ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET 3 SZORGALMI FELADATOK (2015 ŐSZ)

1. feladat. Bizonyítsa be, hogy ha a π permutáció mozgatja az a elemet, akkor $a\pi$ is mozgatott eleme π-nek.

2. feladat. Van 10 malacperselyem és mindegyikhez egy kulcs (ami csak azt az egy perselyt nyitja). Egy gonosz mukla véletlenszerűen bedobálta a kulcsokat a perselyekbe, minden perselybe egy kulcsot. Mekkora a valószínűsége, hogy csak egyetlen perselyt kell összetörnöm ahhoz, hogy minden perselyt kinyissak?

3. feladat. Melyik az a legkisebb k természetes szám, amelyre $\pi^k = \mathrm{id}$ teljesül minden $\pi \in S_{10}$ esetén?

4. feladat. Oldja meg az S_9 csoportban a $(25)\,(234) \cdot x \cdot (678)\,(789) = (4276)\,(934)$ egyenletet.

5. feladat. Oldja meg S_5-ben az $x^2 = (125)$ egyenletet.

6. feladat. Bizonyítsa be, hogy minden páros permutáció felbontható hármas ciklusok szorzatára.

7. feladat. Az előadáson láttunk négy „megoldást” Sam Loyd feladványára (38. oldal). A megfelelő permutációk paritásának vizsgálatával igazolja, hogy ezek az állások valóban elérhetőek a Loyd által feladott kezdőállásból (ahol 14 és 15 meg van cserélve) szabályos lépésekkel.

8. feladat. Hány ekvivalenciareláció adható meg egy kételemű alaphalmazon? És három- illetve négyelemű halmazon?

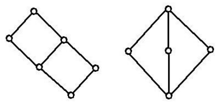
9. feladat. Megadható-e egy 8 elemű alaphalmazon olyan ekvivalenciareláció, amely pontosan 40 elempárból áll? És olyan, ami pontosan 41 elempárból áll?

10. feladat. Melyek azok a relációk, amelyek egyszerre szimmetrikusak és antiszimmetrikusak is?

11. feladat. Igazolja, hogy minden leképezés felbontható egy injektív és egy szürjektív leképezés szorzatára. Részletesebben: tetszőleges $f\colon A \to C$ leképezéshez meg lehet adni egy alkalmas B halmazt, egy $g\colon A \to B$ injekciót és egy $h\colon B \to C$ szürjekciót úgy, hogy $f = gh$.

12. feladat. Igazolja, hogy minden leképezés felbontható egy szürjektív és egy injektív leképezés szorzatára. Részletesebben: tetszőleges $f\colon A \to C$ leképezéshez meg lehet adni egy alkalmas B halmazt, egy $g\colon A \to B$ szürjekciót és egy $h\colon B \to C$ injekciót úgy, hogy $f = gh$.

13. feladat. Van-e olyan n természetes szám, amelyre $(D_n;|)$ Hasse-diagramja a következő? Hány ilyen n szám van?



a b

14. feladat. Tekintsük a következő állítást: „Létezik olyan részbenrendezett halmaz, amelyben a minimális elemek száma ... és a legkisebb elemek száma ...”. A pontozott helyekre (egymástól függetlenül) „nulla”, „egy” vagy „legalább kettő” írható, így összesen kilenc állítást kapunk. Döntse el mind a kilencről, hogy igaz-e. Amelyik igaz, ahhoz rajzoljon egy megfelelő Hasse-diagramot, amelyik nem igaz, annál igazolja, hogy valóban nem létezik olyan részbenrendezett halmaz.

15. feladat. Egy n oldalszámú szabályos sokszög egyik csúcsában állok. A sokszög oldalainak hossza 1 mérföld, rajtam pedig m-mérföldes csizma van, így egy lépéssel az m-edik csúcsba jutok. Elindulok az egyik irányba, és addig meg se állok amíg vissza nem jutottam oda, ahonnan elindultam. Hány lépést fogok tenni? A csúcsok hányadrészét járom be?

