Algebra és számelmélet 3 előadás
Relációk

Waldhauser Tamás
2014 őszi félév

Relációk

„**reláció** *lat.* **1.** kapcsolat, viszony; összefüggés vmivel **2.** viszonylat, vonatkozás
3. *mat* halmazok elemei közötti kapcsolat [...]"

Bakos Ferenc: Idegen szavak és kifejezések szótára

1. Definíció.

Adott A halmazon értelmezett **reláción** A-beli elemekből alkotott elempárok halmazát értjük, azaz egy tetszőleges $\rho \subseteq A \times A$ halmazt.

Jelölés.

Az egyszerűség kedvéért $(a, b) \in \rho$ helyett gyakran azt írjuk, hogy $a\rho b$.

Példa.

- $A = \mathbb{N}$, $a\rho b \iff a \mid b$
- $A = \mathbb{R}$, $a\rho b \iff a \leq b$
- $A =$ a sík egyeneseinek halmaza, $a\rho b \iff a \perp b$
- $A =$ háromszögek halmaza, $a\rho b \iff a$ és b egybevágó
- $A =$ emberek halmaza, $a\rho b \iff a$ gyermeke b-nek
- $A = \{1, 2, 3\}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$
- ...

Tartalom

Tartalom

Ekvivalenciarelációk

2. Definíció.

Ekvivalenciarelációnak nevezzük a $\rho \subseteq A \times A$ relációt, ha rendelkezik az alábbi három tulajdonsággal:

(1) $\forall a \in A : a\rho a$ (reflexivitás);

(2) $\forall a, b \in A : a\rho b \implies b\rho a$ (szimmetria);

(3) $\forall a, b, c \in A : (a\rho b \text{ és } b\rho c) \implies a\rho c$ (tranzitivitás).

Példa.

- $A =$ a sík egyeneseinek halmaza, $a\rho b \iff a \parallel b$
- $A =$ háromszögek halmaza, $a\rho b \iff a$ és b hasonló
- $A = \mathcal{P}(U)$, $a\rho b \iff$ létezik $a \to b$ bijekció
- $A =$ emberek halmaza, $a\rho b \iff a$ testvére b-nek
- $A = \{1, 2, 3\}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$
- ...

Leképezés magja

3. Állítás.

Tetszőleges $f\colon A \to B$ leképezés esetén a

$$\ker f := \{(a_1, a_2) : f(a_1) = f(a_2)\} \subseteq A \times A$$

reláció ekvivalenciareláció az A halmazon, amelynek neve az f leképezés ***magja****.*

Példa.

Legyen $f\colon \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$. Határozzuk meg f magját.

$$\ker f = \{(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1), \ (0,0), \ (2,2), \ (3,3)\}$$

Példa.

Az $f\colon A \to B$ leképezés akkor és csak akkor injektív, ha magja az egyenlőség reláció:

$$\ker f = \{(a, a) : a \in A\}.$$

Példa.

Az $f\colon A \to B$ leképezés akkor és csak akkor konstans, ha magja a teljes reláció:

$$\ker f = A \times A.$$

Ekvivalenciaosztályok

4. Definíció.

Legyen $\rho \subseteq A \times A$ egy ekvivalenciareláció és a tetszőleges eleme A-nak. Ekkor az

$$\overline{a} := \{b \in A : a\rho b\}$$

halmazt az a elem ρ szerinti **(ekvivalencia)osztályának** (vagy blokkjának), az ekvivalenciaosztályok halmazát pedig az A halmaz ρ szerinti **faktorhalmazának** nevezzük.

Jelölés.

Az a elem ρ szerinti osztályát szokás a/ρ-val, $\overline{a}^{\rho}$-val vagy $[a]_\rho$-val jelölni, de mi inkább az egyszerűbb $\overline{a}$ jelölést használjuk. Ez ugyan nem utal ρ-ra, de általában kiderül a szövegkörnyezetből, hogy mi a szóban forgó ekvivalenciareláció.

A faktorhalmazt A/ρ jelöli, tehát

$$A/\rho = \{\overline{a} : a \in A\}.$$

Ekvivalenciaosztályok

Példa.
Legyen $A = \{1, 2, 3\}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$. Ekkor

$$\overline{1} = \{1\}, \quad \overline{2} = \{2, 3\}, \quad \overline{3} = \{2, 3\};$$

$$A/\rho = \{\, \{1\}, \ \{2, 3\} \,\}.$$

Példa.
Legyen $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $f \colon A \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$ és $\rho = \ker f$. Ekkor

$$\overline{-1} = \{-1, 1\}, \quad \overline{1} = \{-1, 1\}, \quad \overline{0} = \{0\}, \quad \overline{2} = \{2\}, \quad \overline{3} = \{3\};$$

$$A/\rho = \{\, \{-1, 1\}, \ \{0\}, \ \{2\}, \ \{3\} \,\}.$$

Figyeljük meg, hogy ha $a\rho b$, akkor $\overline{a} = \overline{b}$, egyébként pedig $\overline{a}$ és $\overline{b}$ diszjunkt halmazok.

Ekvivalenciák és osztályozások

5. Definíció.

Egy nemüres halmaz **osztályozásán** olyan páronként diszjunkt nemüres részhalmazainak halmazát értjük, amelyek együtt lefedik az alaphalmazt.
Formálisan: $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ osztályozás a nemüres A halmazon, ha

(1) $\forall B \in \mathcal{C} : B \neq \emptyset$;

(2) $\forall B_1 \neq B_2 \in \mathcal{C} : B_1 \cap B_2 = \emptyset$;

(3) $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{C}} B = A$.

6. Tétel.

Legyen A egy nemüres halmaz.

- *Ha $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció, akkor A/ρ osztályozás az A halmazon.*
- *Ha pedig $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ osztályozás, akkor az $a \rho b \iff \exists B \in \mathcal{C} : a, b \in B$ formulával definiált ρ reláció ekvivalenciareláció az A halmazon.*

A most megadott „ekvivalenciareláció $\mapsto$ osztályozás” és „osztályozás $\mapsto$ ekvivalenciareláció” megfeleltetések egymás inverzei.

Ekvivalenciák és osztályozások

Példa.

Legyen $A = \{a, b, c, d\}$ és $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a)\}$.
Határozzuk meg az A/ρ osztályozást. $A/\rho = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

Házi feladat.

Legyen $A = \{a, b, c, d, e\}$ és

$$\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), \\ (c, d), (d, c), (c, e), (e, c), (d, e), (e, d)\}.$$

Határozza meg az A/ρ osztályozást.

Példa.

Határozzuk meg az $A = \{1, , \ldots, 7\}$ halmazon azt a ρ ekvivalenciarelációt, amelyre $A/\rho = \{\{1, 6, 7\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$.

$\rho = \{(1,1), (1,6), (1,7), (6,1), (6,6), (6,7), (7,1), (7,6), (7,7), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$

Házi feladat.

Határozza meg az $A = \{1, , \ldots, 5\}$ halmazon azt a ρ ekvivalenciarelációt, amelyre $A/\rho = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}\}$.

Leképezés magja

Példa.
Legyen $A = \{-2, \dots, 3\}$ és $\varphi\colon A \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto |x|$.
Határozzuk meg az $A/\ker\varphi$ osztályozást. $A/\ker\varphi = \{\{-2,2\}, \{-1,1\}, \{0\}, \{3\}\}$

Példa.
Legyen $B = \{0, \dots, 7\}$ és $\psi\colon B \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor x/3 \rfloor$.
Határozzuk meg a $B/\ker\psi$ osztályozást. $B/\ker\psi = \{\{0,1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7\}\}$

Házi feladat.
Legyen $C = \{-2, \dots, 3\}$ és $\zeta\colon C \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \operatorname{sgn} x$.
Határozza meg a $C/\ker\zeta$ osztályozást.

Házi feladat.
Legyen $D = \{0, \dots, 10\}$ és $\xi\colon D \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.
Határozza meg a $D/\ker\xi$ osztályozást.

Az ekvivalenciareláció, mint fogalomalkotó eszköz

Példa.

- $A =$ a sík egyeneseinek halmaza, $a \rho b \iff a \parallel b$ $\rightsquigarrow$ az irány fogalma
- $A =$ háromszögek halmaza, $a \rho b \iff a$ és b hasonló $\rightsquigarrow$ az „alak" fogalma
- $A = \mathcal{P}(U)$, $a \rho b \iff$ létezik $a \to b$ bijekció $\rightsquigarrow$ a számosság fogalma
- $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(a_1, a_2) \rho (b_1, b_2) \iff a_1 b_2 = a_2 b_1$ $\rightsquigarrow$ a tört fogalma

Házi feladat.

Mutassa meg, hogy a fenti utolsó példában ρ valóban ekvivalenciareláció.

A számfogalom (egy) felépítése

Természetes számok

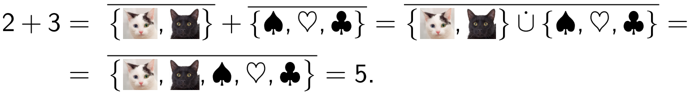
A véges halmazok „halmazán" értelmezzük a ρ ekvivalenciarelációt a következőképpen:

$$A \rho B \iff \text{létezik } A \to B \text{ bijekció.}$$

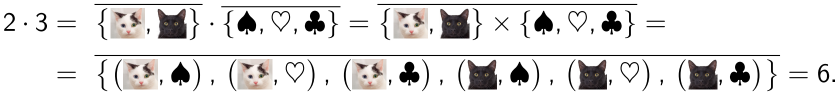
A természetes számok nem mások, mint a megfelelő ekvivalenciaosztályok. Például

$$3 = \overline{\{1,2,3\}} = \overline{\{a,b,c\}} = \overline{\{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}} = \cdots .$$

Az összeadás a diszjunkt unió segítségével definiálható: $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \dot\cup B}$. Például



A szorzás a Descartes-szorzat segítségével definiálható: $\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A \times B}$. Például



Ezek a műveletek *jóldefiniáltak* (mit jelent ez?) és rendelkeznek a szokásos műveleti tulajdonságokkal. (Lásd még: Peano-axiómarendszer.)

A számfogalom (egy) felépítése

Egész számok

Az $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ halmazon értelmezzük a ρ ekvivalenciarelációt a következőképpen:

$$(a_1, a_2)\,\rho\,(b_1, b_2) \iff a_1 + b_2 = a_2 + b_1.$$

Az egész számok nem mások, mint a megfelelő ekvivalenciaosztályok. Például

$$-3 = \overline{(0,3)} = \overline{(1,4)} = \overline{(2,5)} = \cdots.$$

Az összeadás, kivonás és szorzás művelete értelmezhető ezen ekvivalenciaosztályok halmazán (hogyan?), és rendelkeznek a szokásos műveleti tulajdonságokkal. Így kapjuk az egész számok $\mathbb{Z}$ gyűrűjét.

Racionális számok

A $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ halmazon értelmezzük a ρ ekvivalenciarelációt a következőképpen:

$$(a_1, a_2)\,\rho\,(b_1, b_2) \iff a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

A racionális számok nem mások, mint a megfelelő ekvivalenciaosztályok. Például

$$\frac{2}{5} = \overline{(2,5)} = \overline{(4,10)} = \overline{(6,15)} = \cdots.$$

Az összeadás, kivonás, szorzás és osztás művelete értelmezhető ezen ekvivalencia-osztályok halmazán (hogyan?), és rendelkeznek a szokásos műveleti tulajdonságokkal. Így kapjuk a racionális számok $\mathbb{Q}$ testét.

A számfogalom (egy) felépítése

Valós számok

A racionális számokból álló Cauchy-sorozatok halmazán értelmezzük a ρ ekvivalenciarelációt a következőképpen:

$$\{a_n\}\,\rho\,\{b_n\} \iff \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0.$$

A valós számok nem mások, mint a megfelelő ekvivalenciaosztályok. Például

$$\pi = \overline{(3\,,\ 3{,}1\,,\ 3{,}14\,,\ 3{,}141\,,\ldots)} = \overline{(4\,,\ 3{,}2\,,\ 3{,}15\,,\ 3{,}142\,,\ldots)} = \cdots.$$

Az összeadás, kivonás, szorzás és osztás művelete értelmezhető ezen ekvivalencia-osztályok halmazán (hogyan?), és rendelkeznek a szokásos műveleti tulajdonságokkal. Így kapjuk a valós számok $\mathbb{R}$ testét. (Lásd még: Dedekind-szeletek.)

Komplex számok

A komplex számok szokásos definíciója nem használ ekvivalenciarelációkat, de később majd látunk egy alternatív definíciót valós polinomok ekvivalenciaosztályai segítségével.

Tartalom

Részbenrendezési reláció

7. Definíció.

Részbenrendezési relációnak nevezzük a $\rho \subseteq A \times A$ relációt, ha rendelkezik az alábbi három tulajdonsággal:

(1) $\forall a \in A : a\rho a$ (reflexivitás);

(2) $\forall a, b \in A : (a\rho b \text{ és } b\rho a) \implies a = b$ (antiszimmetria);

(3) $\forall a, b, c \in A : (a\rho b \text{ és } b\rho c) \implies a\rho c$ (tranzitivitás).

Ha még a következő tulajdonság is teljesül, akkor ρ-t **teljes rendezésnek** (vagy lineáris rendezésnek) nevezzük:

(4) $\forall a, b \in A : a\rho b$ vagy $b\rho a$ (dichotómia).

Példa.

- $A = \mathbb{R},\ a\rho b \iff a \leq b$
- $A = \mathbb{N}_0,\ a\rho b \iff a \mid b$
- $A = \mathcal{P}(U),\ a\rho b \iff a \subseteq b$

Részbenrendezett halmaz

Jelölés.

A részbenrendezéseket szokás a $\leq$ szimbólummal jelölni, még akkor is, ha az alaphalmaz elemei esetleg nem is számok. Ha $a \leq b$ de $a \neq b$, akkor azt írjuk, hogy $a < b$.

8. Definíció.

Részbenrendezett halmazon egy $(A; \leq)$ párt értünk, ahol A egy nemüres halmaz, és $\leq$ részbenrendezés A-n.

Példa.

Íme három négyelemű részbenrendezett halmaz:

- $(\{1, 2, 3, 4\}\,; \leq)$,
- $(\{1, 2, 3, 4\}\,; |)$,
- $(\mathcal{P}(\{a, b\})\,; \subseteq)$.

Hasse-diagram

9. Definíció.

Legyen $(A; \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, és legyen $a, b \in A$. Azt mondjuk, hogy b **fedi** a-t, ha $a < b$, de nem létezik olyan $c \in A$, amelyre $a < c < b$. Ezt a tényt $a \prec b$ jelöli, és a $\prec$ relációt az adott részbenrendezéshez tartozó **fedési relációnak** hívjuk.

10. Tétel.

Véges részbenrendezett halmazt egyértelműen meghatározza a fedési relációja.

11. Definíció.

Egy véges $(A; \leq)$ részbenrendezett halmaz **Hasse-diagramján** egy ábrát értünk, amelynél A elemeit (síkbeli) pontokkal ábrázoljuk oly módon, hogy $a < b$ esetén a b-nek megfelelő pont „följebb" van, mint az a-nak megfelelő pont, és e két pontot akkor és csak akkor kötjük össze, ha b fedi a-t.

Példa.

Rajzoljuk fel a $(D_{12}; |)$ és $(D_{12}; \leq)$ részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját.

Házi feladat.

Rajzolja fel a $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}); \subseteq)$, $(D_{30}; |)$ és $(D_{36}; |)$ részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját.

Minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elem

12. Definíció.

Legyen $(A; \leq)$ egy részbenrendezett halmaz.
Az $a \in A$ elemet **minimális elemnek** nevezzük, ha nincs nála kisebb elem, és **legkisebb elemnek** nevezzük, ha ő mindenki másnál kisebb.
Hasonlóan $a \in A$ **maximális**, ha nincs nála nagyobb elem, és $a \in A$ **legnagyobb**, ha ő mindenki másnál nagyobb. Formálisan:

- a minimális $\iff$ $\nexists b \in A : b < a$;
- a legkisebb $\iff$ $\forall b \in A : a \leq b$;
- a maximális $\iff$ $\nexists b \in A : b > a$;
- a legnagyobb $\iff$ $\forall b \in A : a \geq b$.

Példa.

Az $(\mathbb{N}_0; |)$ részbenrendezett halmaz legkisebb eleme 1,
a legnagyobb eleme pedig 0 (!).

Minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elem

Példa.

Rajzoljunk olyan részbenrendezett halmazt, amiben 4 minimális és 2 maximális elem van.

Házi feladat.

Rajzoljon olyan részbenrendezett halmazt, amiben van legnagyobb elem, de nincs legkisebb elem.

Házi feladat.

Rajzoljon olyan *négyelemű* részbenrendezett halmazt, amiben 2 minimális és 3 maximális elem van.

13. Tétel.

Részbenrendezett halmazban legföljebb egy legkisebb elem létezhet. Ha van legkisebb elem, akkor az minimális elem is, sőt ő az egyetlen minimális elem. Hasonló érvényes a legnagyobb elemre is.

Házi feladat.

Bizonyítsa be, hogy *véges* részbenrendezett halmazban mindig van maximális elem.

Lexikografikus rendezés

14. Definíció.

Legyen $(A; \leq)$ egy lineárisan rendezett halmaz (ábécé) és legyen A^n az A elemeiből képezett elem n-esek halmaza (szavak).

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ szó **lexikografikusan kisebb** a $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in A^n$ szónál (jelölés: $\mathbf{a} \sqsubset \mathbf{b}$), ha

$$\exists i \in \{1, \ldots, n\} : \ a_i < b_i \ \text{ és minden } j < i \text{ esetén } a_j = b_j.$$

Az $\mathbf{a} \sqsubseteq \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \sqsubset \mathbf{b}$ vagy $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ képlettel definiált $\sqsubseteq$ relációt **lexikografikus rendezésnek** nevezzük.

Példa.

Soroljuk fel lexikografikusan növekvő sorrendben az $A = \{a, b, c\}$ ábécé feletti kétbetűs szavakat.

$$aa \sqsubset ab \sqsubset ac \sqsubset ba \sqsubset bb \sqsubset bc \sqsubset ca \sqsubset cb \sqsubset cc$$

Példa.

Soroljuk fel lexikografikusan növekvő sorrendben az $A = \{0, 1\}$ ábécé feletti hárombetűs szavakat.

$$000 \sqsubset 001 \sqsubset 010 \sqsubset 011 \sqsubset 100 \sqsubset 101 \sqsubset 110 \sqsubset 111$$

Lexikografikus rendezés

15. Tétel.

Tetszőleges $(A; \leq)$ *lineárisan rendezett halmaz és n pozitív egész szám esetén a* $\sqsubseteq$ *reláció lineáris rendezés az* A^n *halmazon.*

16. Tétel.

Az $(\mathbb{N}_0^n; \sqsubseteq)$ *rendezett halmazban nincs végtelen hosszú csökkenő sorozat.*

17. Tétel.

A szám n-esek komponensenkénti összeadása szigorúan monoton a lexikografikus rendezésre nézve: bármely $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}} \in \mathbb{N}_0^n$ *esetén*

$$\mathbf{a} \sqsubseteq \mathbf{b},\ \ \widehat{\mathbf{a}} \sqsubseteq \widehat{\mathbf{b}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{a} + \widehat{\mathbf{a}} \ \sqsubseteq\ \mathbf{b} + \widehat{\mathbf{b}},$$

és egyenlőség csak $\mathbf{a} = \mathbf{b},\ \widehat{\mathbf{a}} = \widehat{\mathbf{b}}$ *esetén teljesül.*

Megértést ellenőrző kérdések

Igazak-e az alábbi állítások?

1. Ha $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció, akkor minden $a, b, c \in A$ esetén $(a\rho b \text{ és } c\rho b) \implies a\rho c$.
2. Tetszőleges $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció és $a, b \in A$ esetén $a \neq b \implies \overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$.
3. Ha A végtelen halmaz, akkor minden A-n értelmezett ekvivalenciarelációnak végtelen sok osztálya van.
4. Ha a $\varphi\colon A \to B$ leképezés magjára $|A/\ker\varphi| = 2$ teljesül, akkor φ értékkészlete kételemű halmaz.
5. Az $(\mathbb{N}_0; |)$ részbenrendezett halmazban 6 fedi 2-t.
6. Ha egy részbenrendezett halmaznak két minimális eleme van, akkor nincs legkisebb eleme.
7. Az $(\mathbb{N}_0; |)$ részbenrendezett halmaz legkisebb eleme a nulla.
8. Minden véges részbenrendezett halmaznak van minimális eleme.