Csoporthatások

Csoporthatás

Definíció.

Legyen G egy csoport és Ω egy halmaz. Ha a G csoport minden eleme „csinál valamit" az Ω halmaz elemeivel (permutálja őket), akkor azt mondjuk, hogy a G csoport **hat** az Ω halmazon. Jelölje $\omega \bullet g$ azt az elemet, ahová a $g \in G$ csoportelem viszi az $\omega \in \Omega$ elemet. Elvárjuk, hogy a hatás konzisztens legyen a következő értelemben:

(a) $\forall g, h \in G \;\; \forall \omega \in \Omega\colon \;\; (\omega \bullet g) \bullet h = \omega \bullet (gh)$;

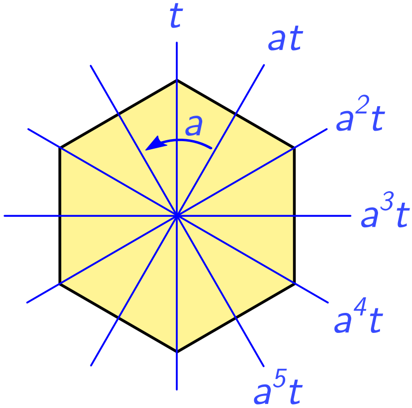
(b) $\forall \omega \in \Omega\colon \;\; \omega \bullet 1_G = \omega$.

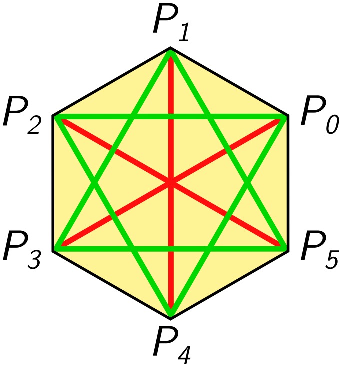
Példa.

1. Az S_n csoport természetes módon hat az $\{1, \ldots, n\}$ halmazon.
2. A D_n csoport hat a szabályos n-szög csúcsain (oldalain), ezeket megszámozva pedig az $\{1, \ldots, n\}$ halmazon is.
3. A kocka forgáscsoportja hat a kocka csúcsainak (éleinek, lapjainak) halmazán.
4. Az $\mathbb{R}^n$ halmazon hat az $\mathbb{R}^*$ csoport (skalárral való szorzás) és a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ csoport (lineáris transzformációk).

A hatszög átlói

A D_6 diédercsoport nemcsak a hatszög csúcsain és élein hathat, hanem az átlóin is.





Pályák

Állítás.

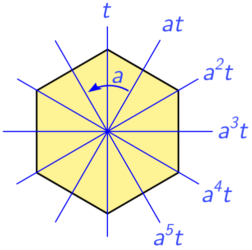
Ha a G csoport hat az Ω halmazon, akkor az $\alpha \sim \beta \iff \exists g \in G\colon\ \alpha \bullet g = \beta$ képlettel definiált $\sim$ reláció ekvivalenciareláció az Ω halmazon.

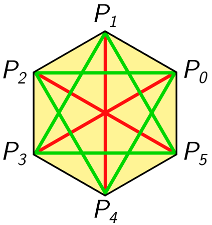
Definíció.

A fenti állításban szereplő ekvivalenciarelációhoz tartozó ekvivalenciaosztályokat a csoporthatás **pályáinak** nevezzük.
Tehát egy $\omega \in \Omega$ elem pályája: $\{\omega \bullet g : g \in G\}$.

Definíció.

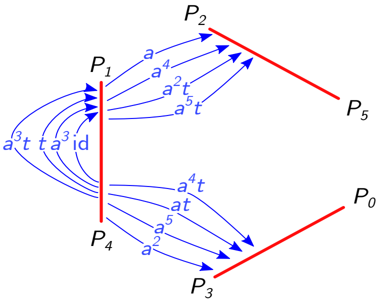
Tetszőleges $g \in G$ és $\omega \in \Omega$ esetén ω **stabilizátora** az ω-t fixen hagyó csoportelemek halmaza: $\mathrm{Stab}(\omega) = \{g \in G : \omega \bullet g = \omega\}$.





$\mathrm{Stab}(P_1P_4) = \{\mathrm{id}, a^3, t, a^3t\}$

Pályák



Stabilizátor: $\{\mathrm{id}, a^3, t, a^3t\} \leq D_6$.

Mellékosztályok: $\{\mathrm{id}, a^3, t, a^3t\}$,

$\{a, a^4, a^5t, a^2t\}$,

$\{a^2, a^5, a^4t, at\}$.

Pályák és stabilizátorok

Tétel.

Hasson a G csoport az Ω halmazon.

(1) A stabilizátorok részcsoportok: $\mathrm{Stab}(\omega) \leq G$.

