ABSZTRAKT ALGEBRA

feladatok

2022 tavaszi félév, OT

Az 1–16. feladatok (megoldásai) interaktív formában megtalálhatóak itt:
`http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html`

1. feladat. Művelet-e...

(a) az összeadás a hárommal osztható egész számok halmazán?

(b) az összeadás a hárommal nem osztható egész számok halmazán?

(c) az osztás a pozitív egész számok halmazán?

(d) az összeadás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon?

(e) $x * y = \sqrt{xy}$ a valós számok halmazán?

(f) $x * y = \sqrt{xy}$ a komplex számok halmazán?

(g) a metszés az $\big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\big\}$ halmazon?

2. feladat. Művelet-e...

(a) a szorzás a hárommal osztható egész számok halmazán?

(b) a szorzás a hárommal nem osztható egész számok halmazán?

(c) az összeadás a $[0, 1]$ intervallumon?

(d) a szorzás a $[0, 1]$ intervallumon?

(e) a szorzás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon?

(f) az egyesítés az $\big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\big\}$ halmazon?

3. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok (kommutativitás, asszociativitás, zéruselem, egységelem, inverzek, kancellativitás) szempontjából az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon az alábbi táblázattal definiált $*$ műveletet.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

4. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon az alábbi táblázattal definiált $\circ$ műveletet.

$\circ$	a	b	c	d
a	c	a	b	b
b	a	b	c	d
c	b	c	b	a
d	b	d	c	a

5. feladat. Írjuk fel a $\mathbb{Z}_5$ halmazon a szorzás művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

6. feladat. Írjuk fel a $\mathcal{P}(\{u, v\})$ halmazon az egyesítés művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

7. feladat. Írjuk fel az $\{1, -1, i, -i\}$ halmazon a szorzás művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

8. feladat. Írjuk fel az $\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}$ halmazon az implikáció művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

9. feladat. Írjuk fel az $\{1, 2, 3\}$ halmazon az $x \sqcap y = \min\{x, y\}$ művelet művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

10. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az $A = \{u, v, w\}$ halmazon az alábbi táblázattal definiált $\diamond$ műveletet.

$\diamond$	u	v	w
u	v	w	u
v	w	u	v
w	u	v	w

11. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az egész számok halmazán értelmezett $a \bullet b = a + b + 23$ műveletet.

12. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az egész számok halmazán értelmezett $a \otimes b = b + 2$ műveletet.

13. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából a valós számok halmazán értelmezett $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$ műveletet.

14. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az egész számok halmazán értelmezett $a \oplus b = a$ műveletet.

15. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából a komplex számok halmazán a kivonás műveletét.

16. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából a valós számok halmazán értelmezett $a \triangle b = ab - 2(a+b) + 6$ műveletet. Ennek a feladatnak Kunos Ádám által készített megoldása megtalálható itt:
`https://drive.google.com/file/d/1gU3u1W4bYRUMnVMmoHkA0v6uncspgyEQ/view`

A 17–20. feladatok (megoldásai) interaktív formában megtalálhatóak itt:
`http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra2-strukturak.html`

17. feladat. Milyen algebrai struktúrák az alábbiak?

(a) $(\mathbb{N}; +)$
(b) $(\mathbb{Z}; +)$
(c) $(\mathbb{Z}; \cdot)$
(d) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}; \cdot)$
(e) $(\mathbb{Z}_5; +)$
(f) $(\mathbb{Z}_5; \cdot)$
(g) $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\overline{0}\}; \cdot)$
(h) $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\overline{0}\}; +)$
(i) $(\mathbb{R}^{2\times 2}; +)$
(j) $(\mathbb{R}^{2\times 2}; \cdot)$
(k) $(\mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \{\mathbf{0}\}; \cdot)$
(l) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) := (\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det(A) \neq 0\}; \cdot)$

18. feladat. Milyen algebrai struktúrák az alábbiak?

(a) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; +)$
(b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$
(c) $(\mathbb{Q}^+; +)$
(d) $(\mathbb{Q}^+; \cdot)$
(e) $(\mathbb{Z}^-; +)$
(f) $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{\overline{0}\}; \cdot)$
(g) $(\mathbb{N}; \cdot)$

19. feladat. Milyen algebrai struktúrák az alábbiak?

(a) $(\{u, v, w\}; \diamond)$

$\diamond$	u	v	w
u	v	w	u
v	w	u	v
w	u	v	w

(b) $(\{a, b, c, d\}; \circ)$

$\circ$	a	b	c	d
a	c	a	b	b
b	a	b	c	d
c	b	c	b	a
d	b	d	c	a

(c) $(\{a, b, c, d\}; *)$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

(d) $(\mathcal{P}(\{u, v\}); \cup)$
(e) $(\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}; \to)$
(f) $(\{1, -1, i, -i\}; \cdot)$

20. feladat.

(a) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Z}; \diamond)$, ahol $a \diamond b = a - b$?
(b) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Z}; \bullet)$, ahol $a \bullet b = a + b + 23$?
(c) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Z}; \otimes)$, ahol $a \otimes b = b + 2$?
(d) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Z}; \oplus)$, ahol $a \oplus b = a$?
(e) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Q}; \star)$, ahol $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$?
(f) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Q} \setminus \{3\}; \star)$, ahol $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$?

21. feladat. Gyűrűt, illetve testet alkotnak-e az alábbi halmazok a szokásos összeadással és szorzással?

(a) $\mathbb{C}$
(b) $\mathbb{R}$
(c) $\mathbb{Q}$
(d) $\mathbb{Z}$
(e) $\mathbb{N}$
(f) $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$
(g) $\mathbb{Z}_{10}$
(h) $\mathbb{Z}_{11}$
(i) $\mathbb{Z}_{12}$
(j) $\mathbb{Z}_{13}$
(k) $\mathbb{R}^{2\times 2}$
(l) $\mathbb{R}^{2\times 3}$

22. feladat. Határozza meg az alábbi grupoidok összes részalgebráját, és rajzolja fel a részalgebrahálóikat.

$\mathbb{A} =$

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	a
c	a	c	c

$\mathbb{B} =$

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	a	c
c	a	a	b

$\mathbb{C} =$

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	a
c	b	b	c

$\mathbb{D} =$

$*$	a	b	c
a	a	a	b
b	a	b	c
c	a	a	c

$\mathbb{E} =$

$*$	a	b	c
a	a	c	c
b	a	b	c
c	b	c	c

$\mathbb{F} =$

$*$	a	b	c
a	a	c	c
b	b	b	c
c	a	b	c

23. feladat. Határozza meg alábbi grupoidokban az összes részalgebrát, és rajzolja fel a részalgebrahálóikat. Van-e egy-, illetve kételemű generátorrendszerük?

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & c & d & a & b \\ c & a & b & c & d \\ d & c & d & a & b \end{array}, \qquad \mathbb{B} = \begin{array}{c|cccc} * & u & v & w & z \\ \hline u & u & v & w & z \\ v & u & w & v & z \\ w & u & w & v & z \\ z & u & v & w & z \end{array}$$

24. feladat. Határozza meg az $(\{a,b,c,d\};*)$ grupoidban az alábbi részgrupoidokat.

(a) $[c,d] = ?$

(b) $[a,b] = ?$

(c) $[a] = ?$

(d) $[a,d] = ?$

(e) $[d] = ?$

$$\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & b \\ b & b & b & b & b \\ c & c & b & c & a \\ d & d & b & b & a \end{array}$$

25. feladat. Határozza meg az $(\{a,b,c,d\};*)$ grupoidban az alábbi részgrupoidokat.

(a) $[a] = ?$

(b) $[b] = ?$

(c) $[b,c] = ?$

(d) $[a,d] = ?$

(e) $[c,d] = ?$

$$\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & c & b & d \\ b & b & c & b & a \\ c & c & a & c & a \\ d & d & c & a & d \end{array}$$

26. feladat. Határozza meg az $(\mathbb{N};+)$ félcsoportban az alábbi részfélcsoportokat.

(a) $[2,9] = ?$ (b) $[2,5] = ?$ (c) $[3,5] = ?$ (d) $[4,10] = ?$

27. feladat. Határozza meg az $(\mathbb{N};\cdot)$ félcsoportban az alábbi részfélcsoportokat.

(a) $[2,9] = ?$ (b) $[2,5] = ?$ (c) $[3,5] = ?$ (d) $[4,10] = ?$

28. feladat. Döntse el, hogy a B részhalmaz részalgebrát (részcsoportot, részgyűrűt) alkot-e az $\mathbb{A}$ algebrában.

(a) $\mathbb{A} = (S_5;\cdot)$, $B = \{\mathrm{id}, (135), (153)\}$

(b) $\mathbb{A} = (\mathbb{C}[x];+,\cdot)$, $B = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) = 0\}$

(c) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}[x];+,\cdot)$, $B = \{f \in \mathbb{Z}[x] : 2 \mid f(0)\}$;

(d) $\mathbb{A} = (D_6;\cdot)$, $B = \{\mathrm{id}, t, a^2, a^2t\}$

(e) $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(X);\cap)$, $B = \{Y \subseteq X : |Y| = 2\}$, ahol X tetszőleges halmaz

(f) $\mathbb{A} = (\mathbb{R}[x];+,\cdot)$, $B = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) \geq 0\}$

(g) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_6,+)$, $B = \mathbb{Z}_6^*$

(h) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_{12};+,\cdot)$, $B = \mathbb{Z}_{12}^* \cup \{\overline{0}\}$

(i) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}[i];+,\cdot)$, $B = \{a+bi \in \mathbb{Z}[i] : 2 \mid a+b\}$

(j) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}[i];+,\cdot)$, $B = \{a+bi \in \mathbb{Z}[i] : 2 \mid ab\}$

(k) $\mathbb{A} = (S_4;\cdot)$, $B = \{\mathrm{id}, (13), (24), (13)(24)\}$

29. feladat. Részcsoportot alkot-e a H halmaz a G csoportban?

(a) $G = \mathbb{Z},\ H = \mathbb{N}_0$

(b) $G = \mathbb{Z},\ H = \{a \in \mathbb{Z} : 4 \mid a\}$

(c) $G = \mathbb{Z},\ H = \{a \in \mathbb{Z} : 4 \nmid a\}$

(d) $G = \mathbb{Q},\ H = \mathbb{Q}^+$

(e) $G = \mathbb{Q}^*,\ H = \mathbb{Q}^+$

(f) $G = \mathbb{Q}^*,\ H = \mathbb{Q}^-$

(g) $G = \mathbb{C},\ H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

(h) $G = \mathbb{C}^*,\ H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

(i) $G = \mathbb{C},\ H = \{ib : b \in \mathbb{R}\}$

(j) $G = \mathbb{C}^*,\ H = \{ib : b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

(k) $G = \mathbb{Z}_{10},\ H = \mathbb{Z}_{10} \setminus \{\overline{0}\}$

(l) $G = \mathbb{Z}_{10},\ H = \mathbb{Z}_{10}^*$

(m) $G = \mathbb{Z}_{15},\ H = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}\}$

(n) $G = \mathbb{Z}_{15},\ H = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{14}\}$

(o) $G = \mathbb{Z}_{15}^*,\ H = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{14}\}$

(p) $G = \mathbb{R}^+,\ H = \{\text{véges tizedes törtek}\}$

30. feladat. Határozza meg az $\mathbb{A}$ algebrában a T részhalmaz által generált részalgebrát. (Az (i) és (j) feladatokban $m(x,y,z) = x - y + z$, az (s) és (t) feladatokban $f(x) = x$ számjegyeinek négyzetösszege).

(a) $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cup)$, $T = \{\text{háromelemű halmazok}\}$

(b) $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cap)$, $T = \{\text{háromelemű halmazok}\}$

(c) $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cup, \cap)$, $T = \{\text{háromelemű halmazok}\}$

(d) $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \Delta)$, $T = \{\text{háromelemű halmazok}\}$

(e) $\mathbb{A} = (\mathbb{N}; +)$, $T = \{2, 3\}$

(f) $\mathbb{A} = (\mathbb{N}; \cdot)$, $T = \{2, 3\}$

(g) $\mathbb{A} = (\mathbb{N}; +)$, $T = \{3, 5\}$

(h) $\mathbb{A} = (\mathbb{N}; +, \cdot)$, $T = \{3, 5\}$

(i) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}; m)$, $T = \{-2, 2\}$

(j) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}; m)$, $T = \{1, 3, 8\}$

(k) $\mathbb{A} = (\mathbb{C}; +)$, $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

(l) $\mathbb{A} = (\mathbb{C}; \cdot)$, $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

(m) $\mathbb{A} = (\mathbb{C}; +)$, $T = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$

(n) $\mathbb{A} = (\mathbb{C}; \cdot)$, $T = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$

(o) $\mathbb{A} = (\mathbb{C}; +)$, $T = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$

(p) $\mathbb{A} = (\mathbb{C}; \cdot)$, $T = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$

(q) $\mathbb{A} = (\mathbb{C}; +, \cdot)$, $T = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$

(r) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}[i]; +, \cdot)$, $T = \{i\}$

(s) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}; f)$, $T = \{2018\}$

(t) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}; f)$, $T = \{2019\}$

31. feladat. Határozza meg a G csoportban a T részhalmaz által generált részcsoportot.

(a) $G = \mathbb{Z}$, $T = \{30, 42, 105\}$

(b) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $T = \{\overline{9}\}$

(c) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $T = \{\overline{10}\}$

(d) $G = \mathbb{Z}_{30}$, $T = \{\overline{6}, \overline{10}\}$

(e) $G = \mathbb{Z}_{31}$, $T = \{\overline{6}, \overline{10}\}$

(f) $G = \mathbb{Z}_{8}$, $T = \{\overline{5}\}$

(g) $G = \mathbb{Z}_{8}^*$, $T = \{\overline{5}\}$

(h) $G = D_{24}$, $T = \{a^9\}$

(i) $G = D_{24}$, $T = \{ta^9\}$

(j) $G = D_{12}$, $T = \{a^3, a^2t\}$

(k) $G = D_{12}$, $T = \{a^5, a^2t\}$

(l) $G = D_{10}$, $T = \{a^4, a^5t\}$

(m) $G = S_9$, $T = \{(12453)(34)\}$

(n) $G = S_4$, $T = \{(1234), (13)\}$

(o) $G = \mathbb{C}$, $T = \{1, \sqrt{2}\}$

(p) $G = \mathbb{C}^*$, $T = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$

(q) $G = \mathbb{C}^*$, $T = \left\{\cos\frac{10\pi}{7} + i\sin\frac{10\pi}{7}\right\}$

(r) $G = \mathbb{C}^*$, $T = \left\{i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

(s) $G = \mathbb{Q}$, $T = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

(t) $G = \mathbb{Q}^*$, $T = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

32. feladat. Határozza meg a G csoportban a B halmaz által generált részcsoportot.

(a) $G = \mathbb{Z},\ B = \{2, 9\}$

(b) $G = \mathbb{Z},\ B = \{6, 10\}$

(c) $G = \mathbb{Z},\ B = \{6, 10, 15\}$

(d) $G = \mathbb{Z},\ B = \{5, 17\}$

(e) $G = \mathbb{Z},\ B = \{25, 65\}$

(f) $G = \mathbb{Z},\ B = \{30, 42, 105\}$

(g) $G = \mathbb{Z}_{14},\ B = \{\overline{2}\}$

(h) $G = \mathbb{Z}_{15},\ B = \{\overline{2}\}$

(i) $G = \mathbb{Z}_{15},\ B = \{\overline{5}\}$

(j) $G = \mathbb{Z}_{16},\ B = \{\overline{5}\}$

(k) $G = \mathbb{Z}_{21},\ B = \{\overline{3}\}$

(l) $G = \mathbb{Z}_{14},\ B = \{\overline{6}, \overline{10}\}$

(m) $G = \mathbb{Z}_{15},\ B = \{\overline{6}, \overline{10}\}$

(n) $G = \mathbb{Z}_{15},\ B = \{\overline{25}, \overline{65}\}$

(o) $G = \mathbb{Z}_{16},\ B = \{\overline{25}, \overline{65}\}$

(p) $G = \mathbb{Z}_{14},\ B = \{\overline{6}, \overline{10}, \overline{15}\}$

(q) $G = \mathbb{Z}_{21},\ B = \{\overline{30}, \overline{42}, \overline{105}\}$

(r) $G = \mathbb{C},\ B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

(s) $G = \mathbb{C}^*,\ B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

(t) $G = \mathbb{C},\ B = \{1, i\}$

(u) $G = \mathbb{C}^*,\ B = \{1, i\}$

(v) $G = \mathbb{Z}_7^*,\ B = \{\overline{2}\}$

(w) $G = \mathbb{Z}_7^*,\ B = \{\overline{3}\}$

(x) $G = \mathbb{Z}_{15}^*,\ B = \{\overline{2}\}$

(y) $G = \mathbb{Z}_{15}^*,\ B = \{\overline{4}\}$

(z) $G = \mathbb{Z}_{21}^*,\ B = \{\overline{8}, \overline{13}\}$

33. feladat. Határozza meg a G csoportban a g elem rendjét.

(a) $G = \mathbb{Z}_{30},\ g = \overline{18}$

(b) $G = \mathbb{Z}_{30},\ g = \overline{19}$

(c) $G = \mathbb{Z}_{30},\ g = \overline{20}$

(d) $G = \mathbb{Z}_{30},\ g = \overline{21}$

(e) $G = \mathbb{Z}_{30},\ g = \overline{22}$

(f) $G = \mathbb{R},\ g = -1$

(g) $G = \mathbb{R}^*,\ g = -1$

(h) $G = \mathbb{R},\ g = 2$

(i) $G = \mathbb{R}^*,\ g = 2$

(j) $G = \mathbb{C},\ g = i$

(k) $G = \mathbb{C}^*,\ g = i$

(l) $G = \mathbb{Z}_7;\ g = \overline{2}$

(m) $G = \mathbb{Z}_7;\ g = \overline{3}$

(n) $G = \mathbb{Z}_{15}^*,\ g = \overline{2}$

(o) $G = \mathbb{Z}_{15}^*,\ g = \overline{11}$

(p) $G = \mathbb{Z}_{21}^*,\ g = \overline{4}$

(q) $G = S_7,\ g = (1\,2\,3\,4)$

(r) $G = S_7,\ g = (1\,2\,3\,4)(7\,6)$

(s) $G = S_7,\ g = (1\,2\,3\,4)(7\,6\,5)$

(t) $G = S_7,\ g = (1\,2\,3\,4)(7\,6\,5\,4)$

(u) $G = D_{18},\ g = a^4$

(v) $G = D_{18},\ g = a^5$

(w) $G = D_{18},\ g = ta^7tata^{-2}$

(x) $G = \mathbb{C}^*,\ g = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(y) $G = \mathbb{C}^*,\ g = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(z) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\ g = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

34. feladat. Számítsa ki az alábbi csoportokban az egyes elemek generátumait (azaz a ciklikus részcsoportokat), majd határozza meg az összes részcsoportot, végül rajzolja fel a részcsoportháló Hasse-diagramját.

$$\mathbb{Z}_{18},\quad \mathbb{Z}_{42},\quad \mathbb{Z}_{15}^*,\quad \mathbb{Z}_{49}^*,\quad \mathbb{Z}_{54}^*,\quad D_3,\quad S_3,\quad V,\quad Q$$

35. feladat. Határozza meg az R egységelemes gyűrű T részhalmaza által generált részgyűrűjét, valamint egységelemes részgyűrűjét.

