

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET 3 HF (2015 ŐSZ)

1. feladat. Számítsuk ki S_6 -ban a $\pi\rho$, $\rho\pi$, π^{-1} és π^{2014} permutációkat, ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. feladat. Számítsa ki S_9 -ben a $\pi\rho^{-1}$, $\rho^2\pi$, π^2 , π^3 , π^4 , π^5 , π^{2014} permutációkat, ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 1 & 7 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 9 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges π és ρ permutációk esetén $(\pi\rho)^{-1} = \rho^{-1}\pi^{-1}$.

4. feladat. Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π permutációt, majd számítsuk ki a 99-edik hatványát:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. feladat. Bontsa idegen ciklusok szorzatára az alábbi ρ permutációt, majd számítsa ki a 99-edik hatványát:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. feladat. Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat:

$$(134)(3247)(14527), \quad (1234)^{-1}(1526)(1234).$$

7. feladat. Számítsa ki S_9 -ben az alábbi permutációkat. A végeredményt adja meg idegen ciklusok szorzataként és 2×9 -es mátrixként is (minden elem alá a képét írva):

$$(1356)(2463)(342), (4732)^{-1}(15423), \pi\rho, \rho^2\pi, ((123)\pi)^{-1}, (123)^{-1}\pi^{-1}, \text{ ahol}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 8 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 8 & 4 & 1 & 3 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

8. feladat. Bontsuk transzpozíciók szorzatára a $\pi = (137)(2564)$ permutációt.

9. feladat. Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad (123)(4567), \quad (12)(3456)(78), \quad (12)(345)(6789)$$

10. feladat. Határozza meg az alábbi permutációk paritását.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad (12)(45)(1245), \quad ((1346)(45761)(352)(4162))^{2014}$$

11. feladat. Legyen $f: \{-1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$. Határozzuk meg f magját.

12. feladat. Legyen $A = \{a, b, c, d\}$ és $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a)\}$. Határozzuk meg az A/ρ osztályozást.

13. feladat. Legyen $A = \{a, b, c, d, e\}$ és $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), (c, d), (d, c), (c, e), (e, c), (d, e), (e, d)\}$. Határozza meg az A/ρ osztályozást.

14. feladat. Határozzuk meg az $A = \{1, \dots, 7\}$ halmazon azt a ρ ekvivalenciarelációt, amelyre $A/\rho = \{\{1, 6, 7\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$.

15. feladat. Határozza meg az $A = \{1, \dots, 5\}$ halmazon azt a ρ ekvivalenciarelációt, amelyre $A/\rho = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}\}$.

16. feladat. Legyen $A = \{-2, \dots, 3\}$ és $\varphi: A \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto |x|$. Határozzuk meg az $A/\ker \varphi$ osztályozást.

17. feladat. Legyen $B = \{0, \dots, 7\}$ és $\psi: B \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor x/3 \rfloor$. Határozzuk meg a $B/\ker \psi$ osztályozást.

18. feladat. Legyen $C = \{-2, \dots, 3\}$ és $\zeta: C \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \operatorname{sgn} x$. Határozza meg a $C/\ker \zeta$ osztályozást.

19. feladat. Legyen $D = \{0, \dots, 10\}$ és $\xi: D \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$. Határozza meg a $D/\ker \xi$ osztályozást.

20. feladat. Mutassa meg, hogy az $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ alaphalmazon az $(a_1, a_2) \rho (b_1, b_2) \iff a_1 b_2 = a_2 b_1$ képlettel definiált ρ reláció ekvivalenciareláció.