(2) Azonos pályán lévő elemek stabilizátorai konjugáltak:

$$\mathrm{Stab}(\omega \bullet g) = g^{-1}\,\mathrm{Stab}(\omega) g.$$

(3) Két csoportelem akkor és csak akkor esik ugyanabba a $\mathrm{Stab}(\omega)$ szerinti jobb oldali mellékosztályba, ha „ugyanoda viszik" az ω elemet:

$$\omega \bullet g = \omega \bullet h \iff \mathrm{Stab}(\omega) g = \mathrm{Stab}(\omega) h.$$

(4) A pálya mérete megegyezik a stabilizátor indexével:

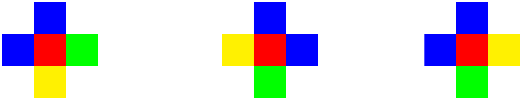
$$\left|\{\omega \bullet g : g \in G\}\right| = \left[G : \mathrm{Stab}(\omega)\right].$$

Bizonyítás.

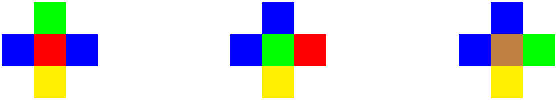
(3)
$$\begin{aligned}
\omega \bullet g = \omega \bullet h \quad &\iff (\omega \bullet g) \bullet h^{-1} = (\omega \bullet h) \bullet h^{-1} \\
&\iff \omega \bullet gh^{-1} = \omega \bullet hh^{-1} = \omega \\
&\iff gh^{-1} \in \mathrm{Stab}(\omega) \iff \mathrm{Stab}(\omega) g = \mathrm{Stab}(\omega) h \qquad \square
\end{aligned}$$

Színezések

Hányféleképpen lehet kiszínezni az X-pentominót n színnel, ha a forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek? (Lehet $n > 5$ is, mert nem kötelező az összes színt felhasználni.) Például az alábbi három színezés egyformának számít



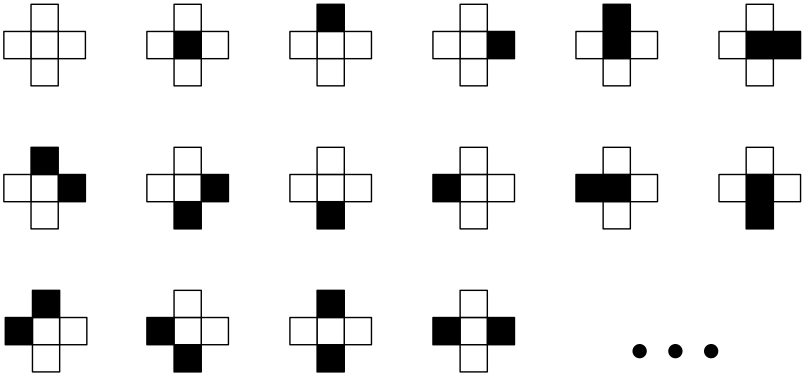
de a következő színezések már különböznek a fentiektől (és egymástól is):



Itt D_4 hat a színezések halmazán, és a pályák számára vagyunk kíváncsiak.

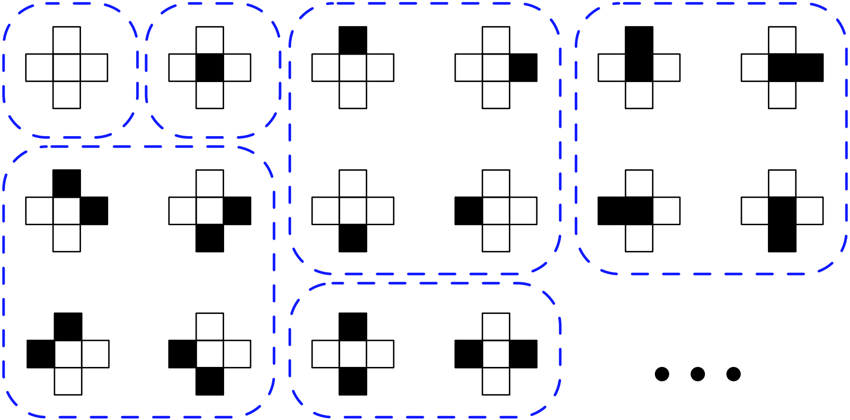
Az összes színezés

Legyen Ω az összes színezések halmaza. Nyilván $|\Omega| = n^5$. Például $n = 2$ esetén:



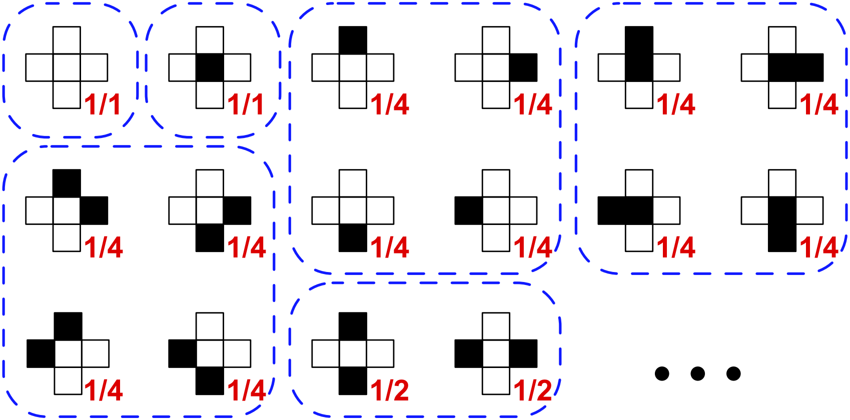
A színezések osztályozása

Legyen Ω az összes színezések halmaza. Nyilván $|\Omega| = n^5$. Például $n = 2$ esetén:



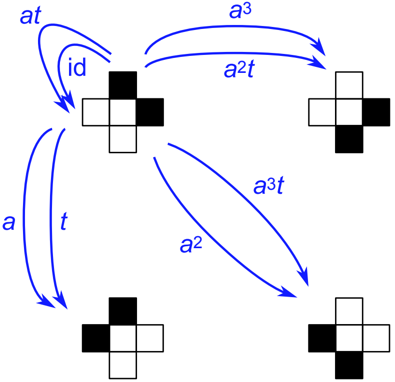
Piros számok

Legyen Ω az összes színezések halmaza. Nyilván $|\Omega| = n^5$. Például $n = 2$ esetén:



$$\text{pályák száma} \; = \sum_{\Omega} \text{piros számok}$$

Csoportelmélet!



Stabilizátor: $\{\mathrm{id}, at\} \leq D_4$.

Mellékosztályok: $\{\mathrm{id}, at\}$,
$\{a, t\}$,
$\{a^2, a^3t\}$,
$\{a^3, a^2t\}$.

Egy rögzített $\omega \in \Omega$ színezést a saját pályájának minden elemébe ugyanannyi D_4-beli elem visz el, (mert $\omega \bullet g = \omega \bullet h \iff \mathrm{Stab}(\omega)g = \mathrm{Stab}(\omega)h$).

Tehát egy ω színezéshez írt piros szám nem más, mint

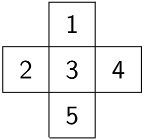
$$\frac{|\mathrm{Stab}(\omega)|}{|D_4|} = \frac{|\{g \in D_4 : \omega \bullet g = \omega\}|}{|D_4|} = \mathrm{P}\left(\omega \bullet g = \omega\right).$$

Valószínűségszámítás!

$$
\begin{aligned}
\text{pályák száma} &= \sum_{\Omega} \text{piros számok} \\
&= \sum_{\Omega} \mathsf{P}\left(\omega \bullet g = \omega\right) \\
&= \mathsf{E}\left(g \text{ fixpontjainak száma}\right) \\
&= \text{átlagos fixpontszám} \\
&= \frac{1}{|D_4|} \cdot \sum_{D_4} \left(g \text{ fixpontjainak száma}\right)
\end{aligned}
$$

Kombinatorika!

Tetszőleges $\omega \in \Omega$ és $g \in D_4$ esetén $\omega \bullet g = \omega$ akkor és csak akkor teljesül, ha egyszínűek azok a négyzetek, amelyek egymásba mennek a g transzformáció végrehajtása során. Ha g-nek, mint az öt kis négyzet permutációjának, c ciklusa van, akkor az ilyen színezések száma n^c.



D_4 eleme	S_5 eleme	c	fixpontok száma (Ω-ban)
id	$(1)\,(2)\,(3)\,(4)\,(5)$	5	n^5
a	$(1254)\,(3)$	2	n^2
a^2	$(15)\,(24)\,(3)$	3	n^3
a^3	$(1452)\,(3)$	2	n^2
t	$(1)\,(24)\,(3)\,(5)$	4	n^4
at	$(14)\,(25)\,(3)$	3	n^3
a^2t	$(15)\,(2)\,(3)\,(4)$	4	n^4
a^3t	$(12)\,(3)\,(45)$	3	n^3

$$\text{pályák száma} \;=\; \text{átlagos fixpontszám} \;=\; \frac{1}{8}\cdot\left(n^5+2n^4+3n^3+2n^2\right)$$

Pólya–Redfield-módszer

Legyen $G \leq S_A$ egy permutációcsoport. Tetszőleges $g \in G$ esetén jelölje $c(g)$ a g permutáció ciklusainak számát (beleértve az 1 hosszúságú ciklusokat is). Az

$$f = \sum_{g \in G} x^{c(g)} \in \mathbb{Z}[x]$$

polinomot a G csoport ciklusszámláló polinomjának nevezzük (majdnem).

Tétel (John Howard Redfield, 1927 és Pólya György, 1937).

Az A halmaz n színnel történő színezéseinek száma „modulo G" éppen $f(n)$.

Példa.

A kocka forgáscsoportja 24-elemű ($\cong S_4$). Ha a forgatásokat, mint a lapok permutációit tekintjük (azaz S_6 részcsoportjaként), akkor a ciklusszámláló polinom:

$$\frac{1}{24} \cdot \left(x^6 + 3x^4 + 12x^3 + 8x^2\right).$$

Tehát a kocka lapjait ennyiféleképpen lehet x színnel kiszínezni, ha a forgatásokkal egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek.