

## Csoportok II

2013 április 26-27.

1. Mellékosztályok, Lagrange tétele
2. Normálosztó, faktorcsoport
3. Homomorfiatétel, izomorfiatételek
4. Permutációcsoportok
5. Direkt szorzat

1. Mellékosztályok, Lagrange tétele
2. Normálosztó, faktorcsoport
3. Homomorfiatétel, izomorfiatételek
4. Permutációcsoportok
5. Direkt szorzat

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] XII/3 és [F] II/2,3,7 fejezetekben található.

## Definíció

A  $G$  csoport nemüres részhalmazait **komplexusoknak** nevezzük.  
Komplexusok szorzata és inverze:

$$KL = \{ab : a \in K, b \in L\}, \quad K^{-1} = \{a^{-1} : a \in K\}.$$

## Jelölés

$$aK := \{a\} K, \quad Ka := K \{a\}$$

## Állítás

*A komplexusok szorzása asszociatív művelet.*

### Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás. □

## Tétel

*Egy  $H \subseteq G$  komplexus akkor és csak akkor részcsoport, ha*

$$1 \in H, \quad HH \subseteq H, \quad H^{-1} \subseteq H.$$

### Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.4. Tétel. □

## Megjegyzés

Tetszőleges  $H$  részcsoportra  $HH \subseteq H = \{1\} H \subseteq HH$ , tehát  $HH = H$ , és hasonlóan  $H^{-1} = H$  is teljesül.

## Tétel

Legyen  $H \leq G$ , és definiáljunk a  $G$  halmazon egy  $\sim$  relációt:

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Ekkor  $\sim$  ekvivalenciareláció, és egy  $a \in G$  elem ekvivalenciaosztálya

$$aH = \{ah : h \in H\}.$$

## Biz.

- ▶ reflexivitás:  $\forall a \in G : a^{-1}a \in H$
- ▶ szimmetria:  $\forall a, b \in G : a^{-1}b \in H \implies b^{-1}a \in H$
- ▶ tranzitivitás:  $\forall a, b, c \in G : a^{-1}b \in H \text{ és } b^{-1}c \in H \implies a^{-1}c \in H$

Egy  $b \in G$  elem akkor és csak akkor van benne az  $a \in G$  elem  $\sim$  szerinti ekvivalenciaosztályában, ha

$$\begin{aligned} a \sim b &\iff a^{-1}b \in H \\ &\iff \exists h \in H : a^{-1}b = h \\ &\iff \exists h \in H : b = ah. \quad \square \end{aligned}$$

## Definíció

Az  $aH$  halmazt az  $a$  elem  $H$  szerinti **baloldali mellékosztályának** nevezzük.

## Tétel

*Egy  $H \leq G$  részcsoport szerinti baloldali mellékosztályok a  $G$  csoport egy osztályozását alkotják.*

## Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.7. Tétel.

Nincs mit bizonyítani, bármely ekvivalenciareláció esetén az ekvivalenciaosztályok osztályozást alkotnak. □

## Megjegyzés

Hasonló módon definiálhatóak a  $Ha$  **jobboldali mellékosztályok**, amelyek szintén osztályozást alkotnak.

## Megjegyzés

Abel-csoportok esetén a baloldali és jobboldali mellékosztályok megegyeznek ( $aH = Ha$ ). Nemkommutatív esetben is előfordulhat, hogy megegyeznek a baloldali és jobboldali mellékosztályok, de nem mindig van így.

## Példa

Határozzuk meg a  $H \leq G$  részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

►  $G = \mathbb{Z}_6$ ,  $H = [3] = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ :

$$\bar{0} + H = \{\bar{0}, \bar{3}\}, \bar{1} + H = \{\bar{1}, \bar{4}\}, \bar{2} + H = \{\bar{2}, \bar{5}\}$$

$$\bar{3} + H = \{\bar{3}, \bar{0}\}, \bar{4} + H = \{\bar{4}, \bar{1}\}, \bar{5} + H = \{\bar{5}, \bar{2}\}$$

$$\bar{0} + H = \bar{3} + H = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

$$\bar{1} + H = \bar{4} + H = \{\bar{1}, \bar{4}\}$$

$$\bar{2} + H = \bar{5} + H = \{\bar{2}, \bar{5}\}$$

A mellékosztályozás:  $\{\{\bar{0}, \bar{3}\}, \{\bar{1}, \bar{4}\}, \{\bar{2}, \bar{5}\}\}$ .

►  $G = \mathbb{Z}_6$ ,  $H = [2] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ :

$$\bar{0} + H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \bar{2} + H = \bar{4} + H$$

$$\bar{1} + H = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} = \bar{3} + H = \bar{5} + H$$

A mellékosztályozás:  $\{\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}\}$ .

## Példa

Határozzuk meg a  $H \leq G$  részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

▶  $G = \mathbb{Z}_{12}^*$ ,  $H = [5] = \{\bar{1}, \bar{5}\}$ :

$$\bar{1} \cdot H = \{\bar{1}, \bar{5}\} = \bar{5} \cdot H$$

$$\bar{7} \cdot H = \{\bar{7}, \bar{11}\} = \bar{11} \cdot H$$

A mellékosztályozás:  $\{\{\bar{1}, \bar{5}\}, \{\bar{7}, \bar{11}\}\}$ .