(a) $R = \mathbb{R}[x],\quad T = \{x\}$

(b) $R = \mathbb{R}[x],\quad T = \{x^2\}$

(c) $R = \mathbb{Z}[x],\quad T = \{x^2, x^3\}$

(d) $R = \mathbb{Z}[x],\quad T = \{x - 1\}$

(e) $R = \mathbb{R}^{2\times 2},\quad T = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$

(f) $R = \mathbb{C},\quad T = \{i\}$

(g) $R = \mathbb{C},\quad T = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

(h) $R = \mathbb{R},\quad T = \{\sqrt{2}\}$

(i) $R = \mathbb{Q},\quad T = \{\frac{1}{2}\}$

(j) $R = \mathbb{Q},\quad T = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$

36. feladat. Adjon meg minimális generátorrendszert a következő algebrákban:

(a) $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}); \cap)$;

(b) $(\mathbb{Q}^+; \cdot, ^{-1}, 1)$.

37. feladat. Létezik-e háromelemű minimális generátorrendszere a $(\mathbb{Z}; +, -)$ algebrának?

38. feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}$ gyűrű részgyűrűit és egységelemes részgyűrűit.

39. feladat. Határozza meg az $(\mathbb{N}; ')$ algebra részalgebráit és generátorrendszereit, ahol $n' = n + 1$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re.

40. feladat. Tekintsük az $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}; m)$ algebrát, ahol $m(a, b, c) = a - b + c$ tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}$-re. Mutassa meg, hogy

(a) bármely n pozitív egészre minden modulo n maradékosztály részalgebra $\mathbb{A}$-ban, és

(b) $\mathbb{A}$ minden részalgebrája ilyen.

41. feladat. Határozza meg az $(\mathbb{Z}; f, g)$ algebra összes részalgebráját, ahol $f(x) = 2x$ és $g(x) = x - 1$.

42. feladat. Leteszünk egymás mellé néhány pénzérmét úgy, hogy mindegyiken fej van felül. Egy lépésben bármelyik két egymás melletti érmét megfordíthatjuk. Milyen fej-írás mintázatokat érhetünk el ilyen lépésekkel?

43. feladat. Igazolja, hogy ha egy integritástartomány nemtriviális részgyűrűjének van egységeleme, az megegyezik az integritástartomány egységelemével. Mutasson példát arra, hogy ez nem marad igaz, ha elhagyjuk a zérusosztómentesség feltételét.

44. feladat. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak (a választ indokolni is kell).

(a) Kommutatív gyűrű minden részgyűrűje is kommutatív.

(b) Nemkommutatív gyűrű egyetlen részgyűrűje sem kommutatív.

(c) Végtelen gyűrű minden részgyűrűje végtelen.

(d) Egy algebra bármely két generátorrendszerének az egyesítése is generátorrendszer.

(e) Egy algebra bármely két generátorrendszerének a metszete is generátorrendszer.

A 45., 46. feladatok művelettáblázatai interaktív formában megtalálhatóak ebben a „színezőben”:
`http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/absztot_2022tavasz/szinezo.html`

45. feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írja fel a hozzá tartozó faktoralgebra művelettáblázatát.

(a) $\mathcal{C} = \{\{a,b\}, \{c,d\}, \{e\}\}$

(b) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b,c,d,e\}\}$

(c) $\mathcal{C} = \{\{a,c\}, \{b,e\}, \{d\}\}$

(d) $\mathcal{C} = \{\{a,b,c,e\}, \{d\}\}$

(e) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b\}, \{c,d,e\}\}$

(f) $\mathcal{C} = \{\{a,c,d,e\}, \{b\}\}$

(g) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b,e\}, \{c\}, \{d\}\}$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

46. feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írja fel a hozzá tartozó faktoralgebra művelettáblázatát.

(a) $\mathcal{C} = \{\{a,c\}, \{b\}, \{d\}\}$

(b) $\mathcal{C} = \{\{a,c\}, \{b,d\}\}$

(c) $\mathcal{C} = \{\{a,b\}, \{c\}, \{d\}\}$

(d) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{c\}, \{b,d\}\}$

(e) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b,c,d\}\}$

(f) $\mathcal{C} = \{\{a,b,c,d\}\}$

(g) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	a	b
c	a	b	c	d
d	c	d	a	b

47. feladat. Határozza meg az alábbi grupoidok összes kongruenciáját és a megfelelő faktorgrupoidokat.

$\mathbb{A} =$

$*$	a	b	c
a	a	b	b
b	b	b	b
c	c	c	c

$\mathbb{B} =$

$*$	p	q	r	s
p	p	q	r	r
q	q	q	r	r
r	r	r	r	r
s	s	s	s	s

48. feladat. Döntse el, hogy a megadott $\mathcal{C}$ osztályozás kompatibilis-e az $\mathbb{A}$, illetve a $\mathbb{B}$ algebra műveleteivel. Ha igen, akkor határozza meg a megfelelő faktoralgebrát.

(a) $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cap)$, $\mathbb{B} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \Delta)$, $\mathcal{C} = \{\{\text{véges halmazok}\}, \{\text{végtelen halmazok}\}\}$

(b) $\mathbb{A} = (\mathbb{R}; +)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{R}; \cdot)$, $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}^-, \{0\}, \mathbb{R}^+\}$

(c) $\mathbb{A} = (\mathbb{C}; +)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{C}; \cdot)$, $\mathcal{C} = \{\{\text{algebrai számok}\}, \{\text{transzcendens számok}\}\}$

(d) $\mathbb{A} = (\mathbb{N}; +)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{N}; \cdot)$, $\mathcal{C} = \{\{\text{3-mal osztható számok}\}, \{\text{3-mal nem osztható számok}\}\}$

(e) $\mathbb{A} = (\mathbb{N}_0; +)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{N}_0; \cdot)$, $\mathcal{C} = \{\{0,1\}, \{2,3,\ldots\}\}$

(f) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_9^*; \cdot)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_9^*; ^{-1})$, $\mathcal{C} = \{\{\overline{2},\overline{7}\}, \{\overline{1},\overline{8}\}, \{\overline{4},\overline{5}\}\}$

(g) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_9^*; \cdot)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_9^*; ^{-1})$, $\mathcal{C} = \{\{\overline{2},\overline{7}\}, \{\overline{1}\}, \{\overline{8}\}, \{\overline{4},\overline{5}\}\}$

(h) $\mathbb{A} = (S_5; \cdot)$, $\mathbb{B} = (S_5; ^{-1})$, $\mathcal{C} = \{A_5, S_5 \setminus A_5\}$

49. feladat. Döntse el, hogy a megadott ρ reláció kongruenciája-e az $\mathbb{A}$, illetve a $\mathbb{B}$ algebrának. Ha igen, akkor határozza meg a megfelelő faktoralgebrát.

