Algebra és számelmélet 3 előadás
Szimmetrikus polinomok

Waldhauser Tamás
2014 őszi félév

Tartalom

Tartalom

Gyökök és együtthatók közötti összefüggés

Ha az $f = x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei α_1 és α_2, akkor

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2,$$

következésképp

$$-a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{és} \quad a_0 = \alpha_1\alpha_2.$$

Ha az $f = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, akkor

$$\begin{aligned} x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = \\ &= x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \end{aligned}$$

következésképp

$$\begin{aligned} -a_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ a_1 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3, \\ -a_0 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3. \end{aligned}$$

Gyökök és együtthatók közötti összefüggés

1. Tétel.

Legyenek az n-edfokú $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ *főpolinom komplex gyökei* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (*mindegyiket annyiszor feltüntetve, amennyi a multiplicitása*). *Ekkor fennállnak az alábbi összefüggések:*

$$\begin{aligned}
-a_{n-1} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n; \\
a_{n-2} &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n; \\
-a_{n-3} &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n; \\
&\vdots \\
(-1)^{n-1} a_1 &= \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-2}\alpha_n + \cdots + \alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n; \\
(-1)^n a_0 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n.
\end{aligned}$$

2. Megjegyzés.

A fenti képleteket **Viète-formulák**nak hívjuk. A k-adik sor bal oldalán $(-1)^k a_{n-k}$ áll, a jobb oldalon pedig az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ betűkből képezett összes k-tényezős szorzat összege, tehát egy $\binom{n}{k}$-tagú összeg. Formálisan:

$$(-1)^k a_{n-k} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1} \cdot \alpha_{i_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_k}.$$

Még formálisabban:

$$(-1)^k a_{n-k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \prod_{i \in I} \alpha_i.$$

Tartalom

Többhatározatlanú polinomok

3. Definíció.

Adott T test feletti ***n*-határozatlanú monom**nak nevezzük az $ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ alakú formális kifejezéseket, ahol $0 \neq a \in T$ és $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$. Az ilyen monomok véges összegeit pedig T feletti ***n*-határozatlanú polinom**oknak nevezzük.

Jelölés.

A T feletti n-határozatlanú polinomok halmazát $T\left[x_1, \ldots, x_n\right]$ jelöli.

4. Tétel.

A természetes módon definiált szorzással és összeadással $T\left[x_1, \ldots, x_n\right]$ *integritástartomány.*

5. Megjegyzés.

Az n-határozatlanú polinomok gyűrűjét lehetne rekurzívan is definiálni: legyen

$$T\left[x_1, \ldots, x_n\right] = \left(T\left[x_1, \ldots, x_{n-1}\right]\right)\left[x_n\right],$$

azaz a $T\left[x_1, \ldots, x_{n-1}\right]$ integritástartomány feletti (egyhatározatlanú) polinomgyűrű.

Többhatározatlanú polinomok

Példa.

$$
\begin{aligned}
f = \;& 7x_1^2x_3 - 2x_1x_2x_3^4 + 9x_1x_2 - 3x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2x_3^3 - 2x_1^2 + \\
& 5x_1x_2^2x_3 - x_1^2x_2x_3 - 6x_1x_3 + 2x_3^2 + x_1x_3^2 + 4x_2^2x_3^2 + 8 \qquad \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f = \;& x_1^2 \cdot \left(-3x_2x_3^2 - x_2x_3 + 7x_3 - 2\right) + \\
& x_1 \cdot \left(5x_2^2x_3 - 2x_2x_3^4 + x_2x_3^3 + 9x_2 + x_3^2 - 6x_3\right) + \\
& \left(4x_2^2x_3^2 + 2x_3^2 + 8\right) \qquad \in \mathbb{R}[x_2, x_3][x_1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f = \;& x_1^2 \cdot \Big(x_2 \cdot \left(-3x_3^2 - x_3\right) + (7x_3 - 2)\Big) + \\
& x_1 \cdot \Big(x_2^2 \cdot (5x_3) - x_2\left(2x_3^4 + x_3^3 + 9\right) + \left(x_3^2 - 6x_3\right)\Big) + \\
& \Big(x_2^2 \cdot \left(4x_3^2\right) + \left(2x_3^2 + 8\right)\Big) \qquad \in \mathbb{R}[x_3][x_2][x_1]
\end{aligned}
$$