▶  $G = \mathbb{Z}_{13}^*$ ,  $H = [5] = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\}$ :

$$\bar{1} \cdot H = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\} = \bar{5} \cdot H = \bar{8} \cdot H = \bar{12} \cdot H$$

$$\bar{2} \cdot H = \{\bar{2}, \bar{10}, \bar{3}, \bar{11}\} = \bar{10} \cdot H = \bar{3} \cdot H = \bar{11} \cdot H$$

$$\bar{4} \cdot H = \{\bar{4}, \bar{7}, \bar{6}, \bar{9}\} = \bar{7} \cdot H = \bar{6} \cdot H = \bar{9} \cdot H$$

A mellékosztályozás:  $\{\{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\}, \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{10}, \bar{11}\}, \{\bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}\}\}$ .



## Példa

Határozzuk meg a  $H = \{\text{id}, (23)\} \leq S_3$  részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- ▶ Baloldali mellékosztályok:

$$\text{id} \cdot H = \{\text{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$

$$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$$

$$(12) \cdot H = \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.$$

A baloldali mellékosztályozás:

$$\{\{\text{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}.$$

- ▶ Jobboldali mellékosztályok:

$$H \cdot \text{id} = \{\text{id}, (23)\} = H \cdot (23),$$

$$H \cdot (13) = \{(13), (132)\} = H \cdot (132)$$

$$H \cdot (12) = \{(12), (123)\} = H \cdot (123),$$

A jobboldali mellékosztályozás:

$$\{\{\text{id}, (23)\}, \{(13), (132)\}, \{(12), (123)\}\}.$$

## Példa

Határozzuk meg a  $V \leq S_4$  részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat, ahol  $V$  a **Klein-csoport**:

$$V = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

A baloldali és jobboldali mellékosztályok ebben az esetben egybeesnek:

$$\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$

$$\{(12), (34), (1324), (1423)\},$$

$$\{(13), (24), (1234), (1432)\},$$

$$\{(14), (23), (1243), (1342)\},$$

$$\{(123), (134), (142), (243)\},$$

$$\{(132), (143), (124), (234)\}.$$

HF utánaszámolni.

## Példa

Határozzuk meg a  $H = [t] = \{\text{id}, t\} \leq D_4$  részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- ▶ Baloldali mellékosztályok:

$$\text{id} \cdot H = \{\text{id}, t\} = t \cdot H,$$

$$f \cdot H = \{f, tf^3\} = tf^3 \cdot H$$

$$f^2 \cdot H = \{f^2, tf^2\} = tf^2 \cdot H$$

$$f^3 \cdot H = \{f^3, tf\} = tf \cdot H.$$

A baloldali mellékosztályozás:

$$\{\{\text{id}, t\}, \{f, tf^3\}, \{f^2, tf^2\}, \{f^3, tf\}\}.$$

- ▶ Jobboldali mellékosztályok:

$$H \cdot \text{id} = \{\text{id}, t\} = H \cdot t,$$

$$H \cdot f = \{f, tf\} = H \cdot tf$$

$$H \cdot f^2 = \{f^2, tf^2\} = H \cdot tf^2$$

$$H \cdot f^3 = \{f^3, tf^3\} = H \cdot tf^3.$$

A jobboldali mellékosztályozás:

$$\{\{\text{id}, t\}, \{f, tf\}, \{f^2, tf^2\}, \{f^3, tf^3\}\}.$$

## Példa

Határozzuk meg a  $H = [f] = \{\text{id}, f, f^2, f^3\} \leq D_4$  részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- ▶ Baloldali mellékosztályok:

$$\text{id} \cdot H = \{\text{id}, f, f^2, f^3\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$$

$$t \cdot H = \{t, tf, tf^2, tf^3\} = tf \cdot H = tf^2 \cdot H = tf^3 \cdot H.$$

A baloldali mellékosztályozás:  $\{\{\text{id}, f, f^2, f^3\}, \{t, tf, tf^2, tf^3\}\}$ .

- ▶ Jobboldali mellékosztályok:

$$H \cdot \text{id} = \{\text{id}, f, f^2, f^3\} = H \cdot f = H \cdot f^2 = H \cdot f^3,$$

$$H \cdot t = \{t, tf^3, tf^2, tf\} = H \cdot tf = H \cdot tf^2 = H \cdot tf^3.$$

A jobboldali mellékosztályozás:  $\{\{\text{id}, f, f^2, f^3\}, \{t, tf, tf^2, tf^3\}\}$ .

## Példa

Határozzuk meg az  $\mathbb{R}^+ \leq \mathbb{C}^*$  részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$$z \sim w \iff \frac{z}{w} \in \mathbb{R}^+ \iff z \text{ és } w \text{ argumentuma megegyezik.}$$

$z \in \mathbb{C}$  mellékosztálya:

$$z \cdot \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ \cdot z = \{w \in \mathbb{C}^* : \arg w = \arg z\}.$$

A mellékosztályok kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a  $[0, 2\pi)$  intervallum elemeinek.

A mellékosztályozás:  $\{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$ , ahol  $F_\alpha$  az az origóból kiinduló nyílt félegyenes, amely  $\alpha$  szöget zár be a valós tengely pozitív felével.

## Példa

Határozzuk meg a  $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$  részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$x \in \mathbb{R}$  mellékosztálya:

$$x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} + x = \{\dots, x - 2, x - 1, x, x + 1, x + 2, x + 3, \dots\}.$$

$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z} \iff x$  és  $y$  törtrésze megegyezik.