(a) $\mathbb{A} = (\mathbb{N}; +)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{N}; \cdot)$, $\rho = \{(a,b) : a \mid b\}$

(b) $\mathbb{A} = (\mathbb{C}; +)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{C}; \cdot)$, $\rho = \{(z,w) : |z| = |w|\}$

(c) $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cap)$, $\mathbb{B} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \Delta)$, $\rho = \{(X,Y) : |X| = |Y|\}$

(d) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}; +)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}; \cdot)$, $\rho = \{(a,b) : 3 \mid a^2 - b^2\}$

(e) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_6; +)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_6; \cdot)$, $\rho = \{(a,b) : 2a = 2b\}$

(f) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}[x]; +)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}[x]; \cdot)$, $\rho = \{(f,g) : f(1) = g(1)\}$

50. feladat. Definiáljuk a természetes számok halmazán a ρ relációt a következőképpen:

$$a \rho b \iff \{k \in \mathbb{N}_0 : 5^k \mid a\} = \{k \in \mathbb{N}_0 : 5^k \mid b\}.$$

Igazolja, hogy ρ kongruenciája az $(\mathbb{N}; \cdot)$ algebrának, és határozza meg a hozzá tartozó faktoralgebrát. Mi a helyzet, ha ρ definíciójában 5 helyett 6-ot írunk?

51. feladat. Homomorfizmusok-e az alábbi leképezések?

(a) $\varphi\colon (\mathbb{R}^+;\cdot) \to (\mathbb{R};+),\ x \mapsto \log x$

(b) $\varphi\colon (\mathbb{C};+,\cdot) \to (\mathbb{C};+,\cdot),\ z \mapsto \overline{z}$

(c) $\varphi\colon (\mathbb{C};+) \to (\mathbb{R};+),\ z \mapsto \operatorname{Re} z$

(d) $\varphi\colon (\mathbb{C};\cdot) \to (\mathbb{R};\cdot),\ z \mapsto \operatorname{Re} z$

(e) $\varphi\colon (\mathbb{R}^{n\times n};\cdot) \to (\mathbb{R};\cdot),\ M \mapsto \det M$

(f) $\varphi\colon (C[0,1];+) \to (\mathbb{R};+),\ f \mapsto \int\limits_0^1 f(x)dx$

(g) $\varphi\colon (\mathbb{R};*) \to (\mathbb{R}^+;\circ), x \mapsto 3^x$,
ahol $x * y = \frac{x+y}{2}$ és $x \circ y = \sqrt{xy}$

(h) $\varphi\colon (\mathbb{Z};+,\cdot) \to (\mathbb{Z};+,\cdot), x \mapsto 2x$

(i) $\varphi\colon (\mathbb{R}^+;+,\cdot) \to (\mathbb{R}^+;+,\cdot), x \mapsto 1/x$

(j) $\varphi\colon (\mathbb{Z}_2;+,\cdot) \to (\mathbb{Z}_2;+,\cdot), x \mapsto x^2$

(k) $\varphi\colon (\mathbb{Z}_3;+,\cdot) \to (\mathbb{Z}_3;+,\cdot), x \mapsto x^2$

(l) $\varphi\colon (\mathcal{P}(U);\cap) \to (\mathcal{P}(U);\cup), H \mapsto \overline{H}$,
ahol U nemüres halmaz

(m) $(\mathcal{P}(\mathbb{N});\cup,\cap) \to (\mathcal{P}(\mathbb{N});\cup,\cap), H \mapsto \{1,2,3\} \cup H$

(n) $(K;+,\cdot) \to (\mathbb{R};+,\cdot), \{a_n\} \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$,
ahol K a konvergens valós számsorozatok halmaza

(o) $\varphi\colon (\mathbb{R};+) \to (\mathbb{R};+), x \mapsto x^2$

52. feladat. A $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ leképezésről annyit tudunk, hogy $2\varphi = 16$ és $5\varphi = 40$.

(a) Lehetséges-e, hogy $\varphi\colon\ (\mathbb{N};+) \to (\mathbb{N};+)$ homomorfizmus? Mi lehet ez a homomorfizmus? Hány lehetőség van?

(b) Lehetséges-e, hogy $\varphi\colon\ (\mathbb{N};+) \to (\mathbb{N};\cdot)$ homomorfizmus? Mi lehet ez a homomorfizmus? Hány lehetőség van?

(c) Lehetséges-e, hogy $\varphi\colon\ (\mathbb{N};\cdot) \to (\mathbb{N};+)$ homomorfizmus? Mi lehet ez a homomorfizmus? Hány lehetőség van?

(d) Lehetséges-e, hogy $\varphi\colon\ (\mathbb{N};\cdot) \to (\mathbb{N};\cdot)$ homomorfizmus? Mi lehet ez a homomorfizmus? Hány lehetőség van?

53. feladat. Oldja meg az előző feladatot a $2\varphi = 4$, $5\varphi = 32$ adatokkal is.

Az 54., 55. feladatok műveleti táblázatai interaktív formában megtalálhatóak ebben a „színezőben”:
`http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/absztot_2022tavasz/szinezo.html`

54. feladat. Adjon meg izomorfizmust az $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ grupoidok között.

(a) $\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\};\leftrightarrow)$, $\quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2;+)$

(b) $\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\};\wedge)$, $\quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2;\cdot)$

(c) $\mathbb{A} = (\{1,-1,i,-i\};\cdot)$, $\quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4;+)$

(d) $\mathbb{A} = (\{-1,1\};\cdot)$, $\quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2;+)$

(e) $\mathbb{A} = (\{a,b,c,d\};*)$, $\quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4;\cdot)$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

55. feladat. Izomorf-e az $\mathbb{A}$ grupoid $\mathbb{B}$ és $\mathbb{C}$ közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjon meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokolja meg, hogy miért nem.

(a) $\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\};\rightarrow)$, $\quad \mathbb{B} = (\{0,1\};\circ)$ $\quad \mathbb{C} = (\{0,1\};*)$

$\circ$	0	1
0	1	1
1	0	1

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

(b) $\mathbb{A} = (\{1,2,3\};\min)$, $\quad \mathbb{B} = (\{0,1,2\};\oplus)$, $\quad \mathbb{C} = (\{0,1,2\};*)$

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

(c) $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\{1,2\});\cup)$, $\quad \mathbb{B} = (\{0,1,2,3\};\oplus)$, $\quad \mathbb{C} = (\{0,1,2,3\};*)$

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	3	1
1	1	1	1	1
2	3	1	2	0
3	1	1	0	3

$*$	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	1	1	1	1
2	0	1	2	3
3	1	1	3	3

(d) $\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\};\vee)$, $\quad \mathbb{B} = (\{0,1\};\diamond)$, $\quad \mathbb{C} = (\{0,1\};\otimes)$

$\diamond$	0	1
0	1	0
1	0	0

$\otimes$	0	1
0	0	1
1	1	1

(e) $\mathbb{A} = (\{-1, 0, 1\}; \cdot)$, $\mathbb{B} = (\{0, 1, 2\}; \otimes)$, $\mathbb{C} = (\{0, 1, 2\}; \circ)$

$\otimes$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	2

$\circ$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

(f) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_5^*; \cdot)$, $\mathbb{B} = (\{0, 1, 2, 3\}; \diamond)$, $\mathbb{C} = (\{0, 1, 2\}; \oplus)$

$\diamond$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

56. feladat. Melyek izomorfak egymással az alábbi grupoidok közül?

$\mathbb{A} =$

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	a
c	a	c	c

$\mathbb{B} =$

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	a	c
c	a	a	b

$\mathbb{C} =$

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	a
c	b	b	c

$\mathbb{D} =$

$*$	a	b	c
a	a	a	b
b	a	b	c
c	a	a	c

$\mathbb{E} =$

$*$	a	b	c
a	a	c	c
b	a	b	c
c	b	c	c

$\mathbb{F} =$

$*$	a	b	c
a	a	c	c
b	b	b	c
c	a	b	c

57. feladat. Milyen betűket kell írni a kérdőjelek helyére, hogy $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizmusokat kapjunk? Mindegyik homomorfizmusnak határozza meg a magját, és írja fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

(a) $av = u$, $bv = v$, $cv = ?$, $dv = ?$

(b) $a\varphi = z$, $b\varphi = ?$, $c\varphi = ?$, $d\varphi = w$

(c) $a\chi = ?$, $b\chi = z$, $c\chi = u$, $d\chi = ?$

(d) $a\psi = ?$, $b\psi = ?$, $c\psi = u$, $d\psi = w$

(e) $a\omega = z$, $b\omega = v$ $c\omega = ?$, $d\omega = ?$

$\mathbb{A} =$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	a	b
c	a	b	c	d
d	c	d	a	b

$\mathbb{B} =$

$*$	u	v	w	z
u	u	v	w	z
v	u	w	v	z
w	u	w	v	z
z	u	v	w	z

58. feladat. Határozza meg az összes $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$, illetve $\mathbb{B} \to \mathbb{A}$ homomorfizmust.

$\mathbb{A} =$

$*$	a	b	c
a	a	b	b
b	b	b	b
c	c	c	c

$\mathbb{B} =$

$*$	p	q	r	s
p	p	q	r	r
q	q	q	r	r
r	r	r	r	r
s	s	s	s	s

59. feladat. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak (a választ indokolni is kell).

(a) Egy véges algebra bármely kompatibilis osztályozásában minden osztály elemszáma azonos

(b) Két olyan homomorfizmus szorzata is lehet izomorfizmus, amelyek egyike sem izomorfizmus.

(c) Tetszőleges $\mathbb{A}$ algebra minden részalgebrája előáll egy alkalmas $\mathbb{A}$-ba vezető homomorfizmus képeként.

(d) Tetszőleges $\mathbb{A}$ algebra minden faktoralgebrája előáll egy alkalmas $\mathbb{A}$-ba vezető homomorfizmus képeként.

60. feladat. Legyen R az $\mathbb{A} = (A; +)$ Abel-csoport endomorfizmusainak halmaza. Definiáljuk R-en a $\oplus$ és $\odot$ műveleteket a következőképpen: $a(\varphi \oplus \psi) = a\varphi + a\psi$, és $a(\varphi \odot \psi) = (a\varphi)\psi$ minden $\varphi, \psi \in R$ és $a \in A$ esetén. Mutassa meg, hogy $(R; \oplus, \odot)$ gyűrű. Ezt a gyűrűt nevezzük $\mathbb{A}$ *endomorfizmusgyűrűjének.*

61. feladat. Találós kérdés: Abel-csoport, aminek az endomorfizmusgyűrűjébe be van ágyazva a valós számtest. Mi az?

62. feladat. Döntse el, hogy normálosztója-e a H részcsoport a G csoportnak, és ha igen, határozza meg a G/H faktorcsoportot. Ha H nem normálosztó, akkor számítsa ki az általa generált N normálosztót, és határozza meg a G/N faktorcsoportot.

(a) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $H = [\overline{3}]$
(b) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $H = [\overline{4}]$
(c) $G = \mathbb{Z}_{21}^*$, $H = \{\overline{1}, \overline{8}, \overline{13}, \overline{20}\}$
(d) $G = \mathbb{Z}_{21}^*$, $H = [\overline{4}]$
(e) $G = \mathbb{C}$, $H = \mathbb{R}$
(f) $G = \mathbb{R}^*$, $H = \mathbb{R}^+$
(g) $G = Q$, $H = [-1]$
(h) $G = D_4$, $H = [a^2]$
(i) $G = D_4$, $H = [a^2, at]$
(j) $G = D_4$, $H = [a^2t]$
(k) $G = D_5$, $H = [a^2t]$
(l) $G = S_3$, $H = [(12)]$
(m) $G = S_4$, $H = V$
(n) $G = S_4$, $H = [(1234), (13)]$

63. feladat. Határozza meg az alábbi csoportokban a konjugáltosztályokat. Ennek segítségével keresse meg az összes normálosztójukat, majd rajzolja fel a normálosztóhálót.

$$D_3,\ D_4,\ D_5,\ D_6,\ S_3,\ S_4,\ Q$$

64. feladat. Adjon meg minél több olyan $\pi \in S_5$ permutációt, amelyre $\pi^{-1}(123)\pi = (345)$.

65. feladat. Igazolja, hogy A_n-ben bármely két 4 hosszúságú ciklus konjugált (minden $n \geq 4$ esetén).

66. feladat. Bizonyítsa be, hogy A_6-ban (12345) és (21345) nem konjugáltak.

67. feladat. Igazolja, hogy egy G csoport H részcsoportja akkor és csak akkor normálosztó, ha minden $a, b \in G$ esetén $ab \in H \implies ba \in H$.

68. feladat. Bizonyítsa be, hogy ha $N = \{1, n\}$ egy kételemű normálosztó a G csoportban, akkor n felcserélhető G minden elemével.

69. feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}_{15}^*/[\overline{4}]$ faktorcsoport összes részcsoportját.

