (a, b, c) számhármasra

Kronecker módszere

Példa.

Irreducibilis-e az $f = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom?

Tfh. $f = g \cdot h$, ahol $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ és $0 < \deg g \overset{\text{ÁMN}}{\leq} \deg h < n$.

Ekkor $\deg g \leq 2$, és minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $g(k) \mid f(k)$. Például

$$a := g(0) \mid f(0) = 3, \quad b := g(1) \mid f(1) = 1, \quad c := g(2) \mid f(2) = 3.$$

Tehát az (a, b, c) számhármasra 32 lehetőség van:

$$(a, b, c) \in \{-3, -1, 1, 3\} \times \{-1, 1\} \times \{-3, -1, 1, 3\}.$$

Kronecker módszere

Példa.

Irreducibilis-e az $f = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom?

Tfh. $f = g \cdot h$, ahol $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ és $0 < \deg g \overset{\text{ÁMN}}{\leq} \deg h < n$.

Ekkor $\deg g \leq 2$, és minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $g(k) \mid f(k)$. Például

$$a := g(0) \mid f(0) = 3, \quad b := g(1) \mid f(1) = 1, \quad c := g(2) \mid f(2) = 3.$$

Tehát az (a, b, c) számhármasra 32 lehetőség van:

$$(a, b, c) \in \{-3, -1, 1, 3\} \times \{-1, 1\} \times \{-3, -1, 1, 3\}.$$

Mind a 32 esetben egyértelműen meg tudjuk határozni a g polinomot

Kronecker módszere

Példa.

Irreducibilis-e az $f = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom?

Tfh. $f = g \cdot h$, ahol $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ és $0 < \deg g \overset{\text{ÁMN}}{\leq} \deg h < n$.

Ekkor $\deg g \leq 2$, és minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $g(k) \mid f(k)$. Például

$$a := g(0) \mid f(0) = 3, \quad b := g(1) \mid f(1) = 1, \quad c := g(2) \mid f(2) = 3.$$

Tehát az (a, b, c) számhármasra 32 lehetőség van:

$$(a, b, c) \in \{-3, -1, 1, 3\} \times \{-1, 1\} \times \{-3, -1, 1, 3\}.$$

Mind a 32 esetben egyértelműen meg tudjuk határozni a g polinomot Lagrange-interpolációval.

Kronecker módszere

Példa.

Irreducibilis-e az $f = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom?

Tfh. $f = g \cdot h$, ahol $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ és $0 < \deg g \overset{\text{ÁMN}}{\leq} \deg h < n$.

Ekkor $\deg g \leq 2$, és minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $g(k) \mid f(k)$. Például

$$a := g(0) \mid f(0) = 3, \quad b := g(1) \mid f(1) = 1, \quad c := g(2) \mid f(2) = 3.$$

Tehát az (a, b, c) számhármasra 32 lehetőség van:

$$(a, b, c) \in \{-3, -1, 1, 3\} \times \{-1, 1\} \times \{-3, -1, 1, 3\}.$$

Mind a 32 esetben egyértelműen meg tudjuk határozni a g polinomot Lagrange-interpolációval.

Ha valamelyik osztja f-et, akkor kapunk egy nemtriviális felbontást; ha egyik se osztja f-et, akkor f irreducibilis.

Kronecker módszere

Példa.

Irreducibilis-e az $f = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom?

Tfh. $f = g \cdot h$, ahol $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ és $0 < \deg g \overset{\text{ÁMN}}{\leq} \deg h < n$.

Ekkor $\deg g \leq 2$, és minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $g(k) \mid f(k)$. Például

$$a := g(0) \mid f(0) = 3, \quad b := g(1) \mid f(1) = 1, \quad c := g(2) \mid f(2) = 3.$$

Tehát az (a, b, c) számhármasra 32 lehetőség van:

$$(a, b, c) \in \{-3, -1, 1, 3\} \times \{-1, 1\} \times \{-3, -1, 1, 3\}.$$

Mind a 32 esetben egyértelműen meg tudjuk határozni a g polinomot Lagrange-interpolációval.

