Szimmetrikus polinomok

Ha az $f = x^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei α_1 és α_2, akkor

$$x^2 + bx + c = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2,$$

következésképp

$$-b = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{és} \quad c = \alpha_1\alpha_2.$$

Ezek segítségével a gyökök sokféle kifejezését meghatározhatjuk a gyökök kiszámítása nélkül:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} &= \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2} = \frac{-b}{c} \\
\alpha_1^2 + \alpha_2^2 &= (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2\alpha_1\alpha_2 = b^2 - 2c \\
(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + 1 = c - b + 1 \\
\alpha_1^3 + \alpha_2^3 &= (\alpha_1 + \alpha_2)^3 - 3\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1\alpha_2^2 \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2)^3 - 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) \\
&= (-b)^3 - 3c(-b) = -b^3 + 3bc
\end{aligned}$$

Ezekben a kifejezésekben az a közös, hogy szimmetrikusak, azaz nem változnak meg α_1 és α_2 felcserélésekor. Mivel a Viète-formulákban szereplő $\alpha_1 + \alpha_2$ és $\alpha_1\alpha_2$ szimmetrikusak, nem meglepő, hogy minden amit belőlük fel tud(t)unk építeni, szintén szimmetrikus.

Az egyenlet megoldásához magát α_1-et (vagy α_2-t) kellene megkapni, ez pedig nem szimmetrikus kifejezés. Valahogyan tehát meg kell törni a szimmetriát.

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1 - \alpha_2)^2 &= (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = b^2 - 4c \\
\alpha_1 - \alpha_2 &= \pm\sqrt{b^2 - 4c} \\
\alpha_1 + \alpha_2 &= -b \\
2\alpha_1 &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4c} \\
\alpha_1 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}
\end{aligned}
$$

3.22. Tétel.

Legyenek az n-edfokú $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ *főpolinom komplex gyökei* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (*mindegyiket annyiszor feltüntetve, amennyi a multiplicitása*)*. Ekkor fennállnak az alábbi összefüggések:*

$$
\begin{aligned}
-a_{n-1} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n; \\
a_{n-2} &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n; \\
-a_{n-3} &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n; \\
&\vdots \\
(-1)^{n-1} a_1 &= \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{n-2}\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{n-2}\alpha_n + \dots + \alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_{n-1}\alpha_n; \\
(-1)^n a_0 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_{n-1}\alpha_n.
\end{aligned}
$$

Bizonyítás.

Az $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)$ egyenlőség bal oldalán x^{n-k} együtthatója a_{n-k}, míg a jobb oldalon

$$(-\alpha_1)\cdots(-\alpha_k) + \dots$$

□

3.23. Megjegyzés.

A fenti képleteket **Viète-formuláknak** hívjuk. A k-adik sor bal oldalán $(-1)^k a_{n-k}$ áll, a jobb oldalon pedig az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ betűkből képezett összes k-tényezős szorzat összege, tehát egy $\binom{n}{k}$-tagú összeg. Formálisan:

$$(-1)^k a_{n-k} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1} \cdot \alpha_{i_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_k}.$$

Még formálisabban:

$$(-1)^k a_{n-k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \prod_{i \in I} \alpha_i.$$

3.24. Definíció.

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ főpolinom **diszkriminánsa**:

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 .$$

3.25. Definíció.

Adott T test feletti **n-határozatlanú monomnak** nevezzük az $ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ alakú formális kifejezéseket, ahol $0 \neq a \in T$ és $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$. Az ilyen monomok véges összegeit pedig T feletti **n-határozatlanú polinomoknak** oknak nevezzük.

Jelölés.

A T feletti n-határozatlanú polinomok halmazát $T\left[x_1, \ldots, x_n\right]$ jelöli.

3.26. Tétel.

A természetes módon definiált szorzással és összeadással $T\left[x_1, \ldots, x_n\right]$ integritástartomány.

3.27. Megjegyzés.

Az n-határozatlanú polinomok gyűrűjét lehetne rekurzívan is definiálni: legyen

$$T\left[x_1, \ldots, x_n\right] = \left(T\left[x_1, \ldots, x_{n-1}\right]\right)\left[x_n\right],$$

azaz a $T\left[x_1, \ldots, x_{n-1}\right]$ integritástartomány feletti (egyhatározatlanú) polinomgyűrű.