70. feladat. Csoporthomomorfizmusok-e az alábbi leképezések? Amelyik igen, annak határozza meg a magját és az értékkészletét, majd írja fel a homomorfiatételből adódó izomorfizmust a mag szerinti faktorcsoport és a homomorf kép között.

(a) $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $z \mapsto |z|$
(b) $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$
(c) $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, $k \mapsto \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{13}$
(d) $\mathbb{Z} \to D_3$, $k \mapsto a^k$
(e) $\mathbb{Z}_{12} \to D_8$, $\overline{k} \mapsto a^{6k}$
(f) $D_4 \to \mathbb{Z}_2$, $a^k t^\ell \mapsto \overline{k + \ell}$
(g) $Q \to Q$, $x \mapsto x^2$
(h) $\mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{10}$, $\overline{k} \mapsto \overline{k+2}$
(i) $\mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{10}$, $\overline{k} \mapsto \overline{4k}$
(j) $\mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{15}$, $\overline{k} \mapsto \overline{6k}$
(k) $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_8$, $\overline{k} \mapsto \overline{3k}$
(l) $\mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_{16}^*$, $\overline{k} \mapsto \overline{3}^k$
(m) $\mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_{16}^*$, $\overline{k} \mapsto \overline{k}^3$
(n) $\mathbb{Z}_{20}^* \to \mathbb{Z}_{20}^*$, $x \mapsto x^2$

71. feladat. Létezik-e injektív/szürjektív/nemtriviális homomorfizmus a megadott csoportok között? Ha létezik, akkor adja is meg az összeset.

(a) $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_8$
(b) $\mathbb{Z}_9 \to D_6$
(c) $\mathbb{Z}_9 \to Q$
(d) $\mathbb{Z}_4 \to Q$
(e) $D_4 \to S_4$
(f) $D_4 \to \mathbb{Z}_4$
(g) $\mathbb{Z}_{19}^* \to \mathbb{Z}_{11}^*$
(h) $Q \to D_6$
(i) $S_3 \to \mathbb{Z}_6$
(j) $S_{100} \to D_{100}$
(k) $\mathbb{Z} \to S_3$
(l) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

72. feladat. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak (a választ indokolni is kell).

(a) Ha egy csoport minden részcsoportja normálosztó, akkor a csoport kommutatív.
(b) Tetszőleges csoport minden kommutatív részcsoportja normálosztó.
(c) Tetszőleges csoport minden normálosztója kommutatív részcsoport.
(d) Tetszőleges csoport bármely 2 rendű részcsoportja normálosztó.
(e) Tetszőleges N, K, G csoportok esetén, ha $N \lhd K$ és $K \lhd G$, akkor $N \lhd G$.
(f) Ciklikus csoport minden faktorcsoportja is ciklikus.
(g) A konjugáltsági reláció minden csoport esetében kongruenciareláció.
(h) A konjugáltsági reláció minden Abel-csoport esetében kongruenciareláció.
(i) Ha egy csoportban két elem egymás konjugáltja, akkor a rendjük azonos.
(j) Egy csoport azonos rendű elemei egymás konjugáltjai.

73. feladat. Döntse el, hogy a megadott R gyűrűben az I részhalmaz ideált alkot-e. Ha igen, akkor adja meg a hozzá tartozó kompatibilis osztályozást, valamint az R/I faktorgyűrű elemeit és művelettáblázatait.

(a) R a páros egész számok gyűrűje, I a 4-gyel osztható egészek halmaza

(b) $R = \mathbb{Z}[i]$, $I = \mathbb{Z}$

(c) $R = \mathbb{Z}[i]$, $I = \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] : 2 \mid a, b\}$

(d) $R = \mathbb{Z}[i]$, $I = \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] : 4 \mid a,\ 6 \mid b\}$

(e) $R = \mathbb{Z}[x]$, $I = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x] : 2 \mid a_0\}$

(f) $R = \mathbb{Z}[x]$, $I = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x] : 2 \mid a_1\}$

(g) $R = \mathbb{Z}[x]$, $I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) = 0\}$

(h) $R = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $I = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right) :\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$

74. feladat. Gyűrűhomomorfizmusok-e az alább leképezések? Amelyik igen, annak határozza meg a magját és az értékkészletét, majd írja fel a homomorfiatételből adódó izomorfizmust a mag szerinti faktorcsoport és a homomorf kép között.

(a) $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $a + bi \mapsto a$

(b) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$

(c) $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, $f \mapsto f(0)$

(d) $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mapsto a_1$

(e) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}[x]/\langle x\rangle$, $a \mapsto 2a + \langle x\rangle$

(f) $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$, $a + bi \mapsto a^2 + b^2$

(g) $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$, $a + bi \mapsto a - b$

(h) $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_2$, $a + bi \mapsto \overline{a - b}$

75. feladat. A 73. feladatban (azokban a részekben, ahol I ideál) adjon meg egy olyan $R \to S$ szürjektív gyűrűhomomorfizmust (alkalmas S gyűrűvel) amelynek magja éppen I, és határozza meg az R/I faktorgyűrűt ennek segítségével is. Konstruálja meg a 77. feladatbeli faktorgyűrűket is hasonlóképpen a homomorfiatétel segítségével.

76. feladat. Határozza meg az R gyűrű T részhalmaza által generált ideálját.

(a) $R = \mathbb{Z}$, $T = \{18, 30\}$

(b) $R = \mathbb{Z}[i]$, $T = \{1 + i\}$

(c) $R = \mathbb{Z}[x]$, $T = \{4, x\}$

(d) $R = \mathbb{Q}[x]$, $T = \{x^2 - 4x + 3,\ x^2 + x - 2\}$

77. feladat. Adja meg az alábbi faktorgyűrűk elemeit és művelettáblázatait.

(a) $\mathbb{Z}_4/\langle\overline{0}\rangle$

(b) $\mathbb{Z}_8/\langle\overline{4}\rangle$

(c) $\mathbb{Z}_{10}/\langle\overline{4}\rangle$

(d) $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + i\rangle$

(e) $\mathbb{Z}[x]/\langle 4, x\rangle$

(f) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$

78. feladat. Döntse el, hogy testek-e az alábbi faktorgyűrűk, és határozza meg elemeik számát.

