Elemi törtekre bontás

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Definíció.

Elemi törteknek nevezzük a $\frac{c}{p^k}$ alakú törteket, ahol p prímszám, k és c pozitív egészek, és $c < p$.

Tétel.

Minden racionális szám felírható egy egész szám és elemi törtek összegeként.

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Definíció.

Elemi törteknek nevezzük a $\dfrac{c}{p^k}$ alakú törteket, ahol p prímszám, k és c pozitív egészek, és $c < p$.

Tétel.

Minden racionális szám felírható egy egész szám és elemi törtek összegeként.

Bizonyítás (vázlat).

Három „trükkre" lesz szükségünk:

1. Tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}\,(a, b \neq 0)$ esetén

$$a \perp b \implies \exists x, y \in \mathbb{Z}: \ \frac{c}{ab} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}.$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Definíció.

Elemi törteknek nevezzük a $\dfrac{c}{p^k}$ alakú törteket, ahol p prímszám, k és c pozitív egészek, és $c < p$.

Tétel.

Minden racionális szám felírható egy egész szám és elemi törtek összegeként.

Bizonyítás (vázlat).

Három „trükkre" lesz szükségünk:

1. Tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}\,(a, b \neq 0)$ esetén

$$a \perp b \implies \exists x, y \in \mathbb{Z} : \ \frac{c}{ab} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}.$$

   Ezt ismételten alkalmazva minden racionális számot fel tudunk bontani prímhatvány nevezőjű törtek összegére.

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Definíció.

Elemi törteknek nevezzük a $\dfrac{c}{p^k}$ alakú törteket, ahol p prímszám, k és c pozitív egészek, és $c < p$.

Tétel.

Minden racionális szám felírható egy egész szám és elemi törtek összegeként.

Bizonyítás (vázlat).

Három „trükkre" lesz szükségünk:

1. Tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}\,(a, b \neq 0)$ esetén

$$a \perp b \implies \exists x, y \in \mathbb{Z}: \ \frac{c}{ab} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}.$$

   Ezt ismételten alkalmazva minden racionális számot fel tudunk bontani prímhatvány nevezőjű törtek összegére. Például:

$$\frac{157}{72} = \frac{157}{2^3 \cdot 3^2} = \frac{x}{2^3} + \frac{y}{3^2} =$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Definíció.

Elemi törteknek nevezzük a $\dfrac{c}{p^k}$ alakú törteket, ahol p prímszám, k és c pozitív egészek, és $c < p$.

Tétel.

Minden racionális szám felírható egy egész szám és elemi törtek összegeként.

Bizonyítás (vázlat).

Három „trükkre" lesz szükségünk:

1. Tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}\,(a, b \neq 0)$ esetén

$$a \perp b \implies \exists x, y \in \mathbb{Z}: \ \frac{c}{ab} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}.$$

   Ezt ismételten alkalmazva minden racionális számot fel tudunk bontani prímhatvány nevezőjű törtek összegére. Például:

$$\frac{157}{72} = \frac{157}{2^3 \cdot 3^2} = \frac{x}{2^3} + \frac{y}{3^2} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2}.$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Bizonyítás (folyt.)

2. Maradékos osztás segítségével leválasztva a törtek egészrészét, elérhetjük, hogy minden törtünk $\frac{c}{p^k}$ alakú legyen, ahol $0 < c < p^k$:

$$\frac{157}{72} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2} =$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Bizonyítás (folyt.)

2. Maradékos osztás segítségével leválasztva a törtek egészrészét, elérhetjük, hogy minden törtünk $\dfrac{c}{p^k}$ alakú legyen, ahol $0 < c < p^k$:

$$\frac{157}{72} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2} = 2 + \frac{5}{2^3} \; +$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Bizonyítás (folyt.)

2. Maradékos osztás segítségével leválasztva a törtek egészrészét, elérhetjük, hogy minden törtünk $\dfrac{c}{p^k}$ alakú legyen, ahol $0 < c < p^k$:

$$\frac{157}{72} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2} = 2 + \frac{5}{2^3} \ + \ (-1) + \frac{5}{3^2} =$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Bizonyítás (folyt.)

