

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET 3

rutinfeladatok

2017 őszi félév, OT

1. feladat Határozza meg az A/ρ osztályozást.

- (a) $A = \{a, b, c, d\}$, $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a)\}$
- (b) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$
- (c) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), (c, d), (d, c), (c, e), (e, c), (d, e), (e, d)\}$
- (d) $A = \{a, b, c, d\}$, $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (c, b), (b, c)\}$

2. feladat Határozza meg az $f: A \rightarrow B$ leképezés magjához tartozó $A/\ker f$ osztályozást.

- (a) $f: \{-2, \dots, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto |x|$
- (b) $f: \{0, \dots, 7\} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor x/3 \rfloor$
- (c) $f: \{-2, \dots, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \operatorname{sgn} x$
- (d) $f: \{0, \dots, 10\} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

3. feladat Rajzolja fel a megadott részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját.

- (a) $(\{1, 2, 3, 4\}; \leq)$ $(\{1, 2, 3, 4\}; |)$
- (b) $(\mathcal{P}(\{a, b\}); \subseteq)$ $(D_{12}; |)$
- (c) $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}); \subseteq)$ $(D_{30}; |)$
- (d) $(\mathbb{Z}; \leq)$ $(D_{36}; |)$

4. feladat Adjon meg egy olyan $(A; \leq)$ részbenrendezett halmazt (például a Hasse-diagramjával), amely eleget tesz a megadott feltételeknek.

- (a) $|A| = 7$, és A -ban 4 minimális és 2 maximális elem van.
- (b) A végtelen, és A -nak van legkisebb és legnagyobb eleme is.
- (c) $|A| = 4$, és A -ban 2 minimális és 3 maximális elem van.
- (d) A -nak végtelen sok minimális eleme van, de csak egy maximális eleme van.

5. feladat Az euklideszi algoritmus segítségével állítsa elő az a és b számok legnagyobb közös osztóját $ax + by$ alakban.

- (a) $a = 66$, $b = 51$
- (b) $a = 438$, $b = 126$
- (c) $a = 754$, $b = 221$
- (d) $a = 564$, $b = 450$

6. feladat Milyen számot kell a kérdőjel helyébe írni, hogy minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén igaz legyen az ekvivalencia?

- (a) $21 \mid 9k \iff ? \mid k$ $48 \mid 84k \iff ? \mid k$
- (b) $125 \mid 150k \iff ? \mid k$ $150 \mid 125k \iff ? \mid k$
- (c) $143 \mid 78k \iff ? \mid k$ $78 \mid 143k \iff ? \mid k$
- (d) $116 \mid 203k \iff ? \mid k$ $203 \mid 116k \iff ? \mid k$

7. feladat Oldja meg az alábbi diofantoszi egyenleteket. Adja meg az összes egész megoldást, majd határozza meg azokat a megoldásokat, amelyekre $0 \leq x, y \leq 20$ teljesül.

- (a) $6x + 9y = 51$
- (b) $6x - 10y = 14$
- (c) $20x + 45y = 245$
- (d) $117x - 63y = 36$

8. feladat Kongruenciák segítségével igazolja az alábbi oszthatóságokat.

- (a) $24 \mid 5^{20} - 1$ $19 \mid 3^{111} + 2^{444}$
- (b) $7 \mid 3^{201} + 2^{102}$ $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$
- (c) $29 \mid 3^{333} + 2^{111}$ $13 \mid 4^{2n+1} + 3^{n+2}$
- (d) $40 \mid 29^{98} - 1$ $27 \mid 2^{5n+1} + 5^{n+2}$

9. feladat Oldja meg az alábbi lineáris kongruenciákat.

- (a) $3x \equiv 4 \pmod{5}$ $6x \equiv 21 \pmod{9}$
- (b) $40x \equiv 28 \pmod{62}$ $104x \equiv 74 \pmod{60}$
- (c) $12x \equiv 44 \pmod{10}$ $42x \equiv 3 \pmod{71}$
- (d) $60x \equiv 14 \pmod{91}$ $24x \equiv 84 \pmod{45}$

10. feladat Határozza meg a \mathbb{Z}_m maradékosztály-gyűrű minden elemének a multiplikatív inverzét (ha létezik).

- (a) $m = 14$
- (b) $m = 15$
- (c) $m = 18$
- (d) $m = 20$

11. feladat Számítsa ki a hatványt a megadott maradékosztálytestben.

- (a) $2^{-3} \in \mathbb{Z}_{11}$
- (b) $3^{-4} \in \mathbb{Z}_{17}$
- (c) $2^{-4} \in \mathbb{Z}_{13}$
- (d) $3^{-3} \in \mathbb{Z}_{19}$

12. feladat Oldja meg az alábbi kongruenciarendszereket.

$$(a) \left. \begin{array}{l} 3x \equiv 3 \pmod{12} \\ 5x \equiv 3 \pmod{6} \\ 3x \equiv 11 \pmod{8} \end{array} \right\} \quad (b) \left. \begin{array}{l} 10x \equiv 2 \pmod{6} \\ 4x \equiv 3 \pmod{7} \\ 3x \equiv 5 \pmod{8} \end{array} \right\}$$

$$(c) \left. \begin{array}{l} 4x \equiv 4 \pmod{6} \\ 11x \equiv 5 \pmod{9} \\ 3x \equiv 2 \pmod{5} \end{array} \right\} \quad (d) \left. \begin{array}{l} 3x \equiv 5 \pmod{10} \\ 3x \equiv 1 \pmod{8} \\ 14x \equiv 4 \pmod{6} \end{array} \right\}$$