A mellékosztályok kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a  $[0, 1)$  intervallum elemeinek.

A mellékosztályozás:  $\{x + \mathbb{Z} : x \in [0, 1)\}$ .

## Példa

Határozzuk meg az  $SL_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$  részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- ▶ Baloldali mellékosztályok:

$$A \sim B \iff \det(A^{-1}B) = 1 \iff \det(A) = \det(B),$$

$$A \cdot SL_n(\mathbb{R}) = \{B \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \det(A)\}.$$

Tetszőleges  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  esetén legyen

$$D_\lambda = \{B \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \lambda\}.$$

A baloldali mellékosztályozás:  $\{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ .

- ▶ Jobboldali mellékosztályok:

$$A \sim B \iff \det(AB^{-1}) = 1 \iff \det(A) = \det(B).$$

Tehát a jobboldali mellékosztályozás megegyezik a baloldalival.

## Példa

Az  $\{1\} \leq G$  részcsoporthoz tartozó mellékosztályok egyeleműek:

$$a\{1\} = \{1\}a = \{a\} \text{ minden } a \in G \text{ esetén.}$$

A mellékosztályozás:  $\{\{a\} : a \in G\}$ .

## Példa

A  $G \leq G$  részcsoporthoz egyetlen mellékosztály tartozik:

$$aG = Ga = G \text{ minden } a \in G \text{ esetén.}$$

A mellékosztályozás:  $\{G\}$ .



## Definíció

A  $G$  véges csoport  $H$  részcsoportja szerinti baloldali (jobboldali) mellékosztályok számát  $H$  **indexének** nevezzük. Jelölése:  $[G : H]$ .

## Tétel (Lagrange tétele)

*Tetszőleges  $G$  véges csoport és  $H \leq G$  részcsoport esetén*

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

## Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.7. és 3.11. Tétel.

Bármely  $a \in G$  esetén

$$\lambda_a: H \rightarrow aH, x \mapsto ax$$

bijekció (miért?), tehát  $|aH| = |H|$ .

A  $H$  szerinti baloldali mellékosztályozás a  $G$  halmazt  $[G : H]$  darab  $|H|$ -elemű osztályra osztja, így  $|G| = |H| \cdot [G : H]$ . □

## Következmény

Véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.12. Következmény. □

## Következmény

Véges csoport bármely elemének rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.13. Következmény.

Csak azt kell észrevenni, hogy  $o(a) = |[a]|$ . □

## Következmény

Ha  $G$  egy  $n$ -elemű csoport, akkor minden  $a \in G$  elemre  $a^n = 1$ .

Biz.

Legyen  $|G| = n = o(a) \cdot \ell$  (itt  $\ell$  nem más, mint a  $[a]$  részcsoport indexe).

Ekkor  $a^n = a^{o(a) \cdot \ell} = (a^{o(a)})^\ell = 1^\ell = 1$ . □

## Következmény

Ha  $G$  egy  $n$ -elemű csoport, akkor minden  $a \in G$  elemre  $a^{-1} = a^{n-1}$ .

## Következmény

*Minden prímmrendű csoport ciklikus.*

**Biz.**

[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha  $|G| = p$  prímszám, akkor minden  $a \in G$  elemre  $o(a) \in \{1, p\}$ .

Ha  $a \neq 1$ , akkor  $o(a) = p$ , és így  $\langle a \rangle = G$ . □

A kis elemszámú csoportok (izomorfia erejéig) a következők:

1. egyelemű:  $\{1\}$ ;
2. kételemű:  $\mathbb{Z}_2$ ;
3. háromelemű:  $\mathbb{Z}_3$ ;
4. négyelemű:  $\mathbb{Z}_4, V$ ;
5. ötelemű:  $\mathbb{Z}_5$ ;
6. hatelemű:  $\mathbb{Z}_6; D_3 \cong S_3$ ;
7. hételemű:  $\mathbb{Z}_7$ .

## Példa

Határozzuk meg a  $\mathbb{Z}_{12}$  csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- ▶  $[1] = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\}$
- ▶  $[2] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$
- ▶  $[3] = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$
- ▶  $[4] = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$
- ▶  $[5] = \{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}, \bar{3}, \bar{8}, \bar{1}, \bar{6}, \bar{11}, \bar{4}, \bar{9}, \bar{2}, \bar{7}\}$
- ▶  $[6] = \{\bar{0}, \bar{6}\}$
- ▶  $[7] = \{\bar{0}, \bar{7}, \bar{2}, \bar{9}, \bar{4}, \bar{11}, \bar{6}, \bar{1}, \bar{8}, \bar{3}, \bar{10}, \bar{5}\}$
- ▶  $[8] = \{\bar{0}, \bar{8}, \bar{4}\}$
- ▶  $[9] = \{\bar{0}, \bar{9}, \bar{6}, \bar{3}\}$
- ▶  $[10] = \{\bar{0}, \bar{10}, \bar{8}, \bar{6}, \bar{4}, \bar{2}\}$
- ▶  $[11] = \{\bar{0}, \bar{11}, \bar{10}, \bar{9}, \bar{8}, \bar{7}, \bar{6}, \bar{5}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}\}$
- ▶  $[\bar{0}] = \{\bar{0}\}$

## Példa

Határozzuk meg a  $\mathbb{Z}_{12}$  csoport összes részcsoportját.