Lexikografikus rendezés

6. Definíció.

Azt mondjuk, hogy az $ax_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$ monom **lexikografikusan megelőzi** a $bx_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}$ monomot, ha

$$\exists i \in \{1,\dots,n\}:\ k_1 = l_1,\dots,k_{i-1} = l_{i-1} \text{ és } k_i > l_i.$$

(Vagyis megkeressük az első eltérést a $k_1, k_2, \dots, k_n$ és az $l_1, l_2, \dots, l_n$ kitevősorozatok között, és amelyikben nagyobb szám áll ezen a helyen, az kerül előrébb a lexikografikus sorrendben.)

Jelölés.

Tetszőleges $M, N \in T[x_1,\dots,x_n]$ monomok esetén $M \sqsupset N$ jelöli azt, hogy M lexikografikusan megelőzi N-et, $M \sqsupseteq N$ pedig azt, hogy $M \sqsupset N$ vagy $M \sim N$. A $\sqsupseteq$ relációt **lexikografikus rendezés**nek nevezzük.

Lexikografikus rendezés

Példa.

$$x_1^2 x_2^{99} x_3^{23} x_4^{71} \quad ?\sqsubset \quad x_1^3 x_2 x_3^2 x_4^5$$

$$-2x_1^3 x_2 x_3^4 x_4^2 \quad ?\sqsupset \quad 14x_1^3 x_2 x_3^2 x_4^3$$

$$x_1 x_2 x_3^2 x_4 \quad ?\sqsupset \quad 3x_2^4 x_3^6 x_4^2$$

$$12x_1^2 x_2^3 x_3 x_4^5 \quad ?\sim \quad -9x_1^2 x_2^3 x_3 x_4^5$$

Lexikografikus rendezés

7. Állítás.

A monomok halmazán $\sqsupseteq$ *reflexív, tranzitív és dichotóm reláció, valamint* $M \sqsupseteq N$ *és* $M \sqsubseteq N$ *akkor és csak akkor áll fenn egyszerre, ha* M *és* N *asszociált.*

8. Megjegyzés.

Az előző állítás szerint a $\sqsupseteq$ reláció teljes rendezés (dichotóm részbenrendezés) a monomok halmazán „modulo asszociáltság". Általában egyszerre csak egy adott polinomban előforduló monomokat vizsgálunk, ezek között pedig nincsenek asszociáltak (azokat össze lehetne vonni egy taggá), tehát ilyenkor valójában teljesen rendezett halmazzal dolgozhatunk.

9. Állítás.

A monomok szorzása monoton a lexikografikus rendezésre nézve, azaz tetszőleges $M, \hat{M}, N, \hat{N}$ *monomokra ha* $M \sqsupseteq N$ *és* $\hat{M} \sqsupseteq \hat{N}$*, akkor* $M\hat{M} \sqsupseteq N\hat{N}$*, és itt asszociáltság csak akkor teljesül, ha* $M \sim N$ *és* $\hat{M} \sim \hat{N}$*.*

10. Állítás.

Tetszőleges $f, g \in T[x_1, \ldots, x_n]$ *nemzéró polinomokra* fg *lexikografikusan első tagja nem más, mint* f *és* g *lexikografikusan első tagjának szorzata.*

Lexikografikus rendezés

Példa.
A korábbi példában szereplő polinom tagjai lexikografikusan csökkenő sorrendben:

$$f = -3x_1^2x_2x_3^2 - x_1^2x_2x_3 + 7x_1^2x_3 - 2x_1^2 + 5x_1x_2^2x_3 - 2x_1x_2x_3^4 +$$

$$+ x_1x_2x_3^3 + 9x_1x_2 + x_1x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2x_3^2 + 2x_3^2 + 8$$

Tartalom

Szimmetrikus polinomok

11. Definíció.

Az $f \in T[x_1, \ldots, x_n]$ polinomot **szimmetrikus polinom**nak nevezzük, ha invariáns a határozatlanok minden permutációjára, azaz

$$\forall \pi \in S_n : f(x_{1\pi}, \ldots, x_{n\pi}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

12. Definíció.

A k-adik n-határozatlanú **elemi szimmetrikus polinom** az $x_1, \ldots, x_n$ határozatlanokból képezett összes k-tényezős szorzatok összege $(k = 1, \ldots, n)$.

Jelölés.

A k-adik n-határozatlanú elemi szimmetrikus polinomot σ_k jelöli (az alaptest és n értéke általában világos a szövegkörnyezetből), tehát

$$\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} x_i \in T[x_1, \ldots, x_n].$$

13. Megjegyzés.

Az elemi szimmetrikus polinomokkal már találkoztunk: segítségükkel fejezhetők ki egy komplex együtthatós főpolinom együtthatói a polinom gyökeiből. Tehát a Viète-formulák $\sigma_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^k a_{n-k}$ alakban is felírhatók.

Szimmetrikus polinomok

Példa.

Határozzuk meg az $x^3 + 2x^2 + 8x + 6$ polinom gyökeinek négyzetösszegét.
A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -2, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 8, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= \sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -6. \end{aligned}$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) = 4 - 16 = -12$$

A megoldás kulcsa az, hogy az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot ki lehet fejezni az elemi szimmetrikus polinomok segítségével:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Ez pedig azért tehető meg, mert $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ szimmetrikus polinom.

A szimmetrikus polinomok alaptétele

14. Tétel.

A szimmetrikus polinomok részgyűrűt alkotnak a $T[x_1, \ldots, x_n]$ *polinomgyűrűben.*

15. Lemma.

Ha $ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ *egy szimmetrikus polinom lexikografikusan első tagja, akkor*

$$k_1 \geq \cdots \geq k_n.$$

16. Lemma.

Tetszőleges $k_1 \geq \cdots \geq k_n$ *nemnegatív egészekhez léteznek olyan* $l_1, \ldots, l_n$ *nemnegatív egészek, hogy* $\sigma_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot \sigma_n^{l_n} \in T[x_1, \ldots, x_n]$ *lexikografikusan első tagja éppen* $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$.

17. Tétel (a szimmetrikus polinomok alaptétele).

Bármely szimmetrikus polinom felírható, mégpedig egyetlen módon, az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként. Formálisan:

$$\forall f \in T[x_1, \ldots, x_n] : f \text{ szimmetrikus} \implies \exists! h \in T[x_1, \ldots, x_n] : f = h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

A szimmetrikus polinomok alaptétele

Példa.

Fejezze ki az $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

$$f - \sigma_1^3 = -3x_1^2x_2 - 3x_1^2x_3 - 3x_1x_2^2 - 6x_1x_2x_3 - 3x_1x_3^2 - 3x_2^2x_3 - 3x_2x_3^2$$

$$f - \sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2 = 3x_1x_2x_3$$

$$f - \sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0$$

Tehát

$$f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = h(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\text{, ahol } h(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - 3x_1x_2 + 3x_3.$$

Példa.

Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = x^3 - 3x^2 + x - 8$ polinom gyökeinek köbösszegét, valamint számtani, mértani és harmonikus közepét.

A Viète-formulák szerint

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= \sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 8. \end{aligned}$$

Az előző feladat alapján

$$\begin{aligned} \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 =& \sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^3 - 3\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\,\sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + 3\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ =& 3^3 - 3 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 8 = 42 \end{aligned}$$

SZPAT+Viète

Példa (folyt.).

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= \sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 8. \end{aligned}$$

számtani közép:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

mértani közép:

$$\sqrt[3]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

harmonikus közép:

$$\frac{3}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}} = \frac{3}{\frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}} = \frac{3\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3} = \frac{3 \cdot 8}{1} = 24$$

Házi feladat.
Fejezze ki az $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Házi feladat.
Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg az $f = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 2$ polinom gyökeinek negyedik hatványösszegét.

Diszkrimináns

18. Definíció.

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ főpolinom **diszkriminánsa:**

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 ,$$

ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ az f polinom komplex gyökei (mindegyiket annyiszor feltüntetve, amennyi a multiplicitása).

A diszkrimináns a gyökök szimmetrikus polinomja, ezért kifejezhető a polinom együtthatói segítségével.

Házi feladat.

Határozza meg az $f = x^2 + bx + c = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ polinomra a $D = (\alpha_1 - \alpha_2)^2$ diszkriminánst (csak latin betűkkel!).

A harmadfokú polinom diszkriminánsa

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$$

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3$$

$$\begin{aligned} D = \quad & x_1^4 x_2^2 - 2x_1^4 x_2 x_3 + x_1^4 x_3^2 - 2x_1^3 x_2^3 + 2x_1^3 x_2^2 x_3 + 2x_1^3 x_2 x_3^2 - 2x_1^3 x_3^3 \\ & + x_1^2 x_2^4 + 2x_1^2 x_2^3 x_3 - 6x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 2x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1^2 x_3^4 - 2x_1 x_2^4 x_3 \\ & + 2x_1 x_2^3 x_3^2 + 2x_1 x_2^2 x_3^3 - 2x_1 x_2 x_3^4 + x_2^4 x_3^2 - 2x_2^3 x_3^3 + x_2^2 x_3^4 \end{aligned}$$

A harmadfokú polinom diszkriminánsa

$$D - \sigma_1^2\sigma_2^2 =$$

$$-4x_1^4x_2x_3 - 4x_1^3x_2^3 - 6x_1^3x_2^2x_3 - 6x_1^3x_2x_3^2 - 4x_1^3x_3^3$$
$$-6x_1^2x_2^3x_3 - 21x_1^2x_2^2x_3^2 - 6x_1^2x_2x_3^3 - 4x_1x_2^4x_3$$
$$-6x_1x_2^3x_3^2 - 6x_1x_2^2x_3^3 - 4x_1x_2x_3^4 - 4x_2^3x_3^3$$

$$D - \sigma_1^2\sigma_2^2 + 4\sigma_1^3\sigma_3 =$$

$$-4x_1^3x_2^3 + 6x_1^3x_2^2x_3 + 6x_1^3x_2x_3^2 - 4x_1^3x_3^3 + 6x_1^2x_2^3x_3$$
$$+3x_1^2x_2^2x_3^2 + 6x_1^2x_2x_3^3 + 6x_1x_2^3x_3^2 + 6x_1x_2^2x_3^3 - 4x_2^3x_3^3$$

$$D - \sigma_1^2\sigma_2^2 + 4\sigma_1^3\sigma_3 + 4\sigma_2^3 =$$

$$18x_1^3x_2^2x_3 + 18x_1^3x_2x_3^2 + 18x_1^2x_2^3x_3 + 27x_1^2x_2^2x_3^2$$
$$+18x_1^2x_2x_3^3 + 18x_1x_2^3x_3^2 + 18x_1x_2^2x_3^3$$

$$D - \sigma_1^2\sigma_2^2 + 4\sigma_1^3\sigma_3 + 4\sigma_2^3 - 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -27x_1^2x_2^2x_3^2$$

$$D - \sigma_1^2\sigma_2^2 + 4\sigma_1^3\sigma_3 + 4\sigma_2^3 - 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 27\sigma_3^2 = 0$$

A harmadfokú polinom diszkriminánsa

$D = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2$

Ha $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) = x^3 + px + q$, akkor a Viéte-formulák szerint

$$\sigma_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 0,$$
$$\sigma_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = p,$$
$$\sigma_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = -q,$$

tehát

$$\begin{aligned} D(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) &= -4\sigma_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^3 - 27\sigma_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^2 \\ &= -4p^3 - 27q^2 \\ &= -108\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right). \end{aligned}$$