2. Maradékos osztás segítségével leválasztva a törtek egészrészét, elérhetjük, hogy minden törtünk $\frac{c}{p^k}$ alakú legyen, ahol $0 < c < p^k$:

$$\frac{157}{72} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2} = 2 + \frac{5}{2^3} \ + \ (-1) + \frac{5}{3^2} = 1 + \frac{5}{2^3} + \frac{5}{3^2}.$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Bizonyítás (folyt.)

2. Maradékos osztás segítségével leválasztva a törtek egészrészét, elérhetjük, hogy minden törtünk $\dfrac{c}{p^k}$ alakú legyen, ahol $0 < c < p^k$:

$$\frac{157}{72} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2} = 2 + \frac{5}{2^3} \; + \; (-1) + \frac{5}{3^2} = 1 + \frac{5}{2^3} + \frac{5}{3^2}.$$

3. Minden $\dfrac{c}{p^k}$ alakú törtben a számlálót felírjuk p-alapú számrendszerben, és „számjegyenként szétszedjük”:

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Bizonyítás (folyt.)

2. Maradékos osztás segítségével leválasztva a törtek egészrészét, elérhetjük, hogy minden törtünk $\frac{c}{p^k}$ alakú legyen, ahol $0 < c < p^k$:

$$\frac{157}{72} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2} = 2 + \frac{5}{2^3} \ + \ (-1) + \frac{5}{3^2} = 1 + \frac{5}{2^3} + \frac{5}{3^2}.$$

3. Minden $\frac{c}{p^k}$ alakú törtben a számlálót felírjuk p-alapú számrendszerben, és „számjegyenként szétszedjük”:

$$\frac{5}{2^3} =$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Bizonyítás (folyt.)

2. Maradékos osztás segítségével leválasztva a törtek egészrészét, elérhetjük, hogy minden törtünk $\dfrac{c}{p^k}$ alakú legyen, ahol $0 < c < p^k$:

$$\frac{157}{72} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2} = 2 + \frac{5}{2^3} \; + \; (-1) + \frac{5}{3^2} = 1 + \frac{5}{2^3} + \frac{5}{3^2}.$$

3. Minden $\dfrac{c}{p^k}$ alakú törtben a számlálót felírjuk p-alapú számrendszerben, és „számjegyenként szétszedjük":

$$\frac{5}{2^3} = \frac{101_2}{2^3}$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Bizonyítás (folyt.)

2. Maradékos osztás segítségével leválasztva a törtek egészrészét, elérhetjük, hogy minden törtünk $\dfrac{c}{p^k}$ alakú legyen, ahol $0 < c < p^k$:

$$\frac{157}{72} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2} = 2 + \frac{5}{2^3} \ + \ (-1) + \frac{5}{3^2} = 1 + \frac{5}{2^3} + \frac{5}{3^2}.$$

3. Minden $\dfrac{c}{p^k}$ alakú törtben a számlálót felírjuk p-alapú számrendszerben, és „számjegyenként szétszedjük”:

$$\frac{5}{2^3} = \frac{101_2}{2^3} = \frac{2^2+1}{2^3}$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Bizonyítás (folyt.)

2. Maradékos osztás segítségével leválasztva a törtek egészrészét, elérhetjük, hogy minden törtünk $\dfrac{c}{p^k}$ alakú legyen, ahol $0 < c < p^k$:

$$\frac{157}{72} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2} = 2 + \frac{5}{2^3} \; + \; (-1) + \frac{5}{3^2} = 1 + \frac{5}{2^3} + \frac{5}{3^2}.$$

3. Minden $\dfrac{c}{p^k}$ alakú törtben a számlálót felírjuk p-alapú számrendszerben, és „számjegyenként szétszedjük”:

$$\frac{5}{2^3} = \frac{101_2}{2^3} = \frac{2^2+1}{2^3} = \frac{2^2}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3};$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Bizonyítás (folyt.)