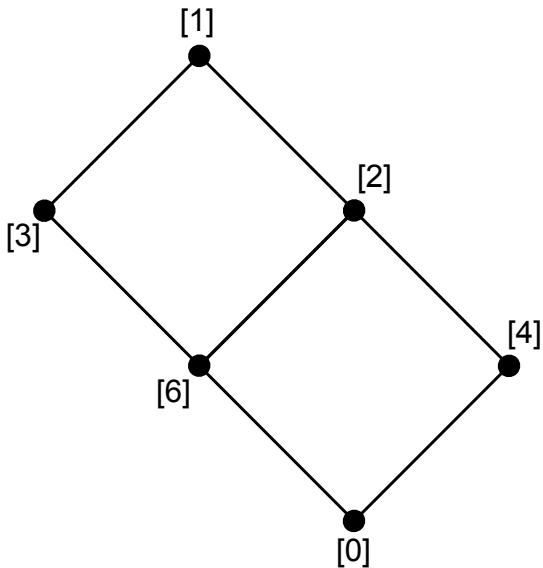
Minden részcsoport ciklikus:

- ▶  $[\bar{1}] = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\} = [\bar{5}] = [\bar{7}] = [\bar{11}]$
- ▶  $[\bar{2}] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\} = [\bar{10}]$
- ▶  $[\bar{3}] = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\} = [\bar{9}]$
- ▶  $[\bar{4}] = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} = [\bar{8}]$
- ▶  $[\bar{6}] = \{\bar{0}, \bar{6}\}$
- ▶  $[\bar{0}] = \{\bar{0}\}$

## Példa

Határozzuk meg a  $\mathbb{Z}_{12}$  csoport összes részcsoportját.

A részcsoportháló:



## Példa

Határozzuk meg a  $D_4$  csoport összes részcsoportját.

$$D_4 = \{\text{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\}$$

A ciklikus részcsoportok:

- ▶  $[\text{id}] = \{\text{id}\}$
- ▶  $[t] = \{\text{id}, t\}$
- ▶  $[tf] = \{\text{id}, tf\}$
- ▶  $[tf^2] = \{\text{id}, tf^2\}$
- ▶  $[tf^3] = \{\text{id}, tf^3\}$
- ▶  $[f] = \{\text{id}, f, f^2, f^3\} = [f^3]$
- ▶  $[f^2] = \{\text{id}, f^2\}$

## Példa

Határozzuk meg a  $D_4$  csoport összes részcsoportját.

$$D_4 = \{\text{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\}$$

A ciklikus részcsoportok:

- ▶  $[\text{id}] = \{\text{id}\}$
- ▶  $[t] = \{\text{id}, t\}$
- ▶  $[tf] = \{\text{id}, tf\}$
- ▶  $[tf^2] = \{\text{id}, tf^2\}$
- ▶  $[tf^3] = \{\text{id}, tf^3\}$
- ▶  $[f^2] = \{\text{id}, f^2\}$
- ▶  $[f] = \{\text{id}, f, f^2, f^3\} = [f^3]$

További részcsoportok:

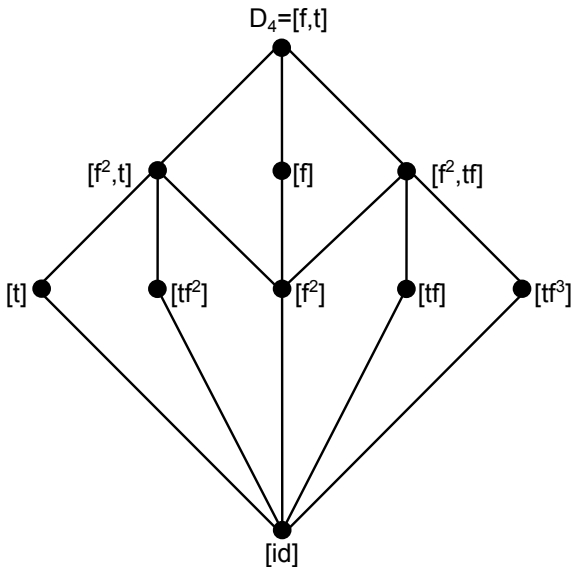
- ▶  $[f^2, t] = \{\text{id}, f^2, t, tf^2\} = [f^2, tf^2] = [t, tf^2] \cong V$
- ▶  $[f^2, tf] = \{\text{id}, f^2, tf, tf^3\} = [f^2, tf^3] = [tf, tf^3] \cong V$
- ▶  $[f, t] = D_4$



## Példa

Határozzuk meg a  $D_4$  csoport összes részcsoportját.

A részcsoportháló:



## Példa

Határozzuk meg a  $\mathbb{Z}_{21}^*$  csoport összes részcsoportját.

$$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{19}, \bar{20}\}$$

A ciklikus részcsoportok:

- ▶  $[\bar{1}] = \{\bar{1}\}$
- ▶  $[\bar{2}] = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{16}, \bar{11}\} = [\bar{11}]$
- ▶  $[\bar{4}] = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{16}\} = [\bar{16}]$
- ▶  $[\bar{5}] = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{4}, \bar{20}, \bar{16}, \bar{17}\} = [\bar{17}]$
- ▶  $[\bar{8}] = \{\bar{1}, \bar{8}\}$
- ▶  $[\bar{10}] = \{\bar{1}, \bar{10}, \bar{16}, \bar{13}, \bar{4}, \bar{19}\} = [\bar{19}]$
- ▶  $[\bar{13}] = \{\bar{1}, \bar{13}\}$
- ▶  $[\bar{20}] = \{\bar{1}, \bar{20}\}$

