A 14a, 15c feladatok megoldásai

14a feladat

Számítsuk ki az f és g polinomok legnagyobb közös osztóját.

$$f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3, \qquad g = x^3 + x^2 + x - 3.$$

Megoldás.

Hajtsuk végre az euklideszi algoritmust:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3 &= (x+1) \cdot \left(x^3 + x^2 + x - 3\right) &&+ \quad 2x^2 + 4x + 6 \\ x^3 + x^2 + x - 3 &= (x-1) \cdot \left(x^2 + 2x + 3\right) &&+ \quad 0 \end{aligned}$$

Tehát $\operatorname{lnko}(f, g) \sim 2x^2 + 4x + 6 \sim x^2 + 2x + 3$.

Hab a tortán:

$$\begin{aligned} f &= \left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+3\right), \quad \text{gyökei:} \quad \pm i, \ -1 \pm \sqrt{2}i \\ g &= (x-1)\left(x^2+2x+3\right), \quad \text{gyökei:} \quad 1, \ -1 \pm \sqrt{2i} \end{aligned}$$

Még több hab a tortán

Az euklideszi algoritmus tömörebben összefoglalva:

$$\begin{aligned} f &= (x+1)\cdot g &&+ \quad 2x^2+4x+6 \\ g &= (x-1)\cdot\left(x^2+2x+3\right) &&+ \quad 0 \end{aligned}$$

Tehát $\text{lnko}\,(f,g) \sim 2x^2+4x+6 \sim x^2+2x+3$.

Fejezzük ki a legnagyobb közös osztót f és g segítségével:

$$x^2+2x+3 = \frac{1}{2}\left(f-(x+1)\cdot g\right) = \frac{1}{2}\cdot f + \left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\cdot g$$

Azt kaptuk, hogy az $fu+gv = \text{lnko}\,(f,g)$ egyenlet egy megoldása:

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad v_0 = -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.$$

15c feladat

Oldjuk meg az $fu + gv = \overline{1}$ egyenletet.

$$f = x^3 + x + \overline{1}, \qquad g = \overline{3}x^2 + \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$$

Megoldás.

Euklideszi algoritmussal számolunk, és a maradékokat kifejezzük f és g segítségével:

$$\begin{aligned} f &= \overline{2}x \cdot g &&+ \overline{2}x + \overline{1} \\ g &= (\overline{4}x + \overline{3}) \cdot (\overline{2}x + \overline{1}) &&+ \overline{4} \\ \overline{2}x + \overline{1} &= (\overline{3}x + \overline{4}) \cdot \overline{4} &&+ \overline{0} \end{aligned}$$

Az első osztás maradéka:

$$\overline{2}x + \overline{1} = f - \overline{2}x \cdot g$$

A második osztás maradéka:

$$\begin{aligned} \overline{4} &= g - (\overline{4}x + \overline{3}) \cdot (\overline{2}x + \overline{1}) \\ &= g - (\overline{4}x + \overline{3}) \cdot (f - \overline{2}x \cdot g) \\ &= -(\overline{4}x + \overline{3}) \cdot f + (\overline{1} + (\overline{4}x + \overline{3})\,\overline{2}x) \cdot g \\ &= (x + \overline{2}) \cdot f + (\overline{3}x^2 + x + \overline{1}) \cdot g \end{aligned}$$

15c feladat

Azt kaptuk, hogy

$$\overline{4} \;=\; \left(x+\overline{2}\right)\cdot f + \left(\overline{3}x^2 + x + \overline{1}\right)\cdot g$$

Jobban szeretünk főpolinomot venni legnagyobb közös osztónak, ezért a fenti egyenlőséget beszorozzuk $\overline{4}^{-1} = \overline{4}$-gyel.

$$\begin{aligned}\overline{1} &= \overline{4}\cdot\left(x+\overline{2}\right)\cdot f + \overline{4}\cdot\left(\overline{3}x^2 + x + \overline{1}\right)\cdot g\\ &= \left(\overline{4}x+\overline{3}\right)\cdot f + \left(\overline{2}x^2 + \overline{4}x + \overline{4}\right)\cdot g\end{aligned}$$

Az $fu + gv = x^2 + x + \overline{5}$ egyenlet egy megoldása:

$$u_0 = \overline{4}x + \overline{3}, \quad v_0 = \overline{2}x^2 + \overline{4}x + \overline{4}.$$