ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET 3
VIZSGADOLGOZAT (MINTA)

Név: ....

EHA: ....

1.	2.	3.	4.	5.	Σ

Tudnivalók: Az első két feladatnál röviden indokolni kell a választ, a többi feladatnál viszont elég a végeredményt megadni. Semmilyen segédeszköz nem használható, még függvénytáblázat, számológép, mobiltelefon sem. Bármiféle nem megengedett segédeszköz használata esetén a dolgozat automatikusan 0 pontos, javítási lehetőség nélkül.

---

1. feladat ($3 \cdot 4$ pont): Igaz-e az állítás? Válaszát röviden indokolja.

(a) Tetszőleges a, b, c egész számokra $a \mid bc \implies a \mid b$ vagy $a \mid c$.

(b) Minden n természetes számra $\sum_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \varphi(n)$.

(c) Tetszőleges $f \in \mathbb{R}[x]$ negyedfokú polinom esetén, ha f-nek van három valós gyöke, akkor a negyedik gyöke is valós.

2. feladat ($3 \cdot 4$ pont): Adjon megadott tulajdonságú példát, és röviden indokolja, hogy a példa miért rendelkezik a megkívánt tulajdonságokkal.

(a) Adjon példát olyan végtelen részbenrendezett halmazra, amelynek két minimális és egy maximális eleme van.

(b) Adjon példát olyan 10-zel osztható számra, amelynek pontosan 10 osztója van.

(c) Adjon példát olyan $f \in \mathbb{Q}[x]$ negyedfokú polinomra, ami $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis, de $\mathbb{R}$ felett nem.

3. feladat ($3 \cdot 4$ pont): Válaszoljon a kérdésekre (itt nem kell indoklást írni).

(a) Mely $m \geq 2$ számok esetén lesz $(\mathbb{Z}_m; +, \cdot)$ test, illetve integritástartomány?

(b) Adja meg az összes olyan $\pi \in S_4$ permutációt, amelyre $\pi^3 = \pi$.

(c) Bontsa fel az $1073 = 29 \cdot 37$ számot két különböző módon két négyzetszám összegére.

4. feladat ($4 \cdot 3$ pont): Egészítse ki a definíciót vagy tételkimondást.

(a) A reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációkat .... nevezzük.

(b) Az $ax \equiv b \pmod m$ lineáris kongruencia akkor és csak akkor oldható meg, ha ....

(c) Elemi törteknek nevezzük a $\dfrac{c}{p^k}$ alakú törteket, ahol p prímszám, k és c pozitív egészek, és ....

(d) Euler-féle φ függvénynek nevezzük azt a $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt, amelyre $\varphi(n) =$ ....

---

5. feladat (12 pont): Egészítse ki a bizonyítást.

Tétel. *Ha $n > 4$ összetett szám, akkor $(n-1)! \equiv 0 \pmod n$.*

Biz. Tfh. n összetett szám és $n > 4$. Tekintsük n prímhatványtényezős felbontását: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

Ha $k \geq 2$, azaz n-nek legalább két különböző prímosztója van, akkor azért lesz $(n-1)!$ osztható n-nel, mert az

$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)$ szorzatban fellépnek a .... számok ($i = 1, \ldots, k$), amelyek szorzata éppen n.

Ha $k = 1$, azaz $n = p_1^{\alpha_1}$ prímhatvány, akkor $\alpha_1 \geq 2$, mert ....

Vizsgáljuk külön az $\alpha_1 \geq 3$ és $\alpha_1 = 2$ eseteket.

Ha $\alpha_1 \geq 3$, akkor azért lesz $(n-1)!$ osztható n-nel, mert az $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)$ szorzatban fellép .... és

..................; ezen két szám szorzata pedig éppen $p_1^{\alpha_1} = n$.

Ha $\alpha_1 = 2$, akkor szükségképpen $p_1 > 2$, hiszen feltettük, hogy ....

Ekkor azért lesz $(n-1)!$ osztható n-nel, mert az $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)$ szorzatban fellép .... és ....;

ezen két szám szorzata pedig $2p_1^2 = 2n$. $\square$