2. Maradékos osztás segítségével leválasztva a törtek egészrészét, elérhetjük, hogy minden törtünk $\dfrac{c}{p^k}$ alakú legyen, ahol $0 < c < p^k$:

$$\frac{157}{72} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2} = 2 + \frac{5}{2^3} \ + \ (-1) + \frac{5}{3^2} = 1 + \frac{5}{2^3} + \frac{5}{3^2}.$$

3. Minden $\dfrac{c}{p^k}$ alakú törtben a számlálót felírjuk p-alapú számrendszerben, és „számjegyenként szétszedjük":

$$\frac{5}{2^3} = \frac{101_2}{2^3} = \frac{2^2+1}{2^3} = \frac{2^2}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3};$$

$$\frac{5}{3^2} =$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Bizonyítás (folyt.)

2. Maradékos osztás segítségével leválasztva a törtek egészrészét, elérhetjük, hogy minden törtünk $\dfrac{c}{p^k}$ alakú legyen, ahol $0 < c < p^k$:
$$\frac{157}{72} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2} = 2 + \frac{5}{2^3} \; + \; (-1) + \frac{5}{3^2} = 1 + \frac{5}{2^3} + \frac{5}{3^2}.$$

3. Minden $\dfrac{c}{p^k}$ alakú törtben a számlálót felírjuk p-alapú számrendszerben, és „számjegyenként szétszedjük":
$$\frac{5}{2^3} = \frac{101_2}{2^3} = \frac{2^2+1}{2^3} = \frac{2^2}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3};$$
$$\frac{5}{3^2} = \frac{12_3}{3^2}$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Bizonyítás (folyt.)

2. Maradékos osztás segítségével leválasztva a törtek egészrészét, elérhetjük, hogy minden törtünk $\dfrac{c}{p^k}$ alakú legyen, ahol $0 < c < p^k$:

$$\frac{157}{72} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2} = 2 + \frac{5}{2^3} \; + \; (-1) + \frac{5}{3^2} = 1 + \frac{5}{2^3} + \frac{5}{3^2}.$$

3. Minden $\dfrac{c}{p^k}$ alakú törtben a számlálót felírjuk p-alapú számrendszerben, és „számjegyenként szétszedjük":

$$\frac{5}{2^3} = \frac{101_2}{2^3} = \frac{2^2+1}{2^3} = \frac{2^2}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3};$$

$$\frac{5}{3^2} = \frac{12_3}{3^2} = \frac{3+2}{3^2}$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Bizonyítás (folyt.)

2. Maradékos osztás segítségével leválasztva a törtek egészrészét, elérhetjük, hogy minden törtünk $\frac{c}{p^k}$ alakú legyen, ahol $0 < c < p^k$:

$$\frac{157}{72} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2} = 2 + \frac{5}{2^3} \; + \; (-1) + \frac{5}{3^2} = 1 + \frac{5}{2^3} + \frac{5}{3^2}.$$

3. Minden $\frac{c}{p^k}$ alakú törtben a számlálót felírjuk p-alapú számrendszerben, és „számjegyenként szétszedjük”:

$$\frac{5}{2^3} = \frac{101_2}{2^3} = \frac{2^2+1}{2^3} = \frac{2^2}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3};$$

$$\frac{5}{3^2} = \frac{12_3}{3^2} = \frac{3+2}{3^2} = \frac{3}{3^2} + \frac{2}{3^2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}.$$

Elemi törtekre bontás a racionális számok körében

Bizonyítás (folyt.)

2. Maradékos osztás segítségével leválasztva a törtek egészrészét, elérhetjük, hogy minden törtünk $\dfrac{c}{p^k}$ alakú legyen, ahol $0 < c < p^k$:

$$\frac{157}{72} = \frac{21}{2^3} + \frac{-4}{3^2} = 2 + \frac{5}{2^3} \; + \; (-1) + \frac{5}{3^2} = 1 + \frac{5}{2^3} + \frac{5}{3^2}.$$

