ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET 3

házi feladatok

2016 őszi félév, OT

1. feladat Adja meg a $\pi\rho$, $\rho\pi^{-1}$ és π^{101} permutációkat kétsoros alakban és idegen ciklusok szorzataként is.

(a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 7 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

2. feladat Adja meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi S_7-beli permutációkat.

(a) $(134)\,(3247)\,(14527)$ $(1234)^{-1}\,(1526)\,(1234)$
(b) $(375)(1357)(357)$ $(1356)\,(2463)^{-1}\,(342)$
(c) $(236)(15)(2754)$ $(4732)^{-1}\,(15423)\,(23)$
(d) $(1652)(35)(156)$ $(32647)\,(234)\,(5641)^{-1}$

3. feladat Határozza meg a π, π^{2015} és π^{2016} permutációk paritását.

(a) $\pi = (123)\,(4567)$
(b) $\pi = (12)\,(345)\,(6789)$
(c) $\pi = (1346)\,(45761)\,(352)$
(d) $\pi = (365)\,(13624)$

4. feladat Határozza meg az A/ρ osztályozást.

(a) $A = \{a,b,c,d\}$, $\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a)\}$
(b) $A = \{a,b,c,d,e\}$, $\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$
(c) $A = \{a,b,c,d,e\}$, $\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,a),(c,d),(d,c),(c,e),(e,c),(d,e),(e,d)\}$
(d) $A = \{a,b,c,d\}$, $\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(c,b),(b,c)\}$

5. feladat Határozza meg az $f\colon A \to B$ leképezés magjához tartozó $A/\ker f$ osztályozást.

(a) $f\colon \{-2,\ldots,3\} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto |x|$
(b) $f\colon \{0,\ldots,7\} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor x/3 \rfloor$
(c) $f\colon \{-2,\ldots,3\} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \operatorname{sgn} x$
(d) $f\colon \{0,\ldots,10\} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

6. feladat Rajzolja fel a megadott részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját.

(a) $(\{1,2,3,4\}\,;\leq)$ $(\{1,2,3,4\}\,;|)$
(b) $(\mathcal{P}(\{a,b\})\,;\subseteq)$ $(D_{12};|)$
(c) $(\mathcal{P}(\{a,b,c\})\,;\subseteq)$ $(D_{30};|)$
(d) $(\mathbb{Z};\leq)$ $(D_{36};|)$

7. feladat Adjon meg egy olyan $(A;\leq)$ részbenrendezett halmazt (például a Hasse-diagramjával), amely eleget tesz a megadott feltételeknek.

(a) $|A| = 7$, és A-ban 4 minimális és 2 maximális elem van.
(b) A végtelen, és A-nak van legkisebb és legnagyobb eleme is.
(c) $|A| = 4$, és A-ban 2 minimális és 3 maximális elem van.
(d) A-nak végtelen sok minimális eleme van, de csak egy maximális eleme van.

8. feladat Az euklideszi algoritmus segítségével állítsa elő az a és b számok legnagyobb közös osztóját $ax + by$ alakban.

(a) $a = 66$, $b = 51$
(b) $a = 438$, $b = 126$
(c) $a = 754$, $b = 221$
(d) $a = 564$, $b = 450$

9. feladat Milyen számot kell a kérdőjel helyébe írni, hogy minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén igaz legyen az ekvivalencia?

(a) $21 \mid 9k \iff ? \mid k$ $\quad 48 \mid 84k \iff ? \mid k$

(b) $125 \mid 150k \iff ? \mid k$ $\quad 150 \mid 125k \iff ? \mid k$

(c) $143 \mid 78k \iff ? \mid k$ $\quad 78 \mid 143k \iff ? \mid k$

(d) $116 \mid 203k \iff ? \mid k$ $\quad 203 \mid 116k \iff ? \mid k$

10. feladat Oldja meg az alábbi diofantoszi egyenletek. Adja meg az összes egész megoldást, majd határozza meg azokat a megoldásokat, amelyekre $0 \le x, y \le 20$ teljesül.

