75. feladat. Bizonyítsa be, hogy $\delta \to \mathbf{1} \to \tau$ és $\mathrm{id} \to \sigma$ (4.29. Tétel).

76. feladat. Bizonyítsa be, hogy a μ függvény gyengén multiplikatív (a 4.33. Tétel bizonyításához kell).

77. feladat. Legyen $f \to F$, ahol $F(n) = n^2$ minden n-re. Számítsa ki $f(12)$ értékét.

78. feladat. Legyen $f \to F$, ahol $F(n) = \log n$ minden n-re. Számítsa ki $f(36)$ és $f(81)$ értékét.

79. feladat. Bizonyítsa be az 5.1. Tételt.

80. feladat. Adjuk meg az $fu + gv = \mathrm{lnko}(f, g)$ polinomegyenlet egy megoldását.
$$f = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \quad g = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$$

81. feladat. Adjuk meg az $fu + gv = \mathrm{lnko}(f, g)$ polinomegyenlet egy megoldását.
$$f = x^4 + x^3 + x^2 + 1, \quad g = x^3 + 1$$

82. feladat. Adja meg az $fu + gv = \mathrm{lnko}(f, g)$ polinomegyenlet egy megoldását.
$$f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, \quad g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$$

83. feladat. Adja meg az $fu + gv = \mathrm{lnko}(f, g)$ polinomegyenlet egy megoldását.
$$f = 2x^3 + 3ix^2 - x - 4i, \quad g = x^2 - 1$$

84. feladat. Adjuk meg az $fu + gv = \mathrm{lnko}(f, g)$ polinomegyenlet egy megoldását a $\mathbb{Z}_2[x]$ polinomgyűrűben.
$$f = x^4 + x^3 + x^2 + \overline{1}, \quad g = x^3 + \overline{1}$$

85. feladat. Adja meg az $fu + gv = \mathrm{lnko}(f, g)$ polinomegyenlet egy megoldását a $\mathbb{Z}_2[x]$ polinomgyűrűben.
$$f = x^4 + x^3 + x, \quad g = x^4 + x^2 + x$$

86. feladat. Adjuk meg az $fu + gv = \overline{1}$ polinomegyenlet egy megoldását a $\mathbb{Z}_7[x]$ polinomgyűrűben.
$$f = x^4 + \overline{6}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{4}, \quad g = x^2 + \overline{6}x + \overline{3}$$

87. feladat. Adja meg az $fu + gv = \overline{1}$ polinomegyenlet egy megoldását a $\mathbb{Z}_5[x]$ polinomgyűrűben.
$$f = x^3 + \overline{4}x, \quad g = \overline{2}x^2 + \overline{3}x + \overline{2}$$

88. feladat. Bontsuk irreducibilis tényezők szorzatára az $f = x^6 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomot.

89. feladat. Bontsuk irreducibilis tényezők szorzatára az $x^2 + x + 1$ polinomot $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ és $\mathbb{Z}_7$ felett.

90. feladat. Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az $x^4 + 3x^3 + x^2 + 4$ polinomot $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ és $\mathbb{Z}_7$ felett.

91. feladat. Határozzuk meg $\mathbb{Z}_2$ felett az összes legfeljebb harmadfokú irreducibilis polinomot.

92. feladat. Bontsuk irreducibilis tényezők szorzatára az $x^4 + x + 1$ és $x^4 + x^2 + 1$ polinomokat $\mathbb{Z}_2$ felett.

93. feladat. Bontsuk $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az $f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12$ polinomot.

94. feladat. Bontsuk $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomokat:
$$2x^{100} - 3x^{73} + 69x - 12, \quad x^3 + 5x^2 + 6x + 1, \quad x^7 - 7x^6 + 24x^5 - 50x^4 + 68x^3 - 57x^2 + 25x - 1, \quad x^6 + 125.$$

95. feladat. Bontsa $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomokat:
$$4x^4 - 7x^2 - 5x - 1, \quad 5x^8 - 5x^7 + 4x^2 - 2x - 2, \quad x^4 - x^3 + 2x + 1, \quad x^6 - 125, \quad x^4 + 36$$

96. feladat. Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

97. feladat. Anélkül, hogy megkeresnénk a gyököket, határozzuk meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek köbösszegét, valamint számtani, mértani és harmonikus közepét.

98. feladat. Fejezze ki az $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

99. feladat. Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 2$ polinom gyökeinek negyedik hatványösszegét.