3. Minden $\dfrac{c}{p^k}$ alakú törtben a számlálót felírjuk p-alapú számrendszerben, és „számjegyenként szétszedjük”:

$$\frac{5}{2^3} = \frac{101_2}{2^3} = \frac{2^2+1}{2^3} = \frac{2^2}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3};$$

$$\frac{5}{3^2} = \frac{12_3}{3^2} = \frac{3+2}{3^2} = \frac{3}{3^2} + \frac{2}{3^2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}.$$

Tehát a végeredmény:

$$\frac{157}{72} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}.$$

Polinomokra minden ugyanúgy megy

Tetszőleges T test esetén a $T[x]$ polinomgyűrű elemeivel „ugyanúgy" lehet számolni, mint egész számokkal (maradékos osztás, euklideszi algoritmus), ezért az előbbi eljárás T feletti polinomokra is működik.

Polinomokra minden ugyanúgy megy

Tetszőleges T test esetén a $T[x]$ polinomgyűrű elemeivel „ugyanúgy" lehet számolni, mint egész számokkal (maradékos osztás, euklideszi algoritmus), ezért az előbbi eljárás T feletti polinomokra is működik.

5.17. Definíció.

A T test feletti **racionális törtön** $\frac{f}{g}$ alakú formális kifejezést értünk, ahol $f, g \in T[x]$ és $g \neq 0$.

Polinomokra minden ugyanúgy megy

Tetszőleges T test esetén a $T[x]$ polinomgyűrű elemeivel „ugyanúgy” lehet számolni, mint egész számokkal (maradékos osztás, euklideszi algoritmus), ezért az előbbi eljárás T feletti polinomokra is működik.

5.17. Definíció.

A T test feletti **racionális törtön** $\frac{f}{g}$ alakú formális kifejezést értünk, ahol $f, g \in T[x]$ és $g \neq 0$. Minden racionális törthöz tartozik egy **racionális törtfüggvény** (a két fogalom nem összekeverendő!). A T feletti racionális törtek halmazát $T(x)$ jelöli.

Polinomokra minden ugyanúgy megy

Tetszőleges T test esetén a $T[x]$ polinomgyűrű elemeivel „ugyanúgy" lehet számolni, mint egész számokkal (maradékos osztás, euklideszi algoritmus), ezért az előbbi eljárás T feletti polinomokra is működik.

5.17. Definíció.

A T test feletti **racionális törtön** $\frac{f}{g}$ alakú formális kifejezést értünk, ahol $f, g \in T[x]$ és $g \neq 0$. Minden racionális törthöz tartozik egy **racionális törtfüggvény** (a két fogalom nem összekeverendő!). A T feletti racionális törtek halmazát $T(x)$ jelöli.

5.18. Definíció.

A T test felett **elemi törtnek** (vagy parciális törtnek) olyan racionális törtet nevezünk, amelyben a nevező T felett irreducibilis (fő)polinom hatványa, és a számláló foka kisebb ezen irreducibilis polinom fokánál:

Polinomokra minden ugyanúgy megy

Tetszőleges T test esetén a $T[x]$ polinomgyűrű elemeivel „ugyanúgy'' lehet számolni, mint egész számokkal (maradékos osztás, euklideszi algoritmus), ezért az előbbi eljárás T feletti polinomokra is működik.

5.17. Definíció.

A T test feletti **racionális törtön** $\frac{f}{g}$ alakú formális kifejezést értünk, ahol $f, g \in T[x]$ és $g \neq 0$. Minden racionális törthöz tartozik egy **racionális törtfüggvény** (a két fogalom nem összekeverendő!). A T feletti racionális törtek halmazát $T(x)$ jelöli.

5.18. Definíció.

A T test felett **elemi törtnek** (vagy parciális törtnek) olyan racionális törtet nevezünk, amelyben a nevező T felett irreducibilis (fő)polinom hatványa, és a számláló foka kisebb ezen irreducibilis polinom fokánál:

$$\frac{f}{p^k} \in T(x), \quad \text{ahol } f, p \in T[x], \; k \in \mathbb{N}, \; p \text{ irreducibilis } T \text{ felett}, \; \deg f < \deg p.$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

5.19. Tétel.

Tetszőleges T test felett minden racionális tört felírható egy polinom és elemi racionális törtek összegeként.