(a) $6x + 9y = 51$

(b) $6x - 10y = 14$

(c) $20x + 45y = 245$

(d) $117x - 63y = 36$

11. feladat Kongruenciák segítségével igazolja az alábbi oszthatóságokat.

(a) $24 \mid 5^{20} - 1$ $\quad 19 \mid 3^{111} + 2^{444}$

(b) $7 \mid 3^{201} + 2^{102}$ $\quad 7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

(c) $29 \mid 3^{333} + 2^{111}$ $\quad 13 \mid 4^{2n+1} + 3^{n+2}$

(d) $40 \mid 29^{98} - 1$ $\quad 27 \mid 2^{5n+1} + 5^{n+2}$

12. feladat Oldja meg az alábbi lineáris kongruenciákat. (A megoldásokat az eredeti modulus szerint kell megadni!)

(a) $3x \equiv 4 \pmod 5$ $\quad 6x \equiv 21 \pmod 9$

(b) $40x \equiv 28 \pmod{62}$ $\quad 104x \equiv 74 \pmod{60}$

(c) $12x \equiv 44 \pmod{10}$ $\quad 42x \equiv 3 \pmod{71}$

(d) $60x \equiv 14 \pmod{91}$ $\quad 24x \equiv 84 \pmod{45}$

13. feladat Határozza meg a $\mathbb{Z}_m$ maradékosztály-gyűrű minden elemének a multiplikatív inverzét (ha létezik).

(a) $m = 14$

(b) $m = 15$

(c) $m = 18$

(d) $m = 20$

14. feladat Számítsa ki a hatványt a megadott maradékosztálytestben.

(a) $\overline{2}^{-3} \in \mathbb{Z}_{11}$

(b) $\overline{3}^{-4} \in \mathbb{Z}_{17}$

(c) $\overline{2}^{-4} \in \mathbb{Z}_{13}$

(d) $\overline{3}^{-3} \in \mathbb{Z}_{19}$

15. feladat Oldja meg az alábbi kongruenciarendszereket.

(a) $\left.\begin{aligned} 3x &\equiv 3 \pmod{12} \\ 5x &\equiv 3 \pmod 6 \\ 3x &\equiv 11 \pmod 8 \end{aligned}\right\}$ $\quad$ (b) $\left.\begin{aligned} 10x &\equiv 2 \pmod 6 \\ 4x &\equiv 3 \pmod 7 \\ 3x &\equiv 5 \pmod 8 \end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} 4x &\equiv 4 \pmod 6 \\ 11x &\equiv 5 \pmod 9 \\ 3x &\equiv 2 \pmod 5 \end{aligned}\right\}$ $\quad$ (d) $\left.\begin{aligned} 3x &\equiv 5 \pmod{10} \\ 3x &\equiv 1 \pmod 8 \\ 14x &\equiv 4 \pmod 6 \end{aligned}\right\}$

16. feladat A kínai maradéktétel segítségével oldja meg az alábbi paraméteres kongruenciarendszereket.

(a) $\left.\begin{aligned} x &\equiv a \pmod 3 \\ x &\equiv b \pmod 4 \\ x &\equiv c \pmod 5 \end{aligned}\right\}$ $\quad$ (b) $\left.\begin{aligned} x &\equiv a \pmod 4 \\ x &\equiv b \pmod 5 \\ x &\equiv c \pmod 9 \end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} x &\equiv a \pmod 3 \\ x &\equiv b \pmod 5 \\ x &\equiv c \pmod 7 \end{aligned}\right\}$ $\quad$ (d) $\left.\begin{aligned} x &\equiv a \pmod 3 \\ x &\equiv b \pmod 4 \\ x &\equiv c \pmod 7 \end{aligned}\right\}$

17. feladat Határozza meg az n szám osztóinak számát és osztóinak összegét.