(a) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle$

(b) $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 1\rangle$

(c) $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + 1\rangle$

(d) $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + 2\rangle$

(e) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x + 1\rangle$

(f) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x + 1\rangle$

(g) $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + 1\rangle$

(h) $\mathbb{Q}[x]/\langle x^3 - 2\rangle$

(i) $\mathbb{R}[x]/\langle x^3 - 2\rangle$

(j) $\mathbb{Z}[i]/\langle 2\rangle$

(k) $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + i\rangle$

(l) $\mathbb{Z}[i]/\langle 2 + i\rangle$

79. feladat. Legyen $R = \mathbb{Z}^{2\times 2}$ és $I = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : a, b, c, d \text{ páros}\right\}$. Mutassa meg, hogy I ideál az R gyűrűben, és határozza meg az R/I faktorgyűrűt. (Mik az elemei, hogyan végezzük rajtuk a műveleteket?)

80. feladat. Legyen $R = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right) :\ a, b \in \mathbb{Q}\right\}$. Mutassa meg, hogy $I = \{A \in R \mid A^2 = 0\}$ ideál az R gyűrűben, és határozza meg az R/I faktorgyűrűt. (Mik az elemei, hogyan végezzük rajtuk a műveleteket?)

81. feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) gyűrűk ideáljait.

82. feladat. Mutassa meg, hogy a $\mathbb{Z}$ gyűrű bármely m, n elemére

$$\langle m\rangle \cap \langle n\rangle = \langle \mathrm{lkkt}(m, n)\rangle \quad \text{és} \quad \langle m\rangle + \langle n\rangle = \langle \mathrm{lnko}(m, n)\rangle.$$

83. feladat. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak (a választ indokolni is kell).

(a) Egy egységelemes gyűrű valódi ideálja nem tartalmazhatja a gyűrű egységelemét.

(b) Egy kommutatív egységelemes gyűrű minden faktorgyűrűje is kommutatív és egységelemes.

(c) Egy gyűrű bármely I és J ideáljára $IJ = I \cap J$.

(d) Egy zérusosztómentes gyűrű minden faktorgyűrűje is zérusosztómentes.

(e) Kommutatív gyűrűben minden részgyűrű ideál.

84. feladat. Számítsa ki az alábbi csoportokban az egyes elemek rendjét.

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \quad \mathbb{Z}_2 \times Q, \quad \mathbb{Z}_3 \times D_3, \quad \mathbb{Z}_2 \times S_3$$

85. feladat. Melyek direkt felbonthatóak az alábbi csoportok közül? Amelyik felbontható, annak adja is meg egy felbontását.

$$S_5,\ A_5,\ \mathbb{Z}_{14},\ \mathbb{Z}_{15},\ \mathbb{Z}_{16},\ \mathbb{Z}_{14}^*,\ \mathbb{Z}_{15}^*,\ \mathbb{Z}_{16}^*,\ \mathbb{Z}_{24}^*,\ D_4,\ D_{10},\ D_{12},\ Q$$

86. feladat. Sorolja fel (izomorfia erejéig) az összes 896, 897, 898, 899 és 900 elemű Abel-csoportot.

87. feladat. Melyek izomorfak egymással az alábbi csoportok közül?

$$\mathbb{Z}_{300}, \quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{15}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{75}, \quad \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}, \quad \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{60}, \quad \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{30},$$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{75}, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{20}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{25}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{30}$$

88. feladat. Melyek izomorfak egymással az alábbi csoportok közül?

$$\mathbb{Z}_6, \quad \mathbb{Z}_5^*, \quad \mathbb{Z}_9^*, \quad \mathbb{Z}_{12}^*, \quad \mathbb{Z}_{15}^*, \quad \mathbb{Z}_{24}^*, \quad \mathbb{Z}_{30}^*, \quad \mathbb{Z}_{24}/\left[\overline{6}\right], \quad \mathbb{Z}_{13}^*/\left[\overline{8}\right], \quad \mathbb{Z}_{15}^*/\left[\overline{14}\right], \quad \mathbb{Z}_{21}^*/\left[\overline{5}\right],$$

$$Q, \quad D_4, \quad D_4/\left[a^2\right], \quad D_4/\left[a^2,t\right], \quad D_6/\left[a^2\right], \quad D_6/\left[a^3\right], \quad D_9/\left[a^3,t\right]$$

89. feladat. Melyek azok az n természetes számok, amelyekre izomorfia erejéig csak egy n-elemű Abel-csoport létezik?

90. feladat. Igazolja, hogy $\mathbb{Q}$ direkt felbonthatatlan, míg $\mathbb{Q}^*$ direkt felbontható.

91. feladat. Igazolja, hogy ha G véges Abel-csoport, és m osztja G rendjét, akkor G-ben van m rendű részcsoport.

92. feladat. Bizonyítsa be, hogy ha U egy n-elemű halmaz, akkor a $(\mathcal{P}(U);\Delta,\cap)$ gyűrű izomorf a $\mathbb{Z}_2^n$ gyűrűvel.

93. feladat. Bizonyítsa be, hogy az $R \times S$ gyűrű pontosan akkor egységelemes, ha R és S is az, és ilyenkor $R \times S$ minden ideálja $I \times J$ alakú, ahol $I \lhd R$ és $J \lhd S$.

94. feladat. Igazolja, hogy minden integritástartomány direkt felbonthatatlan.

95. feladat. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak (a választ indokolni is kell).

(a) Tetszőleges G_1, G_2 csoportok esetén, ha $H_1 \leq G_1$ és $H_2 \leq G_2$, akkor $H_1 \times H_2 \leq G_1 \times G_2$.

(b) Tetszőleges G_1, G_2 csoportok esetén $G_1 \times G_2$ minden részcsoportja előáll $H_1 \times H_2$ alakban, ahol $H_1 \leq G_1$ és $H_2 \leq G_2$.

(c) A $G_1 \times G_2$ csoport pontosan akkor kommutatív, ha G_1 és G_2 kommutatív.

(d) A $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{10}$ csoport minden elemének legfeljebb 30 a rendje.

(e) A $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ csoportnak négy részcsoportja van.

(f) Izomorfiától eltekintve egyetlen 2019 elemű Abel-csoport van.

96. feladat. Hányféleképpen lehet kiszínezni a sakktábla mezőit két színnel, ha a forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek?

97. feladat. Melyik ismert csoporttal izomorf a szabályos tetraéder forgáscsoportja?

98. feladat. Határozza meg a p-Sylow részcsoportokat az alábbi csoportokban (a p prímszám minden szóba jövő értékére). Hány p-Sylow részcsoport van?

$$S_3,\ S_4,\ A_4,\ \mathbb{Z}_{24},\ \mathbb{Z}_{25},\ \mathbb{Z}_{14}^*,\ \mathbb{Z}_{15}^*,\ \mathbb{Z}_{21}^*,\ D_4,\ D_5,\ D_6,\ Q$$

99. feladat. Bizonyítsa be, hogy nem létezik 30-elemű egyszerű csoport.