16. feladat. Száz szál virágot vásároltunk három különböző fajtából, összesen 30000 forintért. Az egyes virágfajták ára darabonként rendre $130, 190$ és 320 forint. Mennyit vettünk az egyes fajtákból?

17. feladat. Bizonyítsa be, hogy a tízes számrendszerben felírt $\overline{a_n \cdots a_2 a_1 a_0}$ szám akkor és csak akkor osztható 37-tel, ha az $\overline{a_1 a_0} - \overline{a_2 a_2} + \overline{a_4 a_3} - \overline{a_5 a_5} + \cdots$ szám osztható 37-tel. Döntse el ennek segítségével, hogy oszható-e 37-tel 334989655.

18. feladat. Igazolja, hogy a 11, 111, 1111, ... sorozatban nincs négyzetszám.

19. feladat. Határozza meg az összes olyan n természetes számot, amelyre $1! + 2! + 3! + \cdots + n!$ négyzetszám.

20. feladat. Bizonyítsa be, hogy a Fibonacci-sorozat minden negyedik tagja osztható hárommal.

21. feladat. Milyen számjegyeket kell írni a és b helyére, hogy $\overline{1456ab}$ osztható legyen 41-gyel?

22. feladat. Mennyit ad 73-mal osztva x maradékul, ha $x^{99} \equiv 22 \pmod{73}$ és $x^{100} \equiv 69 \pmod{73}$?

23. feladat. Mennyit ad maradékul 31-gyel osztva $33 \cdot \ldots \cdot 59$?

24. feladat. Egy tizenhéttagú kalózcsapat egy zsák aranypénzt lopott. Amikor megpróbálták egyenlően elosztani, azt tapasztalták, hogy három aranypénz kimaradt. A kimaradt aranyak fölötti vitában egy kalózt megöltek. Ezután újraosztották egyenlő arányban a zsákmányt, s most tíz arany maradt ki. Az e fölötti vitában egy újabb kalózt öltek meg, s ezután már el tudták osztani a lopott aranyat úgy, hogy mindenki ugyanannyit kapott. Legkevesebb hány aranypénzt zsákmányoltak?

25. feladat. Oldja meg a $73x \equiv 1 \pmod{247}$ kongruenciát. (Útmutatás: Vizsgáljuk külön modulo 13 és modulo 19 a kongruenciát, majd ezek megoldásaiból „gyúrjuk össze” az eredeti kongruencia megoldását a kínai maradéktétel segítségével.)

26. feladat. Melyek azok a természetes számok, amelyek négyzete tízes számrendszerben 29-re végződik? (Akárcsak az előző feladatnál, itt is használható a kínai maradéktétel.)

27. feladat. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek pontosan 25 osztója van?

28. feladat. Mennyi lehet az n természetes szám értéke, ha $\sigma(n) = 307$?

29. feladat. Melyek azok a természetes számok, amelyeknek páratlan sok osztójuk van?

30. feladat. Bizonyítsa be, hogy $3 \mid \sigma(3n-1)$ minden n természetes számra.

31. feladat. Oldja meg a $\sigma(n) = n + 3$ egyenletet a természetes számok halmazán.

32. feladat. Oldja meg az $n + \tau(n) = \sigma(n)$ egyenletet a természetes számok halmazán.

33. feladat. Mutassa meg, hogy $2^n + 1$ csak akkor lehet prím, ha n kettőhatvány (4.11. Állítás).

34. feladat. Adjon meg olyan egész számokat, amelyek teljes maradékrendszert alkotnak modulo 8, és egyúttal redukált maradékrendszert alkotnak modulo 15.

35. feladat. Igazolja, hogy az $n = 1, 2$ esetek kivételével $\varphi(n)$ sosem páratlan.

36. feladat. Oldja meg a $\varphi(2n) = n$ egyenletet a természetes számok halmazán.

37. feladat. Oldja meg a $\varphi(n) = n - 2$ egyenletet a természetes számok halmazán.