100. feladat. Határozza meg az $f = x^2 + bx + c = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ polinomra a $D = (\alpha_1 - \alpha_2)^2$ diszkriminánst (csak latin betűkkel!).

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET 3 HF (2015 ŐSZ)

1. feladat. Számítsuk ki S_6-ban a $\pi\rho$, $\rho\pi$, π^{-1} és π^{2014} permutációkat, ahol
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. feladat. Számítsa ki S_9-ben a $\pi\rho^{-1}$, $\rho^2\pi$, π^2, π^3, π^4, π^5, π^{2014} permutációkat, ahol
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 1 & 7 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 9 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges π és ρ permutációk esetén $(\pi\rho)^{-1} = \rho^{-1}\pi^{-1}$.

4. feladat. Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π permutációt, majd számítsuk ki a 99-edik hatványát:
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. feladat. Bontsa idegen ciklusok szorzatára az alábbi ρ permutációt, majd számítsa ki a 99-edik hatványát:
$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. feladat. Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat:
$$(134)(3247)(14527), \qquad (1234)^{-1}(1526)(1234).$$

7. feladat. Számítsa ki S_9-ben az alábbi permutációkat. A végeredményt adja meg idegen ciklusok szorzataként és 2×9-es mátrixként is (minden elem alá a képét írva):
$$(1356)(2463)(342), \ (4732)^{-1}(15423), \ \pi\rho, \ \rho^2\pi, \ ((123)\pi)^{-1}, \ (123)^{-1}\pi^{-1}, \text{ ahol}$$
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 8 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 8 & 4 & 1 & 3 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

8. feladat. Bontsuk transzpozíciók szorzatára a $\pi = (137)(2564)$ permutációt.

9. feladat. Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad (123)(4567), \quad (12)(3456)(78), \quad (12)(345)(6789)$$

10. feladat. Határozza meg az alábbi permutációk paritását.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad (12)(45)(1245), \quad \left((1346)(45761)(352)(4162)\right)^{2014}$$

11. feladat. Legyen $f\colon \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$. Határozzuk meg f magját.

12. feladat. Legyen $A = \{a, b, c, d\}$ és $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a)\}$. Határozzuk meg az A/ρ osztályozást.

13. feladat. Legyen $A = \{a, b, c, d, e\}$ és $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), (c, d), (d, c), (c, e), (e, c), (d, e), (e, d)\}$. Határozza meg az A/ρ osztályozást.

14. feladat. Határozzuk meg az $A = \{1, \ldots, 7\}$ halmazon azt a ρ ekvivalenciarelációt, amelyre $A/\rho = \{\{1, 6, 7\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$.

15. feladat. Határozza meg az $A = \{1, \ldots, 5\}$ halmazon azt a ρ ekvivalenciarelációt, amelyre $A/\rho = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}\}$.

16. feladat. Legyen $A = \{-2, \ldots, 3\}$ és $\varphi\colon A \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto |x|$. Határozzuk meg az $A/\ker\varphi$ osztályozást.

17. feladat. Legyen $B = \{0, \ldots, 7\}$ és $\psi\colon B \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor x/3 \rfloor$. Határozzuk meg a $B/\ker\psi$ osztályozást.

18. feladat. Legyen $C = \{-2, \ldots, 3\}$ és $\zeta\colon C \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \operatorname{sgn} x$. Határozza meg a $C/\ker\zeta$ osztályozást.

19. feladat. Legyen $D = \{0, \ldots, 10\}$ és $\xi\colon D \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$. Határozza meg a $D/\ker\xi$ osztályozást.

20. feladat. Mutassa meg, hogy az $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ alaphalmazon az $(a_1, a_2)\,\rho\,(b_1, b_2) \iff a_1 b_2 = a_2 b_1$ képlettel definiált ρ reláció ekvivalenciareláció.

21. feladat. Rajzoljuk fel a $(D_{12};|)$ és $(D_{12};\leq)$ részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját.

22. feladat. Rajzolja fel a $(\mathcal{P}(\{a,b,c\});\subseteq)$, $(D_{30};|)$ és $(D_{36};|)$ részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját.

23. feladat. Rajzoljunk olyan részbenrendezett halmazt, amiben 4 minimális és 2 maximális elem van.

24. feladat. Rajzoljon olyan *négyelemű* részbenrendezett halmazt, amiben 2 minimális és 3 maximális elem van.

25. feladat. Az euklideszi algoritmus segítségével állítsa elő 66 és 51 legnagyobb közös osztóját $?\cdot 66+?\cdot 51$ alakban.

26. feladat. Az euklideszi algoritmus segítségével állítsa elő a és b legnagyobb közös osztóját $?\cdot a+?\cdot b$ alakban, ahol
$$a=438,\ b=126,\ \text{illetve}\ a=754,\ b=221.$$

27. feladat. Milyen számot kell a kérdőjel helyébe írni, hogy minden $k\in\mathbb{Z}$ esetén igaz legyen az ekvivalencia?
$$21\mid 9k \iff ?\mid k \qquad 48\mid 84k \iff ?\mid k \qquad 84\mid 48k \iff ?\mid k$$

28. feladat. Milyen számot kell a kérdőjel helyébe írni, hogy minden $k\in\mathbb{Z}$ esetén igaz legyen az ekvivalencia?
$$125\mid 150k \iff ?\mid k \qquad 150\mid 125k \iff ?\mid k \qquad 143\mid 78k \iff ?\mid k$$

29. feladat. Hogyan lehet felváltani 51 petákot 6 petákos és 9 petákos érmékre?

30. feladat. Adjuk meg a $6x-10y=14$ diofantoszi egyenlet összes megoldását, valamint a 0 és 20 közé eső megoldásokat.

31. feladat. Adja meg a $20x+45y=245$ diofantoszi egyenlet összes megoldását, valamint a nemnegatív megoldásokat.

32. feladat. Adja meg a $117x-63y=36$ diofantoszi egyenlet összes megoldását, valamint a 0 és 50 közé eső megoldásokat.

33. feladat. Bizonyítsa be a 3.11. Tételből az (1)–(3) és (4) $/\pm$ állításokat.

34. feladat. Kongruenciák segítségével igazoljuk az alábbi oszthatóságokat:
$$24\mid 5^{20}-1,\qquad 19\mid 3^{111}+2^{444},\qquad 7\mid 3^{201}+2^{102},\qquad 7\mid 3^{2n+1}+2^{n+2}.$$

35. feladat. Kongruenciák segítségével igazolja az alábbi oszthatóságokat:
$$29\mid 3^{333}+2^{111},\qquad 40\mid 29^{98}-1,\qquad 13\mid 4^{2n+1}+3^{n+2},\qquad 27\mid 2^{5n+1}+5^{n+2}.$$

36. feladat. Mikor osztható 5^n-1 tizenhárommal?

37. feladat. Mikor osztható 2^n-1 héttel? No és 2^n+1?

38. feladat. Határozza meg $7+7^2+7^3+\cdots+7^{2015}$ utolsó két számjegyét.

39. feladat. Kongruenciák segítségével igazoljuk a 9-cel való oszthatóság szabályát:
$$\overline{a_n\cdots a_2a_1a_0}\equiv a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n \pmod 9.$$

40. feladat. Kongruenciák segítségével igazolja a 11-gyel való oszthatóság szabályát:
$$\overline{a_n\cdots a_2a_1a_0}\equiv a_0-a_1+a_2-\cdots+(-1)^n a_n \pmod{11}.$$

41. feladat. Számoljunk $\mathbb{Z}_7$-ben! $\quad \overline{3}+\overline{6}=?,\quad \overline{3}-\overline{6}=?,\quad \overline{3}\cdot\overline{6}=?,\quad \overline{2}^5=?$

42. feladat. Számoljon $\mathbb{Z}_{12}$-ben! $\quad \overline{6}+\overline{8}=?,\quad \overline{6}-\overline{8}=?,\quad \overline{6}\cdot\overline{8}=?,\quad \overline{5}^3=?$

43. feladat. Írjuk fel $\mathbb{Z}_4$ összeadó- és szorzótábláját.

44. feladat. Írja fel $\mathbb{Z}_5$ összeadó- és szorzótábláját.

45. feladat. Soroljuk fel a redukált maradékosztályokat a következő esetekben: $\mathbb{Z}_5^*=?,\quad \mathbb{Z}_6^*=?,\quad \mathbb{Z}_{10}^*=?$

46. feladat. Sorolja fel a redukált maradékosztályokat a következő esetekben: $\mathbb{Z}_{12}^*=?,\quad \mathbb{Z}_{13}^*=?,\quad \mathbb{Z}_{16}^*=?$

47. feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciákat:
$$3x\equiv 4 \pmod 5,\qquad 6x\equiv 21 \pmod 9,\qquad 40x\equiv 28 \pmod{62}$$

48. feladat. Oldja meg az alábbi lineáris kongruenciákat:
$$12x\equiv 44 \pmod{10},\qquad 24x\equiv 84 \pmod{45},\qquad 104x\equiv 74 \pmod{60},\qquad 13x\equiv 6 \pmod{41}$$

49. feladat. Határozzuk meg $\mathbb{Z}_{14}$ elemeinek multiplikatív inverzét.