Példa.

$$\begin{aligned}
f = \; & 7x_1^2x_3 - 2x_1x_2x_3^4 + 9x_1x_2 - 3x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2x_3^3 - 2x_1^2 + \\
& 5x_1x_2^2x_3 - x_1^2x_2x_3 - 6x_1x_3 + 2x_3^2 + x_1x_3^2 + 4x_2^2x_3^2 + 8 \qquad \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f = \; & x_1^2 \cdot \left(-3x_2x_3^2 - x_2x_3 + 7x_3 - 2\right) + \\
& x_1 \cdot \left(5x_2^2x_3 - 2x_2x_3^4 + x_2x_3^3 + 9x_2 + x_3^2 - 6x_3\right) + \\
& \left(4x_2^2x_3^2 + 2x_3^2 + 8\right) \qquad \in \mathbb{R}[x_2, x_3][x_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f = \; & x_1^2 \cdot \Big(x_2 \cdot \left(-3x_3^2 - x_3\right) + (7x_3 - 2)\Big) + \\
& x_1 \cdot \Big(x_2^2 \cdot (5x_3) - x_2\left(2x_3^4 + x_3^3 + 9\right) + \left(x_3^2 - 6x_3\right)\Big) + \\
& \Big(x_2^2 \cdot \left(4x_3^2\right) + \left(2x_3^2 + 8\right)\Big) \qquad \in \mathbb{R}[x_3][x_2][x_1]
\end{aligned}$$

3.28. Definíció.

Az $f \in T[x_1, \ldots, x_n]$ polinomot **szimmetrikus polinomnak** nevezzük, ha invariáns a határozatlanok minden permutációjára, azaz

$$\forall \pi \in S_n : f(x_{1\pi}, \ldots, x_{n\pi}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

3.29. Definíció.

A k-adik n-határozatlanú **elemi szimmetrikus polinom** az $x_1, \ldots, x_n$ határozatlanokból képezett összes k-tényezős szorzatok összege $(k = 1, \ldots, n)$.

Jelölés.

A k-adik n-határozatlanú elemi szimmetrikus polinomot σ_k jelöli (az alaptest és n értéke általában világos a szövegkörnyezetből), tehát

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \ldots, n\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} x_i \in T[x_1, \ldots, x_n].$$

3.30. Megjegyzés.

Az elemi szimmetrikus polinomokkal már találkoztunk: segítségükkel fejezhetők ki egy komplex együtthatós főpolinom együtthatói a polinom gyökeiből. Tehát a Viète-formulák $\sigma_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^k a_{n-k}$ alakban is felírhatók.

Példa.

Az elemi szimmetrikus polinomok $n = 2$ esetén:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + x_2 \\ \sigma_2 &= x_1x_2 \end{aligned}$$

Példa.

Az elemi szimmetrikus polinomok $n = 3$ esetén:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ \sigma_3 &= x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Példa.

Az elemi szimmetrikus polinomok $n = 4$ esetén:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ \sigma_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\ \sigma_4 &= x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

3.31. Tétel.

A szimmetrikus polinomok részgyűrűt alkotnak a $T[x_1, \ldots, x_n]$ polinomgyűrűben.

3.32. Tétel (a szimmetrikus polinomok alaptétele).

Bármely szimmetrikus polinom felírható, mégpedig egyetlen módon, az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként. Formálisan:

$$\forall f \in T[x_1, \ldots, x_n] : f \text{ szimmetrikus} \implies \exists! h \in T[x_1, \ldots, x_n] : f = h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Példa.

Fejezzük ki az $f = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = \sigma_2 + \sigma_1 + 1 = h(\sigma_1, \sigma_2),$$

ahol $h = x_2 + x_1 + 1$.

Példa.

Fejezzük ki az $f = (x_1 - x_2)^2$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 = h(\sigma_1, \sigma_2),$$

ahol $h = x_1^2 - 4x_2$.

Példa.

Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.
Mivel f homogén harmadfokú polinom, a felírásában csak σ_1^3, $\sigma_1\sigma_2$ és σ_3 szerepelhet:

$$f = A \cdot \sigma_1^3 + B \cdot \sigma_1\sigma_2 + C \cdot \sigma_3.$$

Néhány helyen kiértékelve a két oldalt, kapunk néhány egyenletet az ismeretlen A, B, C együtthatókra:

$$f(1,0,0) = 1 = A \cdot 1^3 + B \cdot 1 \cdot 0 + C \cdot 0 \implies A = 1$$

$$f(1,1,0) = 2 = A \cdot 2^3 + B \cdot 2 \cdot 1 + C \cdot 0 \implies 8A + 2B = 2 \implies B = -3$$

$$f(1,1,1) = 3 = A \cdot 3^3 + B \cdot 3 \cdot 3 + C \cdot 1 \implies 27A + 9B + C = 3 \implies C = 3$$

Tehát

$$f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = h(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \text{ ahol } h(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - 3x_1x_2 + 3x_3.$$

Példa (20a feladat).

Anélkül, hogy megkeresnénk a gyököket, határozzuk meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek köbösszegét, valamint számtani, mértani és harmonikus közepét.

A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= \sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 8. \end{aligned}$$

Az előző feladat alapján

$$\begin{aligned} \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 =& \sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^3 - 3\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + 3\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ =& 3^3 - 3 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 8 = 42 \end{aligned}$$

Példa (folyt.).

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= \sigma_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 3,\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3 &= \sigma_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 1,\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= \sigma_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 8.\end{aligned}$$

számtani közép:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

mértani közép:

$$\sqrt[3]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

harmonikus közép:

$$\frac{3}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}} = \frac{3}{\frac{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}} = \frac{3\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3} = \frac{3\cdot 8}{1} = 24$$

Példa (20b feladat).

Legyenek az $2x^3 + 4x^2 - 6x + 2$ polinom komplex gyökei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Határozza meg $\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4$ értékét a gyökök kiszámítása nélkül.

Először az $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$ polinomot fejezzük ki $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ segítségével.

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = A \cdot \sigma_1^4 + B \cdot \sigma_1^2 \sigma_2 + C \cdot \sigma_1 \sigma_3 + D \cdot \sigma_2^2.$$

Néhány helyen kiértékeljük a két oldalt, és megoldjuk a kapott lineáris egyenletrendszert... $\rightsquigarrow$ $A = 1$, $B = -4$, $C = 4$, $D = 2$. Tehát

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = \sigma_1^4 - 4 \cdot \sigma_1^2 \sigma_2 + 4 \cdot \sigma_1 \sigma_3 + 2 \cdot \sigma_2^2.$$

Végül értékeljük ki mindkét oldalt az $(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ helyen.
A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -2, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -3, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= \sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -1. \end{aligned}$$

$$\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 = (-2)^4 - 4 \cdot (-2)^2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-3)^2 = 90.$$

Példa (a harmadfokú polinom diszkriminánsa).

$D := (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2$

Ha $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = x^3 + px + q$, akkor a Viéte-formulák szerint

$$\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0,$$

$$\sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = p,$$

$$\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -q,$$

tehát

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= -4\sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^3 - 27\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^2 \\ &= -4p^3 - 27q^2 \\ &= -108\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right). \end{aligned}$$

Az $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ harmadfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x = -\frac{a}{3} + \sqrt[3]{\frac{-2a^3 + 9ab - 27c + \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}} +$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-2a^3 + 9ab - 27c - \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}}$$

Forrás: http://planetmath.org/encyclopedia/CubicFormula.html

Az $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ negyedfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x = \frac{-a}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{\sqrt[3]{2}(b^2 - 3ac + 12d)}{3\sqrt[3]{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}} + \sqrt[3]{\frac{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}{54}}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{4b}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}(b^2 - 3ac + 12d)}{3\sqrt[3]{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}} - \sqrt[3]{\frac{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}{54}} \pm \frac{-a^3 + 4ab - 8c}{4\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{\sqrt[3]{2}(b^2 - 3ac + 12d)}{3\sqrt[3]{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}} + \sqrt[3]{\frac{2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd)^2}}{54}}}}}$$

Forrás: http://planetmath.org/encyclopedia/QuarticFormula.html