## Példa

Határozzuk meg a  $\mathbb{Z}_{21}^*$  csoport összes részcsoportját.

$$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{19}, \bar{20}\}$$

A ciklikus részcsoportok:

- ▶  $[\bar{1}] = \{\bar{1}\}$
- ▶  $[-\bar{1}] = \{\bar{1}, -\bar{1}\}$
- ▶  $[\bar{8}] = \{\bar{1}, \bar{8}\}$
- ▶  $[-\bar{8}] = \{\bar{1}, -\bar{8}\}$
- ▶  $[\bar{4}] = \{\bar{1}, \bar{4}, -\bar{5}\}$
- ▶  $[\bar{2}] = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, -\bar{5}, \bar{8}, -\bar{10}\}$
- ▶  $[-\bar{2}] = \{\bar{1}, -\bar{2}, \bar{4}, -\bar{5}, -\bar{8}, \bar{10}\}$
- ▶  $[-\bar{4}] = \{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{4}, -\bar{4}, \bar{5}, -\bar{5}\}$

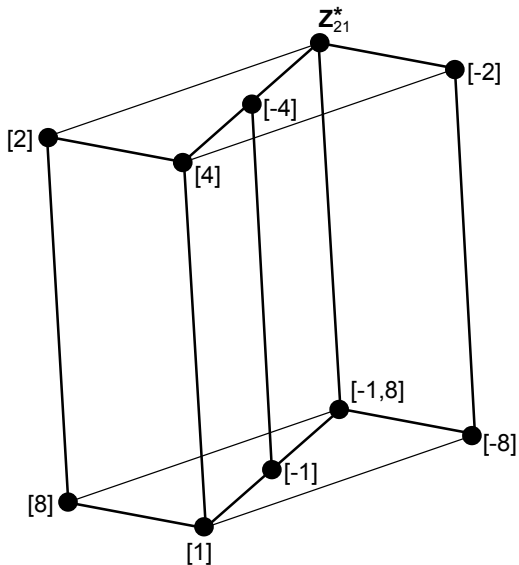
További részcsoportok:

- ▶  $[-\bar{1}, \bar{8}] = \{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{8}, -\bar{8}\} \cong V$
- ▶  $\mathbb{Z}_{21}^*$

## Példa

Határozzuk meg a  $\mathbb{Z}_{21}^*$  csoport összes részcsoporthját.

A részcsoportháló:



1. Mellékosztályok, Lagrange tétele
2. Normálosztó, faktorcsoport
3. Homomorfiatétel, izomorfiatételek
4. Permutációcsoportok
5. Direkt szorzat

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] XII/4 és [F] II/8,9 fejezetekben található.

## Tétel

Tetszőleges  $H \leq G$  részcsoportha az alábbiak ekvivalensek:

- (1)  $a$   $H$  szerinti baloldali mellékosztályozás megegyezik  $a$   $H$  szerinti jobboldali mellékosztályozással;
- (2)  $Hg = gH$  minden  $g \in G$  elemre;
- (3)  $g^{-1}Hg = H$  minden  $g \in G$  elemre;
- (4)  $g^{-1}Hg \subseteq H$  minden  $g \in G$  elemre.

## Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás. □

## Definíció

A fenti ekvivalens feltételeket kielégítő részcsoportokat **normáloszónak** nevezzük. Jelölés:  $H \triangleleft G$ .

## Példa

- ▶ Minden  $G$  csoportra  $\{1\} \triangleleft G$  és  $G \triangleleft G$ . Ha nincs más normálosztó, akkor azt mondjuk, hogy  $G$  **egyszerű** csoport.
- ▶ Abel-csoportban minden részcsoport normálosztó.
- ▶ Lásd a korábbi példákat.
- ▶ Minden 2 indexű részcsoport normálosztó.

## Tétel

Ha  $N \triangleleft G$ , akkor az  $N$  szerinti mellékosztályozás kompatibilis osztályozása  $G$ -nek (és így a  $(G; \cdot, 1, {}^{-1})$  algebrának is).

## Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(1) Tétel.

Igaz-e, hogy tetszőleges  $aN, bN$  mellékosztályokhoz létezik egy  $cN$  mellékosztály, amelyre  $aN \cdot bN \subseteq cN$ ? Igen, éspedig  $c = ab$  jó lesz:


$$aNbN = abNN \subseteq abN = cN.$$



## Definíció

Az  $N$  normálosztó szerinti mellékosztályozáshoz tartozó faktoralgebrát  $G/N$ -nel jelöljük, és **a  $G$  csoport  $N$  normálosztója szerinti faktorcsoportjának** nevezzük.

## Megjegyzés

Mivel  $NN = N$ , valójában nem csak  $aNbN \subseteq abN$ , hanem  $aNbN = abN$  is teljesül, így a faktorcsoportbeli szorzás megegyezik a komplexus-szorzással. (Grupoidokra általában ez nem igaz, lásd  .)

## Tétel

Ha  $\sim$  kongruenciája a  $G$  csoportnak, akkor  $N := \{a \in G : a \sim 1\} \triangleleft G$ , és  $a \sim$  kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az  $N$  normálosztó szerinti mellékosztályozás.

## Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- ▶  $N$  zárt a szorzásra:

$$a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$$

- ▶  $N$  tartalmazza az egységelemet:  $1 \sim 1 \implies 1 \in N$

- ▶  $N$  zárt az inverzképzésre:

$$a \in N \implies a \sim 1 \implies a^{-1} \sim 1^{-1} = 1 \implies a^{-1} \in N$$

- ▶  $N$  normálosztó: ha  $g \in G$  és  $n \in N$ , akkor

$$\left. \begin{array}{l} g^{-1} \sim g^{-1} \\ n \sim 1 \\ g \sim g \end{array} \right\} \implies g^{-1}ng \sim g^{-1}1g = g^{-1}g = 1 \implies g^{-1}ng \in N$$

- ▶ osztályozások megegyezése:

$$a \sim b \iff ab^{-1} \sim 1 \iff ab^{-1} \in N \iff aN = bN. \quad \square$$



## Példa

Határozzuk meg az  $N = \{\bar{0}, \bar{3}\} \triangleleft \mathbb{Z}_6$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\bar{0}, \bar{3}\}, \{\bar{1}, \bar{4}\}, \{\bar{2}, \bar{5}\}\}$$

$$\mathbb{Z}_6/N = \begin{array}{c|ccc} + & \{\bar{0}, \bar{3}\} & \{\bar{1}, \bar{4}\} & \{\bar{2}, \bar{5}\} \\ \hline \{\bar{0}, \bar{3}\} & \{\bar{0}, \bar{3}\} & \{\bar{1}, \bar{4}\} & \{\bar{2}, \bar{5}\} \\ \{\bar{1}, \bar{4}\} & \{\bar{1}, \bar{4}\} & \{\bar{2}, \bar{5}\} & \{\bar{0}, \bar{3}\} \\ \{\bar{2}, \bar{5}\} & \{\bar{2}, \bar{5}\} & \{\bar{0}, \bar{3}\} & \{\bar{1}, \bar{4}\} \end{array} \cong \begin{array}{c|ccc} + & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hline \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{0} & \hat{1} \end{array} = \mathbb{Z}_3$$

Izomorfizmus:  $\varphi: \mathbb{Z}_6/N \rightarrow \mathbb{Z}_3, \quad \{\bar{0}, \bar{3}\} \mapsto \hat{0}, \quad \{\bar{1}, \bar{4}\} \mapsto \hat{1}, \quad \{\bar{2}, \bar{5}\} \mapsto \hat{2}$

## Példa

Határozzuk meg az  $N = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \triangleleft \mathbb{Z}_6$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}\}$$

$$\mathbb{Z}_6/N = \begin{array}{c|cc} + & \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} & \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} \\ \hline \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} & \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} & \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} \\ \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} & \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} & \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \end{array} \cong \begin{array}{c|cc} + & \hat{0} & \hat{1} \\ \hline \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \end{array} = \mathbb{Z}_2$$

Izomorfizmus:  $\varphi: \mathbb{Z}_6/N \rightarrow \mathbb{Z}_2, \quad \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \mapsto \hat{0}, \quad \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} \mapsto \hat{1}$

## Példa

Határozzuk meg az  $N = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\} \triangleleft \mathbb{Z}_{13}^*$  részcsoporthoz tartozó faktorcsoporthot.

$$\mathbb{Z}_{13}^*/N = \{\{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\}, \{\bar{2}, \bar{10}, \bar{3}, \bar{11}\}, \{\bar{4}, \bar{7}, \bar{6}, \bar{9}\}\} = \{\bar{1} \cdot N, \bar{2} \cdot N, \bar{4} \cdot N\}$$

$$\mathbb{Z}_{13}^*/N = \begin{array}{c|ccc} \cdot & \bar{1} \cdot N & \bar{2} \cdot N & \bar{4} \cdot N \\ \hline \bar{1} \cdot N & \bar{1} \cdot N & \bar{2} \cdot N & \bar{4} \cdot N \\ \bar{2} \cdot N & \bar{2} \cdot N & \bar{4} \cdot N & \bar{1} \cdot N \\ \bar{4} \cdot N & \bar{4} \cdot N & \bar{1} \cdot N & \bar{2} \cdot N \end{array} \cong \begin{array}{c|ccc} + & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hline \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{0} & \hat{1} \end{array} = \mathbb{Z}_3$$

Izomorfizmus:  $\varphi: \mathbb{Z}_{13}^*/N \rightarrow \mathbb{Z}_3, \quad \bar{1} \cdot N \mapsto \hat{0}, \bar{2} \cdot N \mapsto \hat{1}, \bar{4} \cdot N \mapsto \hat{2}$

## Példa

Határozzuk meg az  $N = \{\bar{1}, \bar{5}\} \triangleleft \mathbb{Z}_{12}^*$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\bar{1}, \bar{5}\}, \{\bar{7}, \bar{11}\}\} = \{\bar{1} \cdot N, \bar{7} \cdot N\}$$

$$\mathbb{Z}_{12}^*/N = \begin{array}{c|cc} \cdot & \bar{1} \cdot N & \bar{7} \cdot N \\ \hline \bar{1} \cdot N & \bar{1} \cdot N & \bar{7} \cdot N \\ \bar{7} \cdot N & \bar{7} \cdot N & \bar{1} \cdot N \end{array} \cong \begin{array}{c|cc} + & \hat{0} & \hat{1} \\ \hline \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \end{array} = \mathbb{Z}_2$$

Izomorfizmus:  $\varphi: \mathbb{Z}_{12}^*/N \rightarrow \mathbb{Z}_2, \quad \bar{1} \cdot N \mapsto \hat{0}, \quad \bar{7} \cdot N \mapsto \hat{1}$

## Példa

Határozzuk meg a  $V \triangleleft S_4$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$S_4/V \cong ?$$

$$|S_4/V| = 6 \implies S_4/V \cong \mathbb{Z}_6 \text{ vagy } S_4/V \cong S_3$$

A két esetet megkülönbözteti a kommutativitás.

$$(12)V \cdot (13)V = (123)V, \quad (13)V \cdot (12)V = (132)V \text{ és}$$

$$(123)(132)^{-1} = (132) \notin V \implies (123)V \neq (132)V,$$

tehát  $S_4/V$  nem kommutatív, így  $S_4/V \cong S_3$ .