50. feladat. Határozza meg $\mathbb{Z}_{15}$ elemeinek multiplikatív inverzét.

51. feladat. Számítsuk ki $\mathbb{Z}_{11}$-ben a $\overline{2}^{-3}$ hatványt.

52. feladat. Számítsa ki a következő hatványokat: $\overline{2}^{-3}\in\mathbb{Z}_{13},\ \overline{3}^{-4}\in\mathbb{Z}_{17}$.

53. feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert.
$$\left.\begin{aligned} x&\equiv 1 \pmod 4\\ x&\equiv 3 \pmod 6\end{aligned}\right\}$$

54. feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert.
$$\left.\begin{aligned} x&\equiv 1 \pmod 4\\ x&\equiv 3 \pmod 6\\ x&\equiv 1 \pmod 8\end{aligned}\right\}$$

55. feladat. Oldja meg az alábbi kongruenciarendszert.
$$\left.\begin{aligned} 4x&\equiv 7 \pmod 9\\ 10x&\equiv 4 \pmod{12}\end{aligned}\right\}$$

56. feladat. Oldja meg az alábbi kongruenciarendszert.
$$\left.\begin{aligned} 5x&\equiv 11 \pmod 6\\ 2x&\equiv 5 \pmod 9\\ 4x&\equiv 7 \pmod 5\end{aligned}\right\}$$

57. feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert.
$$\left.\begin{aligned} x&\equiv 2 \pmod 3\\ x&\equiv 1 \pmod 4\\ x&\equiv 3 \pmod 5\end{aligned}\right\}$$

58. feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert.
$$\left.\begin{aligned} x&\equiv a \pmod 3\\ x&\equiv b \pmod 4\\ x&\equiv c \pmod 5\end{aligned}\right\}$$

59. feladat. Oldja meg az alábbi kongruenciarendszert.
$$\left.\begin{aligned} x&\equiv a \pmod 3\\ x&\equiv b \pmod 5\\ x&\equiv c \pmod 7\end{aligned}\right\}$$

60. feladat. Igazolja, hogy az id, **1**, és δ függvények gyengén multiplikatívak (4.5. Tétel).

61. feladat. Számítsuk ki 1500 osztóinak számát és osztóinak összegét.

62. feladat. Számítsa ki 7! osztóinak számát és osztóinak összegét.

63. feladat. Bizonyítsa be a 4.8. Tételbeli feltétel elegendő ahhoz, hogy n tökéletes szám legyen.

64. feladat. Bizonyítsa be, hogy ha 2^n-1 prímszám, akkor szükségképpen n is prím.

65. feladat. Számítsuk ki a következő értékeket: $\varphi(5)=?,\quad \varphi(6)=?,\quad \varphi(10)=?,\quad \varphi(81)=?,\quad \varphi(216)=?$

66. feladat. Számítsa ki a következő értékeket: $\varphi(625)=?,\quad \varphi(1000)=?$

67. feladat. Teljes maradékrendszer-e $1,11,21,31,\ldots,751,761$ modulo 77?

68. feladat. Teljes maradékrendszer-e $7,22,37,52,\ldots,11632,11647$ modulo 777?

69. feladat. Redukált maradékrendszer-e $15,35,55,\ldots,295,315$ modulo 32?

70. feladat. Redukált maradékrendszer-e $1,4,7,\ldots,157,160$ modulo 81?

71. feladat. Számítsuk ki $\varphi(1500)$ értékét.

72. feladat. Számítsa ki $\varphi(7!)$ értékét.

73. feladat. Számítsuk ki az alábbi hatványokat.
$$2014^{2014}\equiv ? \pmod 7,\qquad 13^{170}\equiv ? \pmod{40},\qquad 303^{4039}\equiv ? \pmod{100}$$

74. feladat. Számítsa ki az alábbi hatványokat
$$123^{123}\equiv ? \pmod{11},\qquad 10^{188}\equiv ? \pmod{27},\qquad 4447^{2018}\equiv ? \pmod{44}$$