- 21. feladat.** Rajzoljuk fel a $(D_{12}; |)$ és $(D_{12}; \leq)$ részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját.
- 22. feladat.** Rajzolja fel a $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}); \subseteq)$, $(D_{30}; |)$ és $(D_{36}; |)$ részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját.
- 23. feladat.** Rajzoljunk olyan részbenrendezett halmazt, amiben 4 minimális és 2 maximális elem van.
- 24. feladat.** Rajzoljon olyan *négyelemű* részbenrendezett halmazt, amiben 2 minimális és 3 maximális elem van.
- 25. feladat.** Az euklideszi algoritmus segítségével állítsa elő 66 és 51 legnagyobb közös osztóját $? \cdot 66 + ? \cdot 51$ alakban.
- 26. feladat.** Az euklideszi algoritmus segítségével állítsa elő a és b legnagyobb közös osztóját $? \cdot a + ? \cdot b$ alakban, ahol
 $a = 438$, $b = 126$, illetve $a = 754$, $b = 221$.
- 27. feladat.** Milyen számot kell a kérdőjel helyébe írni, hogy minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén igaz legyen az ekvivalencia?
 $21 \mid 9k \iff ? \mid k \quad 48 \mid 84k \iff ? \mid k \quad 84 \mid 48k \iff ? \mid k$
- 28. feladat.** Milyen számot kell a kérdőjel helyébe írni, hogy minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén igaz legyen az ekvivalencia?
 $125 \mid 150k \iff ? \mid k \quad 150 \mid 125k \iff ? \mid k \quad 143 \mid 78k \iff ? \mid k$
- 29. feladat.** Hogyan lehet felváltani 51 petákot 6 petákos és 9 petákos érmékre?
- 30. feladat.** Adjuk meg a $6x - 10y = 14$ diofantoszi egyenlet összes megoldását, valamint a 0 és 20 közé eső megoldásokat.
- 31. feladat.** Adja meg a $20x + 45y = 245$ diofantoszi egyenlet összes megoldását, valamint a nemnegatív megoldásokat.
- 32. feladat.** Adja meg a $117x - 63y = 36$ diofantoszi egyenlet összes megoldását, valamint a 0 és 50 közé eső megoldásokat.
- 33. feladat.** Bizonyítsa be a 3.11. Tételből az (1)–(3) és (4) $/\pm$ állításokat.
- 34. feladat.** Kongruenciák segítségével igazoljuk az alábbi oszthatóságokat:
 $24 \mid 5^{20} - 1$, $19 \mid 3^{111} + 2^{444}$, $7 \mid 3^{201} + 2^{102}$, $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.
- 35. feladat.** Kongruenciák segítségével igazolja az alábbi oszthatóságokat:
 $29 \mid 3^{333} + 2^{111}$, $40 \mid 29^{98} - 1$, $13 \mid 4^{2n+1} + 3^{n+2}$, $27 \mid 2^{5n+1} + 5^{n+2}$.
- 36. feladat.** Mikor osztható $5^n - 1$ tizenhárommal?
- 37. feladat.** Mikor osztható $2^n - 1$ héttel? No és $2^n + 1$?
- 38. feladat.** Határozza meg $7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2015}$ utolsó két számjegyét.
- 39. feladat.** Kongruenciák segítségével igazoljuk a 9-cel való oszthatóság szabályát:
 $\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0} \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \pmod{9}$.
- 40. feladat.** Kongruenciák segítségével igazolja a 11-gyel való oszthatóság szabályát:
 $\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n \pmod{11}$.
- 41. feladat.** Számoljunk \mathbb{Z}_7 -ben! $\bar{3} + \bar{6} = ?$, $\bar{3} - \bar{6} = ?$, $\bar{3} \cdot \bar{6} = ?$, $\bar{2}^5 = ?$
- 42. feladat.** Számoljon \mathbb{Z}_{12} -ben! $\bar{6} + \bar{8} = ?$, $\bar{6} - \bar{8} = ?$, $\bar{6} \cdot \bar{8} = ?$, $\bar{5}^3 = ?$
- 43. feladat.** Írjuk fel \mathbb{Z}_4 összeadó- és szorzótábláját.
- 44. feladat.** Írja fel \mathbb{Z}_5 összeadó- és szorzótábláját.
- 45. feladat.** Soroljuk fel a redukált maradékosztályokat a következő esetekben: $\mathbb{Z}_5^* = ?$, $\mathbb{Z}_6^* = ?$, $\mathbb{Z}_{10}^* = ?$
- 46. feladat.** Sorolja fel a redukált maradékosztályokat a következő esetekben: $\mathbb{Z}_{12}^* = ?$, $\mathbb{Z}_{13}^* = ?$, $\mathbb{Z}_{16}^* = ?$
- 47. feladat.** Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciákat:
 $3x \equiv 4 \pmod{5}$, $6x \equiv 21 \pmod{9}$, $40x \equiv 28 \pmod{62}$
- 48. feladat.** Oldja meg az alábbi lineáris kongruenciákat:
 $12x \equiv 44 \pmod{10}$, $24x \equiv 84 \pmod{45}$, $104x \equiv 74 \pmod{60}$, $13x \equiv 6 \pmod{41}$
- 49. feladat.** Határozzuk meg \mathbb{Z}_{14} elemeinek multiplikatív inverzét.
- 50. feladat.** Határozza meg \mathbb{Z}_{15} elemeinek multiplikatív inverzét.
- 51. feladat.** Számítsuk ki \mathbb{Z}_{11} -ben a $\bar{2}^{-3}$ hatványt.
- 52. feladat.** Számítsa ki a következő hatványokat: $\bar{2}^{-3} \in \mathbb{Z}_{13}$, $\bar{3}^{-4} \in \mathbb{Z}_{17}$.

53. feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert.

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 3 \pmod{6} \end{array} \right\}$$

54. feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert.

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 1 \pmod{8} \end{array} \right\}$$

55. feladat. Oldja meg az alábbi kongruenciarendszert.

$$\left. \begin{array}{l} 4x \equiv 7 \pmod{9} \\ 10x \equiv 4 \pmod{12} \end{array} \right\}$$

56. feladat. Oldja meg az alábbi kongruenciarendszert.

$$\left. \begin{array}{l} 5x \equiv 11 \pmod{6} \\ 2x \equiv 5 \pmod{9} \\ 4x \equiv 7 \pmod{5} \end{array} \right\}$$

57. feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert.

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{array} \right\}$$

58. feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert.

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv a \pmod{3} \\ x \equiv b \pmod{4} \\ x \equiv c \pmod{5} \end{array} \right\}$$

59. feladat. Oldja meg az alábbi kongruenciarendszert.

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv a \pmod{3} \\ x \equiv b \pmod{5} \\ x \equiv c \pmod{7} \end{array} \right\}$$

60. feladat. Igazolja, hogy az id , 1 , és δ függvények gyengén multiplikatívak (4.5. Tétel).

61. feladat. Számítsuk ki 1500 osztóinak számát és osztóinak összegét.

62. feladat. Számítsa ki $7!$ osztóinak számát és osztóinak összegét.

63. feladat. Bizonyítsa be a 4.8. Tételbeli feltétel elegendő ahhoz, hogy n tökéletes szám legyen.

64. feladat. Bizonyítsa be, hogy ha $2^n - 1$ prímszám, akkor szükségképpen n is prím.

65. feladat. Számítsuk ki a következő értékeket: $\varphi(5) = ?$, $\varphi(6) = ?$, $\varphi(10) = ?$, $\varphi(81) = ?$, $\varphi(216) = ?$

66. feladat. Számítsa ki a következő értékeket: $\varphi(625) = ?$, $\varphi(1000) = ?$

67. feladat. Teljes maradékrendszer-e $1, 11, 21, 31, \dots, 751, 761$ modulo 77 ?

68. feladat. Teljes maradékrendszer-e $7, 22, 37, 52, \dots, 11632, 11647$ modulo 777 ?

69. feladat. Redukált maradékrendszer-e $15, 35, 55, \dots, 295, 315$ modulo 32 ?

70. feladat. Redukált maradékrendszer-e $1, 4, 7, \dots, 157, 160$ modulo 81 ?

71. feladat. Számítsuk ki $\varphi(1500)$ értékét.

72. feladat. Számítsa ki $\varphi(7!)$ értékét.

73. feladat. Számítsuk ki az alábbi hatványokat.

$$2014^{2014} \equiv ? \pmod{7}, \quad 13^{170} \equiv ? \pmod{40}, \quad 303^{4039} \equiv ? \pmod{100}$$

74. feladat. Számítsa ki az alábbi hatványokat

$$123^{123} \equiv ? \pmod{11}, \quad 10^{188} \equiv ? \pmod{27}, \quad 4447^{2018} \equiv ? \pmod{44}$$

75. feladat. Bizonyítsa be, hogy $\delta \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow \tau$ és $\text{id} \rightarrow \sigma$ (4.29. Tétel).

76. feladat. Bizonyítsa be, hogy a μ függvény gyengén multiplikatív (a 4.33. Tétel bizonyításához kell).

77. feladat. Legyen $f \rightarrow F$, ahol $F(n) = n^2$ minden n -re. Számítsa ki $f(12)$ értékét.