(Később látunk majd egy „tanulságosabb” megoldást is.)

## Példa

Határozzuk meg az  $N = [f] \triangleleft D_4$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$D_4/N = \{\{\text{forgatások}\}, \{\text{tükrözések}\}\}$$

$$D_4/N = \begin{array}{c|cc} \cdot & \{\text{forg.}\} & \{\text{tükr.}\} \\ \hline \{\text{forg.}\} & \{\text{forg.}\} & \{\text{tükr.}\} \\ \{\text{tükr.}\} & \{\text{tükr.}\} & \{\text{forg.}\} \end{array} \cong \begin{array}{c|cc} \cdot & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \cong \mathbb{Z}_2$$

Izomorfizmus:  $\varphi: D_4/N \rightarrow \{\pm 1\}$ ,  $\{\text{forg.}\} \mapsto 1$ ,  $\{\text{tükr.}\} \mapsto -1$

## Példa

Határozzuk meg az  $\mathbb{R}^+ \triangleleft \mathbb{C}^*$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel  $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$ , ezért  $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi); \oplus)$ ,  
ahol  $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \pmod{2\pi}$ .

Izomorfizmus:  $\varphi: ([0, 2\pi); \oplus) \rightarrow (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)$ ,  $\alpha \mapsto F_\alpha$

- ▶ bijektivitás: világos
- ▶ homomorfia:  $(\alpha \oplus \beta)\varphi = F_{\alpha \oplus \beta} = F_{\alpha+\beta} = F_\alpha \cdot F_\beta = \alpha\varphi \cdot \beta\varphi$

Másik megoldás: legyen  $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ;  
akkor  $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong (T; \cdot)$ .

Izomorfizmus:  $\psi: (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \rightarrow (T; \cdot)$ ,  $F_\alpha \mapsto \text{cis}(\alpha)$

- ▶ bijektivitás: világos
- ▶ homomorfia:  
 $(F_\alpha \cdot F_\beta)\psi = F_{\alpha+\beta}\psi = \text{cis}(\alpha + \beta) = \text{cis}(\alpha) \cdot \text{cis}(\beta) = F_\alpha\psi \cdot F_\beta\psi$

## Példa

Határozzuk meg a  $\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} : x \in [0, 1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong ([0, 1); \oplus)$ , ahol  $x \oplus y = x + y \bmod 1 = x + y$  törtrésze.

Másik megoldás:  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong (T; \cdot)$ .

Izomorfizmus:  $\varphi: (\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \rightarrow (T; \cdot)$ ,  $x + \mathbb{Z} \mapsto \text{cis}(2\pi x)$

- ▶ jóldefiniáltság és bijektivitás:

$$\begin{aligned}(x + \mathbb{Z}) \varphi = (y + \mathbb{Z}) \varphi &\iff \text{cis}(2\pi x) = \text{cis}(2\pi y) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : 2\pi y = 2\pi x + 2\pi k \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = x + k \\ &\iff x + \mathbb{Z} = y + \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- ▶ homomorfia:

$$\begin{aligned}((x + \mathbb{Z}) + (y + \mathbb{Z})) \varphi &= (x + y + \mathbb{Z}) \varphi \\ &= \text{cis}(2\pi(x + y)) \\ &= \text{cis}(2\pi x + 2\pi y) \\ &= \text{cis}(2\pi x) \cdot \text{cis}(2\pi y) \\ &= (x + \mathbb{Z}) \varphi \cdot (y + \mathbb{Z}) \varphi\end{aligned}$$



## Példa

Határozzuk meg az  $SL_n(\mathbb{R}) \triangleleft GL_n(\mathbb{R})$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R}) = \{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cong \mathbb{R}^*$$

Izomorfizmus:  $\varphi: GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $D_\lambda \mapsto \lambda$

- ▶ bijektivitás: világos
- ▶ homomorfia:  $(D_\lambda \cdot D_\mu) \varphi = D_{\lambda \cdot \mu} \varphi = \lambda \cdot \mu = D_\lambda \varphi \cdot D_\mu \varphi$

## Példa

Határozzuk meg az  $\{1\} \triangleleft G$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/\{1\} = \{\{a\} : a \in G\} \cong G$$

Izomorfizmus:  $\varphi: G/\{1\} \rightarrow G, \quad \{a\} \mapsto a$

- ▶ bijektivitás: világos
- ▶ homomorfia:  $(\{a\} \cdot \{b\})\varphi = \{a \cdot b\}\varphi = a \cdot b = \{a\}\varphi \cdot \{b\}\varphi$

## Példa

Határozzuk meg a  $G \triangleleft G$  normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/G = \{G\} \cong \{1\}$$

## Definíció

Az  $a \in G$  elem  $g$ -vel való **konjugáltján** a  $g^{-1}ag$  elemet értjük. Az  $\alpha_g: G \rightarrow G, x \mapsto g^{-1}xg$  leképezést  $g$ -vel való **konjugálásnak** nevezzük. Azt mondjuk, hogy  $a$  és  $b$  **konjugáltak**, ha létezik olyan  $g \in G$  elem, amelyre  $b = g^{-1}ag$ .