(a) $n = 1500$

(b) $n = 7!$

(c) $n = 2016$

(d) $n = 2015$

18. feladat Számítsa ki $\varphi(n)$ értékét.

(a) $n = 1500$

(b) $n = 7!$

(c) $n = 2015$

(d) $n = 2016$

19. feladat Számítsa ki az alábbi hatványok maradékait a megadott modulusra nézve.

(a) $2014^{2014} \equiv ?\ (\mathrm{mod}\, 7)$ $\quad 2019^{2019} \equiv ?\ (\mathrm{mod}\, 11)$

(b) $13^{170} \equiv ?\ (\mathrm{mod}\, 40)$ $\quad 27^{159} \equiv ?\ (\mathrm{mod}\, 40)$

(c) $123^{123} \equiv ?\ (\mathrm{mod}\, 11)$ $\quad 303^{4039} \equiv ?\ (\mathrm{mod}\, 100)$

(d) $4447^{2018} \equiv ?\ (\mathrm{mod}\, 44)$ $\quad 10^{188} \equiv ?\ (\mathrm{mod}\, 27)$

20. feladat Legyen a f számelméleti függvény összegzési függvénye F. Számítsa ki a f függvény értékét a megadott helyen.

(a) $F(n) = n^2, \quad f(12) = ?$

(b) $F(n) = \log n, \quad f(81) = ?$

(c) $F(n) = \log n, \quad f(36) = ?$

(d) $F(n) = n, \quad f(100) = ?$

21. feladat Számítsa ki az f és g polinomok legnagyobb közös osztóját, és adja meg az $fu + gv = \mathrm{lnko}(f, g)$ egyenlet egy megoldását az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben.

(a) $f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3, \quad g = x^3 + x^2 + x - 3$

(b) $f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, \quad g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$

(c) $f = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3, \quad g = x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6$

(d) $f = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1, \quad g = x^4 + 2x^3 + x + 2$

22. feladat Határozza meg az $fu + gv = \overline{1}$ egyenlet egy megoldását a megadott polinomgyűrűben.

(a) $f = x^4 + \overline{6}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{4}, \quad g = x^2 + \overline{6}x + \overline{3} \in \mathbb{Z}_7[x]$

(b) $f = x^3 + x^2 + \overline{1}, \quad g = x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$

(c) $f = x^3 + x + \overline{1}, \quad g = \overline{3}x^2 + \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$

(d) $f = x^3 + x^2 + \overline{2}, \quad g = \overline{2}x^2 + x + \overline{3} \in \mathbb{Z}_5[x]$

23. feladat Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az f polinomot a megadott polinomgyűrűben.

(a) $f = x^6 + \overline{3}x^4 - x^3 + \overline{2}x^2 + x - \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$

(b) $f = x^5 + x^4 + \overline{2}x^3 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$

(c) $f = x^5 + x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{2}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$

(d) $f = x^5 + x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$

24. feladat Határozza meg az f polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett.

(a) $f = x^6 - 27$

(b) $f = x^4 - x^2 + 1$

(c) $f = x^6 + 125$

(d) $f = x^8 - 81$

25. feladat Határozza meg az f polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}$ felett.

(a) $f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12$

(b) $f = 2x^5 + 3x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 8x - 12$

(c) $f = 5x^8 - 5x^7 + 4x^2 - 2x - 2$

(d) $f = 3x^6 + 2x^5 - 7x^4 + 2$

26. feladat Legyenek az f polinom komplex gyökei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Határozza meg a megadott kifejezés értékét a gyökök kiszámítása nélkül.

(a) $f = x^3 - 3x^2 + x - 8, \quad \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = ?$

(b) $f = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 2, \quad \alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 = ?$

(c) $f = 3x^3 + 6x^2 + 24x + 18, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = ?$

(d) $f = x^3 + 6x^2 - 5x - 10, \quad \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3^2 = ?$