78. feladat. Legyen $f \rightarrow F$, ahol $F(n) = \log n$ minden n -re. Számítsa ki $f(36)$ és $f(81)$ értékét.

79. feladat. Bizonyítsa be az 5.1. Tételt.

80. feladat. Adjuk meg az $fu + gv = \text{lko}(f, g)$ polinomegyenlet egy megoldását.

$$f = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \quad g = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$$

81. feladat. Adjuk meg az $fu + gv = \text{lko}(f, g)$ polinomegyenlet egy megoldását.

$$f = x^4 + x^3 + x^2 + 1, \quad g = x^3 + 1$$

82. feladat. Adja meg az $fu + gv = \text{lko}(f, g)$ polinomegyenlet egy megoldását.

$$f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, \quad g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$$

83. feladat. Adja meg az $fu + gv = \text{lko}(f, g)$ polinomegyenlet egy megoldását.

$$f = 2x^3 + 3ix^2 - x - 4i, \quad g = x^2 - 1$$

84. feladat. Adjuk meg az $fu + gv = \text{lko}(f, g)$ polinomegyenlet egy megoldását a $\mathbb{Z}_2[x]$ polinomgyűrűben.

$$f = x^4 + x^3 + x^2 + \bar{1}, \quad g = x^3 + \bar{1}$$

85. feladat. Adja meg az $fu + gv = \text{lko}(f, g)$ polinomegyenlet egy megoldását a $\mathbb{Z}_2[x]$ polinomgyűrűben.

$$f = x^4 + x^3 + x, \quad g = x^4 + x^2 + x$$

86. feladat. Adjuk meg az $fu + gv = \bar{1}$ polinomegyenlet egy megoldását a $\mathbb{Z}_7[x]$ polinomgyűrűben.

$$f = x^4 + \bar{6}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{4}, \quad g = x^2 + \bar{6}x + \bar{3}$$

87. feladat. Adja meg az $fu + gv = \bar{1}$ polinomegyenlet egy megoldását a $\mathbb{Z}_5[x]$ polinomgyűrűben.

$$f = x^3 + \bar{4}x, \quad g = \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

88. feladat. Bontsuk irreducibilis tényezők szorzatára az $f = x^6 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomot.

89. feladat. Bontsuk irreducibilis tényezők szorzatára az $x^2 + x + 1$ polinomot \mathbb{Z}_3 , \mathbb{Z}_5 és \mathbb{Z}_7 felett.

90. feladat. Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára az $x^4 + 3x^3 + x^2 + 4$ polinomot \mathbb{Z}_3 , \mathbb{Z}_5 és \mathbb{Z}_7 felett.

91. feladat. Határozzuk meg \mathbb{Z}_2 felett az összes legfeljebb harmadfokú irreducibilis polinomot.

92. feladat. Bontsuk irreducibilis tényezők szorzatára az $x^4 + x + 1$ és $x^4 + x^2 + 1$ polinomokat \mathbb{Z}_2 felett.

93. feladat. Bontsuk \mathbb{Q} felett irreducibilis polinomok szorzatára az $f = 2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12$ polinomot.

94. feladat. Bontsuk \mathbb{Q} felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomokat:

$$2x^{100} - 3x^{73} + 69x - 12, \quad x^3 + 5x^2 + 6x + 1, \quad x^7 - 7x^6 + 24x^5 - 50x^4 + 68x^3 - 57x^2 + 25x - 1, \quad x^6 + 125.$$

95. feladat. Bontsa \mathbb{Q} felett irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomokat:

$$4x^4 - 7x^2 - 5x - 1, \quad 5x^8 - 5x^7 + 4x^2 - 2x - 2, \quad x^4 - x^3 + 2x + 1, \quad x^6 - 125, \quad x^4 + 36$$

96. feladat. Fejezzük ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

97. feladat. Anélkül, hogy megkeresnénk a gyököket, határozzuk meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek köbösszegét, valamint számtani, mértani és harmonikus közepét.

98. feladat. Fejezze ki az $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

99. feladat. Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 2$ polinom gyökeinek negyedik hatványösszegét.

100. feladat. Határozza meg az $f = x^2 + bx + c = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ polinomra a $D = (\alpha_1 - \alpha_2)^2$ diszkriminánst (csak latin betűkkel!).