Ha valamelyik osztja f-et, akkor kapunk egy nemtriviális felbontást; ha egyik se osztja f-et, akkor f irreducibilis.

$$(a, b, c) = (1, 1, 3) \rightsquigarrow g = x^2 - x + 1 \rightsquigarrow f = (x^2 - x + 1)(x^2 - 3x + 3)$$

Pontos oszthatóság

5.12. Definíció.

Azt mondjuk, hogy a p prímszám *pontos osztója* az a egész számnak, ha a osztható p-vel, de p^2-tel már nem.

Jelölés.

A pontos oszthatóságot $\|$ jelöli: $p \| a \iff p \mid a$ és $p^2 \nmid a$.

Példa.

$$3 \| 12 \quad \text{de} \quad 2 \not\| 12$$

Schönemann–Eisenstein

5.13. Tétel (Schönemann–Eisenstein-féle irreducibilitási kritérium).
Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Ha létezik olyan p prímszám amelyre

$$p \nmid a_n, p \mid a_{n-1}, \ldots, p \mid a_1, p \parallel a_0,$$

akkor f irreducibilis a racionális számok teste felett.

5.13. Tétel (Schönemann–Eisenstein-féle irreducibilitási kritérium).

Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Ha létezik olyan p prímszám amelyre

$$p \nmid a_n, p \mid a_{n-1}, \ldots, p \mid a_1, p \parallel a_0,$$

akkor f irreducibilis a racionális számok teste felett.

5.14. Következmény.

Minden $n \geq 1$ egész számra létezik $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis n-edfokú polinom.

5.13. Tétel (Schönemann–Eisenstein-féle irreducibilitási kritérium).

Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Ha létezik olyan p prímszám amelyre

$$p \nmid a_n, p \mid a_{n-1}, \ldots, p \mid a_1, p \parallel a_0,$$

akkor f irreducibilis a racionális számok teste felett.

5.14. Következmény.

Minden $n \geq 1$ egész számra létezik $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis n-edfokú polinom.

Bizonyítás.

5.13. Tétel (Schönemann–Eisenstein-féle irreducibilitási kritérium).

Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Ha létezik olyan p prímszám amelyre

$$p \nmid a_n, p \mid a_{n-1}, \ldots, p \mid a_1, p \parallel a_0,$$

akkor f irreducibilis a racionális számok teste felett.

5.14. Következmény.

Minden $n \geq 1$ egész számra létezik $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis n-edfokú polinom.

Bizonyítás.

$x^n + 2$ □

Schönemann–Eisenstein

5.13. Tétel (Schönemann–Eisenstein-féle irreducibilitási kritérium).

Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Ha létezik olyan p prímszám amelyre

$$p \nmid a_n,\ p \mid a_{n-1}, \ldots, p \mid a_1,\ p \parallel a_0,$$

akkor f irreducibilis a racionális számok teste felett.

5.14. Következmény.

Minden $n \geq 1$ egész számra létezik $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis n-edfokú polinom.

Bizonyítás.

$x^n + 2$ $\square$

Érdemes ezt összehasonlítani a komplex és a valós számtest esetével:

Schönemann–Eisenstein

5.13. Tétel (Schönemann–Eisenstein-féle irreducibilitási kritérium).

Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Ha létezik olyan p prímszám amelyre

$$p \nmid a_n,\, p \mid a_{n-1}, \ldots, p \mid a_1,\, p \parallel a_0,$$

akkor f irreducibilis a racionális számok teste felett.

5.14. Következmény.

Minden $n \geq 1$ egész számra létezik $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis n-edfokú polinom.

Bizonyítás.

$x^n + 2$ $\square$

Érdemes ezt összehasonlítani a komplex és a valós számtest esetével:

- $\mathbb{C}$ felett csak

Schönemann–Eisenstein

5.13. Tétel (Schönemann–Eisenstein-féle irreducibilitási kritérium).

Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Ha létezik olyan p prímszám amelyre

$$p \nmid a_n, p \mid a_{n-1}, \ldots, p \mid a_1, p \parallel a_0,$$

akkor f irreducibilis a racionális számok teste felett.