5.19. Tétel.

Tetszőleges T test felett minden racionális tört felírható egy polinom és elemi racionális törtek összegeként.

5.20. Következmény.

A komplex számok teste felett minden racionális tört felírható egy polinom és véges sok

5.19. Tétel.

Tetszőleges T test felett minden racionális tört felírható egy polinom és elemi racionális törtek összegeként.

5.20. Következmény.

A komplex számok teste felett minden racionális tört felírható egy polinom és véges sok

$$\frac{A}{(x+a)^k} \quad (A, a \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N})$$

alakú racionális tört összegeként.

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

5.19. Tétel.

Tetszőleges T test felett minden racionális tört felírható egy polinom és elemi racionális törtek összegeként.

5.20. Következmény.

A komplex számok teste felett minden racionális tört felírható egy polinom és véges sok

$$\frac{A}{(x+a)^k} \quad (A, a \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N})$$

alakú racionális tört összegeként.

5.21. Következmény.

A valós számok teste felett minden racionális tört felírható egy polinom és véges sok

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

5.19. Tétel.

Tetszőleges T test felett minden racionális tört felírható egy polinom és elemi racionális törtek összegeként.

5.20. Következmény.

A komplex számok teste felett minden racionális tört felírható egy polinom és véges sok

$$\frac{A}{(x+a)^k} \quad (A, a \in \mathbb{C},\ \ k \in \mathbb{N})$$

alakú racionális tört összegeként.

5.21. Következmény.

A valós számok teste felett minden racionális tört felírható egy polinom és véges sok

$$\frac{A}{(x+a)^k} \qquad (A, a \in \mathbb{R},\ \ k \in \mathbb{N}),\ \ \textit{illetve}$$

$$\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k} \qquad (B, C, b, c \in \mathbb{R},\ \ b^2-4c<0,\ \ k \in \mathbb{N})$$

alakú racionális tört összegeként.

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{R}$ felett az $\dfrac{1}{x^2+x}$ racionális törtet.

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x\,(x+1)} =$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{R}$ felett az $\dfrac{1}{x^2+x}$ racionális törtet.

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} =$$

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{R}$ felett az $\dfrac{1}{x^2+x}$ racionális törtet.

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x\left(x+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A\left(x+1\right)+Bx}{x\left(x+1\right)} =$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{R}$ felett az $\dfrac{1}{x^2+x}$ racionális törtet.

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x\,(x+1)} {\color{red}=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A\,(x+1)+Bx}{x\,(x+1)} = \frac{(A+B)\,x+A}{x\,(x+1)}$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{R}$ felett az $\dfrac{1}{x^2+x}$ racionális törtet.

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$$

$$\Updownarrow$$

$$A+B=0 \text{ és } A=1$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{R}$ felett az $\dfrac{1}{x^2+x}$ racionális törtet.

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$$

$$\Updownarrow$$

$$A+B=0 \text{ és } A=1$$

$$\Updownarrow$$

$$A=1 \text{ és } B=-1$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{R}$ felett az $\dfrac{1}{x^2+x}$ racionális törtet.

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A\,(x+1)+Bx}{x\,(x+1)} = \frac{(A+B)\,x+A}{x\,(x+1)}$$

$$\Updownarrow$$

$$A+B=0 \text{ és } A=1$$

$$\Updownarrow$$

$$A=1 \text{ és } B=-1$$

Tehát

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{R}$ felett a $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3}$ racionális törtet.

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{R}$ felett a $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3}$ racionális törtet.

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3} =$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{R}$ felett a $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3}$ racionális törtet.

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x^4+2x^2+1\right)} =$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{R}$ felett a $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3}$ racionális törtet.

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x^4+2x^2+1\right)} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x^2+1\right)^2} =$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{R}$ felett a $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3}$ racionális törtet.

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x^4+2x^2+1\right)} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{R}$ felett a $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3}$ racionális törtet.

