Ekvivalenciarelációk a számfogalom felépítésében

A számfogalom (egy) felépítése

Természetes számok

A véges halmazok „halmazán” értelmezzük a ρ ekvivalenciarelációt a következőképpen:

$$A \rho B \iff \text{létezik } A \to B \text{ bijekció.}$$

A természetes számok nem mások, mint a megfelelő ekvivalenciaosztályok. Például

$$3 = \overline{\{1,2,3\}} = \overline{\{a,b,c\}} = \overline{\{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}} = \cdots.$$

Az összeadás a diszjunkt unió segítségével definiálható: $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \dot\cup B}$. Például

$2+3 = \overline{\{$ ,  $\}} + \overline{\{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}} = \overline{\{$ ,  $\} \dot\cup \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}} =$

$= \overline{\{$ , , $\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}} = 5.$

A szorzás a Descartes-szorzat segítségével definiálható: $\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A \times B}$. Például

$2 \cdot 3 = \overline{\{$ ,  $\}} \cdot \overline{\{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}} = \overline{\{$ ,  $\} \times \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}} =$

$= \overline{\{($ , $\spadesuit)$, $($ , $\heartsuit)$, $($ , $\clubsuit)$, $($ , $\spadesuit)$, $($ , $\heartsuit)$, $($ , $\clubsuit)\}} = 6.$

Ezek a műveletek *jóldefiniáltak* (mit jelent ez?) és rendelkeznek a szokásos műveleti tulajdonságokkal. (Lásd még: Peano-axiómarendszer.)

A számfogalom (egy) felépítése

Egész számok

Az $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ halmazon értelmezzük a ρ ekvivalenciarelációt a következőképpen:

$$(a_1, a_2)\, \rho\, (b_1, b_2) \iff a_1 + b_2 = a_2 + b_1.$$

Az egész számok nem mások, mint a megfelelő ekvivalenciaosztályok. Például

$$-3 = \overline{(0,3)} = \overline{(1,4)} = \overline{(2,5)} = \cdots.$$

Az összeadás, kivonás és szorzás művelete értelmezhető ezen ekvivalenciaosztályok halmazán (hogyan?), és rendelkeznek a szokásos műveleti tulajdonságokkal. Így kapjuk az egész számok $\mathbb{Z}$ gyűrűjét.

Racionális számok

A $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ halmazon értelmezzük a ρ ekvivalenciarelációt a következőképpen:

$$(a_1, a_2)\, \rho\, (b_1, b_2) \iff a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

A racionális számok nem mások, mint a megfelelő ekvivalenciaosztályok. Például

$$\frac{2}{5} = \overline{(2,5)} = \overline{(4,10)} = \overline{(6,15)} = \cdots.$$

Az összeadás, kivonás, szorzás és osztás művelete értelmezhető ezen ekvivalencia-osztályok halmazán (hogyan?), és rendelkeznek a szokásos műveleti tulajdonságokkal. Így kapjuk a racionális számok $\mathbb{Q}$ testét.

A számfogalom (egy) felépítése

Valós számok

A racionális számokból álló Cauchy-sorozatok halmazán értelmezzük a ρ ekvivalenciarelációt a következőképpen:

$$\{a_n\}\,\rho\,\{b_n\} \iff \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0.$$

A valós számok nem mások, mint a megfelelő ekvivalenciaosztályok. Például

$$\pi = \overline{(3\,,\ 3{,}1\,,\ 3{,}14\,,\ 3{,}141\,,\ldots)} = \overline{(4\,,\ 3{,}2\,,\ 3{,}15\,,\ 3{,}142\,,\ldots)} = \cdots.$$

Az összeadás, kivonás, szorzás és osztás művelete értelmezhető ezen ekvivalencia-osztályok halmazán (hogyan?), és rendelkeznek a szokásos műveleti tulajdonságokkal. Így kapjuk a valós számok $\mathbb{R}$ testét. (Lásd még: Dedekind-szeletek.)

Komplex számok

A komplex számok szokásos definíciója nem használ ekvivalenciarelációkat, de később majd látunk egy alternatív definíciót valós polinomok ekvivalenciaosztályai segítségével.