5.14. Következmény.

Minden $n \geq 1$ egész számra létezik $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis n-edfokú polinom.

Bizonyítás.

$x^n + 2$ $\square$

Érdemes ezt összehasonlítani a komplex és a valós számtest esetével:

- $\mathbb{C}$ felett csak az elsőfokúak,

5.13. Tétel (Schönemann–Eisenstein-féle irreducibilitási kritérium).

Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Ha létezik olyan p prímszám amelyre

$$p \nmid a_n,\ p \mid a_{n-1}, \ldots, p \mid a_1,\ p \parallel a_0,$$

akkor f irreducibilis a racionális számok teste felett.

5.14. Következmény.

Minden $n \geq 1$ egész számra létezik $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis n-edfokú polinom.

Bizonyítás.

$x^n + 2$ $\square$

Érdemes ezt összehasonlítani a komplex és a valós számtest esetével:

- $\mathbb{C}$ felett csak az elsőfokúak,
- $\mathbb{R}$ felett csak

Schönemann–Eisenstein

5.13. Tétel (Schönemann–Eisenstein-féle irreducibilitási kritérium).

Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Ha létezik olyan p prímszám amelyre

$$p \nmid a_n,\, p \mid a_{n-1}, \ldots, p \mid a_1,\, p \parallel a_0,$$

akkor f irreducibilis a racionális számok teste felett.

5.14. Következmény.

Minden $n \geq 1$ egész számra létezik $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis n-edfokú polinom.

Bizonyítás.

$x^n + 2$ $\square$

Érdemes ezt összehasonlítani a komplex és a valós számtest esetével:

- $\mathbb{C}$ felett csak az elsőfokúak,
- $\mathbb{R}$ felett csak az elsőfokúak és bizonyos másodfokúak

irreducibilisek.

VIZSGÁN KÉRDEZNI FOGOM!

VIZSGÁN KÉRDEZNI FOGOM!

5.15. Megjegyzés.

A Schönemann–Eisenstein-tétel megfordítása...

VIZSGÁN KÉRDEZNI FOGOM!

5.15. Megjegyzés.

A Schönemann–Eisenstein-tétel megfordítása...

NEM IGAZ!!!

VIZSGÁN KÉRDEZNI FOGOM!

5.15. Megjegyzés.

A Schönemann–Eisenstein-tétel megfordítása...

NEM IGAZ!!!

Vagyis abból, hogy nem létezik olyan p prímszám, ami teljesítené a megfelelő oszthatósági feltételeket, nem következik, hogy a polinom nem irreducibilis

VIZSGÁN KÉRDEZNI FOGOM!

5.15. Megjegyzés.

A Schönemann–Eisenstein-tétel megfordítása...

NEM IGAZ!!!

Vagyis abból, hogy nem létezik olyan p prímszám, ami teljesítené a megfelelő oszthatósági feltételeket, nem következik, hogy a polinom nem irreducibilis (keressünk ellenpéldát!).

VIZSGÁN KÉRDEZNI FOGOM!

5.15. Megjegyzés.

A Schönemann–Eisenstein-tétel megfordítása...

NEM IGAZ!!!

Vagyis abból, hogy nem létezik olyan p prímszám, ami teljesítené a megfelelő oszthatósági feltételeket, nem következik, hogy a polinom nem irreducibilis (keressünk ellenpéldát!).
A megfordítás helyett következzék inkább a tétel „tükörképe”.

VIZSGÁN KÉRDEZNI FOGOM!

5.15. Megjegyzés.

A Schönemann–Eisenstein-tétel megfordítása...

NEM IGAZ!!!

Vagyis abból, hogy nem létezik olyan p prímszám, ami teljesítené a megfelelő oszthatósági feltételeket, nem következik, hogy a polinom nem irreducibilis (keressünk ellenpéldát!).
A megfordítás helyett következzék inkább a tétel „tükörképe".