13. feladat A kínai maradéktétel segítségével oldja meg az alábbi paraméteres kongruenciarendszereket.

$$(a) \left. \begin{array}{l} x \equiv a \pmod{3} \\ x \equiv b \pmod{4} \\ x \equiv c \pmod{5} \end{array} \right\} \quad (b) \left. \begin{array}{l} x \equiv a \pmod{4} \\ x \equiv b \pmod{5} \\ x \equiv c \pmod{9} \end{array} \right\}$$

$$(c) \left. \begin{array}{l} x \equiv a \pmod{3} \\ x \equiv b \pmod{5} \\ x \equiv c \pmod{7} \end{array} \right\} \quad (d) \left. \begin{array}{l} x \equiv a \pmod{3} \\ x \equiv b \pmod{4} \\ x \equiv c \pmod{7} \end{array} \right\}$$

14. feladat Számítsa ki az f és g polinomok legnagyobb közös osztóját, és adja meg az $fu + gv = \text{lnko}(f, g)$ egyenlet egy megoldását az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben.

- (a) $f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3, \quad g = x^3 + x^2 + x - 3$
- (b) $f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, \quad g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$
- (c) $f = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3, \quad g = x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6$
- (d) $f = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1, \quad g = x^4 + 2x^3 + x + 2$

15. feladat Határozza meg az $fu + gv = \bar{1}$ egyenlet egy megoldását a megadott polinomgyűrűben.

- (a) $f = x^4 + \bar{6}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{4}, \quad g = x^2 + \bar{6}x + \bar{3} \in \mathbb{Z}_7[x]$
- (b) $f = x^3 + x^2 + \bar{1}, \quad g = x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$
- (c) $f = x^3 + x + \bar{1}, \quad g = \bar{3}x^2 + \bar{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (d) $f = x^3 + x^2 + \bar{2}, \quad g = \bar{2}x^2 + x + \bar{3} \in \mathbb{Z}_5[x]$

16. feladat Keresse meg az alábbi polinomok összes racionális gyökét.

- (a) $8x^3 - 6x - 1$
- (b) $2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12$
- (c) $2x^6 - 2x^5 - 4x^3 - 6x^2 - 2x - 4$
- (d) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$

17. feladat Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az f polinomot a megadott polinomgyűrűben.

- (a) $f = x^6 + \bar{3}x^4 - x^3 + \bar{2}x^2 + x - \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (b) $f = x^5 + x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$
- (c) $f = x^5 + x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{2}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$
- (d) $f = x^5 + x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$

18. feladat Határozza meg az f polinom irreducibilis felbontását \mathbb{Q} felett.

- (a) $f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12$
- (b) $f = 2x^5 + 3x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 8x - 12$
- (c) $f = 5x^8 - 5x^7 + 4x^2 - 2x - 2$
- (d) $f = 3x^6 + 2x^5 - 7x^4 + 2$

19. feladat Határozza meg az f polinom irreducibilis felbontását \mathbb{R} és \mathbb{Q} felett.

- (a) $f = x^6 - 27$
- (b) $f = x^4 - x^2 + 1$
- (c) $f = x^6 + 125$
- (d) $f = x^8 - 81$

20. feladat Legyenek az f polinom komplex gyökei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Határozza meg a megadott kifejezés értékét a gyökök kiszámítása nélkül.

- (a) $f = x^3 - 3x^2 + x - 8, \quad \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = ?$
- (b) $f = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 2, \quad \alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 = ?$
- (c) $f = 3x^3 + 6x^2 + 24x + 18, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = ?$
- (d) $f = x^3 + 6x^2 - 5x - 10, \quad \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3^2 = ?$

21. feladat Határozza meg az n szám osztóinak számát és osztóinak összegét.

- (a) $n = 1500$
- (b) $n = 7!$
- (c) $n = 2016$
- (d) $n = 2015$

22. feladat Számítsa ki $\varphi(n)$ értékét.

- (a) $n = 1500$
- (b) $n = 7!$
- (c) $n = 2015$
- (d) $n = 2016$

23. feladat Számítsa ki az alábbi hatványok maradékait a megadott modulusra nézve.

- (a) $2014^{2014} \equiv ? \pmod{7} \quad 2019^{2019} \equiv ? \pmod{11}$
- (b) $13^{170} \equiv ? \pmod{40} \quad 27^{159} \equiv ? \pmod{40}$
- (c) $123^{123} \equiv ? \pmod{11} \quad 303^{4039} \equiv ? \pmod{100}$
- (d) $4447^{2018} \equiv ? \pmod{44} \quad 10^{188} \equiv ? \pmod{27}$

24. feladat Adja meg a $\pi\rho, \rho\pi^{-1}$ és π^{101} permutációkat kétsoros alakban és idegen ciklusok szorzataként is.

- (a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
- (b) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
- (c) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- (d) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 7 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

25. feladat Adja meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi S_7 -beli permutációkat.

- (a) $(134)(3247)(14527), \quad (1234)^{-1}(1526)(1234)$
- (b) $(375)(1357)(357), \quad (1356)(2463)^{-1}(342)$
- (c) $(236)(15)(2754), \quad (4732)^{-1}(15423)(23)$
- (d) $(1652)(35)(156), \quad (32647)(234)(5641)^{-1}$

26. feladat Határozza meg a π, π^{2015} és π^{2016} permutációk paritását.

- (a) $\pi = (123)(4567)$
- (b) $\pi = (12)(345)(6789)$
- (c) $\pi = (1346)(45761)(352)$
- (d) $\pi = (365)(13624)$