38. feladat. Mennyit ad 53-mal osztva maradékul $80^{\left(111^{50}\right)}$?

39. feladat. Mennyit ad héttel osztva maradékul $111\ldots111$ (99 egyes)?

40. feladat. Bizonyítsa be, hogy minden n természetes szám esetén az $n, n^8 - 1, n^8 + 1$ számok közül az egyik osztható 17-tel.

41. feladat. Mutassa meg, hogy ha $(a, 100) = 1$, akkor $a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$ teljesül. Hasonlítsa össze ezt az állítást az Euler-Fermat–tétellel.

42. feladat. Igazolja, hogy $a^{561} \equiv a \pmod{561}$ bármely a egész számra.

43. feladat. Bizonyítsa be, hogy ha n nem osztható se 2-vel se 5-tel, akkor van $99\cdots99$ alakú többszöröse.

44. feladat. Mennyi lehet n értéke, ha $\varphi(n) = 40$, és $\sigma(n) = n + 1$?

45. feladat. Oldja meg a $\mu(x) + 2 = \mu(6x)$ egyenletet a természetes számok halmazán.

46. feladat. Jelölje az f gyengén multiplikatív számelméleti függvény összegzési függvényét F. Határozza meg $F(45)$ értékét, ha $f(3) = 2, f(5) = 7, f(45) = 21$.

47. feladat. Határozza meg az $f(n) = \frac{1}{n}$ számelméleti függvény összegzési függvényét.

48. feladat. Határozza meg az $F(n) = \log n$ számelméleti függvény megfordítási függvényét.

49. feladat. Oldja meg az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben az $x^2 \cdot f \equiv x^2 - 2x \pmod{x^3 + x}$ kongruenciát.

50. feladat. Sorolja fel a $\mathbb{Z}_2[x] / \left(x^2 + x + \overline{1}\right)$ négyelemű test elemeit, és írja fel az összeadás és a szorzás művelettáblázatát.

51. feladat. Határozza meg a 121-elemű test összes elemének összegét.

52. feladat. Számítsa ki a $\mathbb{Z}_5[x] / \left(x^3 + x^2 + x + 1\right)$ gyűrűben a $\overline{2x^2 + 4}$ elem inverzét.

53. feladat. Számítsa ki a $\mathbb{Z}_3[x] / \left(x^2 + 1\right)$ testben az $u \cdot v$, u/v, v/u elemeket, ahol $u = \overline{x}$ és $v = \overline{x+1}$.

54. feladat. Gyöktelenítse az $1/\left(4 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$ tört nevezőjét.

55. feladat. Mely p prímszámok esetén létezik multiplikatív inverze az $x - \overline{2} \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomnak modulo $x^2 + x + \overline{1}$? Számítsa is ki a multiplikatív inverzet, amikor létezik.

56. feladat. Adja meg az $x^5 + \overline{3}x^4 + x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinom irreducibilis felbontását.

57. feladat. Adja meg az $x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom irreducibilis felbontását tetszőleges p prímszám esetén.

58. feladat. Mely p prímszámok esetén van racionális gyöke az $x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 2x + p$ polinomnak?

59. feladat. Adjon meg végtelen sok olyan n egész számot, melyre az $x^2 + 100x + n$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és végtelen sok olyat is, amelyre nem irreducibilis.

60. feladat. Határozza meg a p és q komplex paraméterek értékét úgy, hogy az $x^3 - px^2 + 11x - q$ polinom gyökei egymást követő egész számok legyenek.

61. feladat. Határozza meg a λ komplex paraméter értékét úgy, hogy az $x^3 - 7x + \lambda$ polinom egyik gyöke valamelyik másik gyök kétszerese legyen.

62. feladat. Határozza meg az összes primitív pitagoraszi számhármast amelyben szerepel a 12.

63. feladat. Igazolja, hogy bármely (x, y, z) primitív pitagoraszi számhármasra $12 \mid xy$ és $60 \mid xyz$.