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x^4+2x^2+1\right)} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{Ax^2\left(x^2+1\right)^2+Bx\left(x^2+1\right)^2+C\left(x^2+1\right)^2+(Dx+E)x^3\left(x^2+1\right)+(Fx+G)x^3}{x^3\left(x^2+1\right)^2} =$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{R}$ felett a $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3}$ racionális törtet.

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x^4+2x^2+1\right)} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{Ax^2\left(x^2+1\right)^2 + Bx\left(x^2+1\right)^2 + C\left(x^2+1\right)^2 + (Dx+E)x^3\left(x^2+1\right) + (Fx+G)x^3}{x^3\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{(A+D)x^6 + (B+E)x^5 + (2A+C+D+F)x^4 + (2B+E+G)x^3 + (A+2C)x^2 + Bx + C}{x^3\left(x^2+1\right)^2}$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{R}$ felett a $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3}$ racionális törtet.

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x^4+2x^2+1\right)} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{Ax^2\left(x^2+1\right)^2+Bx\left(x^2+1\right)^2+C\left(x^2+1\right)^2+(Dx+E)x^3\left(x^2+1\right)+(Fx+G)x^3}{x^3\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{(A+D)x^6+(B+E)x^5+(2A+C+D+F)x^4+(2B+E+G)x^3+(A+2C)x^2+Bx+C}{x^3\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$A+D=0,\ B+E=0,\ 2A+C+D+F=0,$$

$$2B+E+G=0,\ A+2C=3,\ B=2,\ C=1$$

Példa (folyt.).

A kapott hétismeretlenes lineáris egyenletrendszert megoldjuk:

Példa (folyt.).

A kapott hétismeretlenes lineáris egyenletrendszert megoldjuk:

$$A = 1,\ B = 2,\ C = 1,\ D = -1,\ E = -2,\ F = -2,\ G = 2.$$

Példa (folyt.).

A kapott hétismeretlenes lineáris egyenletrendszert megoldjuk:

$$A = 1,\ B = 2,\ C = 1,\ D = -1,\ E = -2,\ F = -2,\ G = 2.$$

Tehát

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{-x-2}{x^2+1} + \frac{-2x-2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{C}$ felett a $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3}$ racionális törtet.

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x^2+1\right)^2} =$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{C}$ felett a $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3}$ racionális törtet.

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x^2+1\right)^2} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x+i\right)^2\left(x-i\right)^2} =$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{C}$ felett a $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3}$ racionális törtet.

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x^2+1\right)^2} = \frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x+i\right)^2\left(x-i\right)^2} =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+i} + \frac{E}{\left(x+i\right)^2} + \frac{F}{x-i} + \frac{G}{\left(x-i\right)^2}$$

Elemi törtekre bontás test feletti racionális törtek körében

Példa.

Bontsuk parciális törtek összegére $\mathbb{C}$ felett a $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3}$ racionális törtet.

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^7+2x^5+x^3}=\frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x^2+1\right)^2}=\frac{3x^2+2x+1}{x^3\left(x+i\right)^2\left(x-i\right)^2}=$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+i}+\frac{E}{(x+i)^2}+\frac{F}{x-i}+\frac{G}{(x-i)^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$A+D+F=0,\ B-iD+E+iF+G=0,\ 2A+C+D-2iE+F+2iG=0,$$

$$2B-iD-E+iF-G=0,\ A+2C=3,\ B=2,\ C=1$$

Példa (folyt.).

A kapott hétismeretlenes lineáris egyenletrendszert megoldjuk:

Példa (folyt.).

A kapott hétismeretlenes lineáris egyenletrendszert megoldjuk:

$$A = 1,\ B = 2,\ C = 1,\ D = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i,\ E = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i,\ F = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i,\ G = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Példa (folyt.).

A kapott hétismeretlenes lineáris egyenletrendszert megoldjuk:

$$A = 1,\ B = 2,\ C = 1,\ D = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i,\ E = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i,\ F = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i,\ G = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Tehát

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}{x + i} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{(x + i)^2} + \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}{x - i} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{(x - i)^2}.$$