5.16. Tétel (Schönemann–Eisenstein-féle irreducibilitási kritérium).

Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Ha létezik olyan p prímszám amelyre $p \parallel a_n, p \mid a_{n-1}, \ldots, p \mid a_1, p \nmid a_0$, akkor f irreducibilis a racionális számok teste felett.

Példa (24a).

Bontsuk $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

Irreducibilis felbontás $\mathbb{Q}$ felett

Példa (24a).

Bontsuk $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

Racionális gyök csak

Irreducibilis felbontás $\mathbb{Q}$ felett

Példa (24a).

Bontsuk $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ lehet.

Irreducibilis felbontás $\mathbb{Q}$ felett

Példa (24a).

Bontsuk $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ lehet.
Ezek közül -1 és $-\frac{1}{2}$ valóban gyök. Horner-módszerrel leválasztva a gyöktényezőket azt kapjuk, hogy

$$f = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x+1)^2\left(2x^4 + 12x + 24\right) = (2x+1)(x+1)^2\left(x^4 + 6x + 12\right).$$

Irreducibilis felbontás $\mathbb{Q}$ felett

Példa (24a).

Bontsuk $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ lehet.
Ezek közül -1 és $-\frac{1}{2}$ valóban gyök. Horner-módszerrel leválasztva a gyöktényezőket azt kapjuk, hogy

$$f = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x+1)^2\left(2x^4 + 12x + 24\right) = (2x+1)(x+1)^2\left(x^4 + 6x + 12\right).$$

A kék polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett:

Irreducibilis felbontás $\mathbb{Q}$ felett

Példa (24a).

Bontsuk $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ lehet.
Ezek közül -1 és $-\frac{1}{2}$ valóban gyök. Horner-módszerrel leválasztva a gyöktényezőket azt kapjuk, hogy

$$f = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x+1)^2\left(2x^4 + 12x + 24\right) = (2x+1)(x+1)^2\left(x^4 + 6x + 12\right).$$

A kék polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett: Schönemann-Eisenstein ($p = 3$).

Irreducibilis felbontás $\mathbb{Q}$ felett

Példa (24a).

Bontsuk $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ lehet.
Ezek közül -1 és $-\frac{1}{2}$ valóban gyök. Horner-módszerrel leválasztva a gyöktényezőket azt kapjuk, hogy

$$f = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x+1)^2\left(2x^4 + 12x + 24\right) = (2x+1)(x+1)^2\left(x^4 + 6x + 12\right).$$

A kék polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett: Schönemann-Eisenstein ($p = 3$).

Példa.

Bontsuk $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 3x^{100} - 10x^{50} + 100x - 50.$$

Irreducibilis felbontás $\mathbb{Q}$ felett

Példa (24a).

Bontsuk $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ lehet.
Ezek közül -1 és $-\frac{1}{2}$ valóban gyök. Horner-módszerrel leválasztva a gyöktényezőket azt kapjuk, hogy

$$f = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x+1)^2\left(2x^4 + 12x + 24\right) = (2x+1)(x+1)^2\left(x^4 + 6x + 12\right).$$

A kék polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett: Schönemann-Eisenstein ($p = 3$).

Példa.

Bontsuk $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 3x^{100} - 10x^{50} + 100x - 50.$$

A polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett:

Irreducibilis felbontás $\mathbb{Q}$ felett

Példa (24a).

Bontsuk $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12.$$

Racionális gyök csak $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ lehet.
Ezek közül -1 és $-\frac{1}{2}$ valóban gyök. Horner-módszerrel leválasztva a gyöktényezőket azt kapjuk, hogy

$$f = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x+1)^2\left(2x^4 + 12x + 24\right) = (2x+1)(x+1)^2\left(x^4 + 6x + 12\right).$$

A kék polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett: Schönemann-Eisenstein ($p = 3$).

Példa.

Bontsuk $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomot:

$$f = 3x^{100} - 10x^{50} + 100x - 50.$$

A polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett: Schönemann-Eisenstein ($p = 2$).