## Állítás

Minden  $g \in G$ -re  $\alpha_g$  automorfizmusa  $G$ -nek; ezeket nevezzük **belső automorfizmusoknak**.

## Biz.

[F] II/8. fejezet.



## Állítás

A konjugáltsági reláció ekvivalenciareláció; a megfelelő ekvivalenciaosztályokat **konjugáltosztályoknak** nevezzük.

## Biz.

HF



## Állítás

Egy  $N \subseteq G$  halmaz pontosan akkor normálosztó, ha részalgebrája a  $(G; \cdot, 1, ^{-1}, \alpha_g (g \in G))$  algebrának. A részalgebrákról tanultakat erre az algebrára alkalmazva kapjuk az alábbiakat.

- ▶ Normálosztók metszete normálosztó.
- ▶ Egy  $B \subseteq G$  halmaz által **generált normálosztón** az összes  $B$ -t tartalmazó normálosztók metszetét értjük.
- ▶ A  $B$  halmaz által generált normálosztó a legszűkebb  $B$ -t tartalmazó normálosztó. Ez mindazokból az elemekből áll, amelyek megkaphatók  $B$  elemeiből szorzás, inverzképzés és konjugálások véges számú alkalmazásával.

## Biz.

HF



## Példa

- ▶ Abel-csoportban minden elem csak saját magával konjugált (a konjugáltsági reláció az egyenlőség reláció).
- ▶ Bármely csoportban az egységelem csak saját magához konjugált.
- ▶ Két mátrix akkor és csak akkor konjugált a  $GL_n(\mathbb{R})$  csoportban, ha az  $\mathbb{R}^n$  vektortér ugyanazon lineáris transzformációját adják meg (különböző bázisokban).

## Állítás

Két  $S_n$ -beli permutáció akkor és csak akkor konjugált, ha ugyanaz a **ciklusszerkezetük** (azaz minden  $\ell$ -re ugyanannyi  $\ell$  hosszúságú ciklust tartalmaznak).

## Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.16. Állítás.

Legyen  $\pi = (a_1 a_2 \dots a_k)(b_1 b_2 \dots b_l) \dots \in S_n$  és  $\sigma \in S_n$ . Állítjuk, hogy ekkor

$$\sigma^{-1}\pi\sigma \stackrel{?}{=} (a_1\sigma a_2\sigma \dots a_k\sigma)(b_1\sigma b_2\sigma \dots b_l\sigma) \dots$$

Szorozzunk balról  $\sigma$ -val (ez ekvivalens átalakítás):

$$\pi\sigma \stackrel{?}{=} \sigma(a_1\sigma a_2\sigma \dots a_k\sigma)(b_1\sigma b_2\sigma \dots b_l\sigma) \dots$$

Egy tetszőleges  $a_i$  elem képe a baloldali és a jobboldali permutáció mellett egyaránt  $a_{i\oplus 1}\sigma$ . (HF)



## Példa

Határozzuk meg a  $H = \{\text{id}, (23)\} \leq S_3$  részcsoport által generált  $N$  normálosztót és az  $S_3/N$  faktorcsoportot.

A konjugáltak:  $\text{id}, (23), (12), (13)$ .

A konjugáltak által generált részcsoport:  $N = [(12), (13), (23)] = S_3$ .

A faktorcsoport:  $S_3/S_3 = \{S_3\} \cong \{1\}$ .

## Példa

Határozzuk meg az  $S_4$  csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok:

- ▶  $\{\text{id}\}$  (1 db)
- ▶  $(\bullet \bullet)$  alakú permutációk (6 db)
- ▶  $(\bullet \bullet \bullet)$  alakú permutációk (8 db)
- ▶  $(\bullet \bullet \bullet \bullet)$  alakú permutációk (6 db)
- ▶  $(\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$  alakú permutációk (3 db)

Ha  $N \triangleleft S_4$ , akkor egyrészt  $|N|$  a fenti számok közül néhánynak az összege (az 1-nek mindenképpen szerepelnie kell az összegben), másrészt  $|N|$  osztója 24-nek. A következő lehetőségek vannak:

- ▶  $|N| = 1, \quad N = \{\text{id}\};$
- ▶  $|N| = 1 + 3 = 4, \quad N = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = V;$
- ▶  $|N| = 1 + 3 + 8 = 12, \quad N = \{\text{id}, (12)(34), \dots, (123), \dots\} = A_4;$
- ▶  $|N| = 24, \quad N = S_4.$

Mind a négy esetben valóban normálosztót kapunk.  
(Ez nem automatikus, ellenőrizni kell!)

## Példa

Határozzuk meg a  $H = \{\text{id}, t\} \leq D_4$  részcsoport által generált  $N$  normálosztót és a  $D_4/N$  faktorcsoportot.

A konjugáltak:

$$\begin{array}{lll} \text{id}^{-1} \cdot t \cdot \text{id} & = t & t^{-1} \cdot t \cdot t & = t \\ f^{-1} \cdot t \cdot f & = tf^2 & (tf)^{-1} \cdot t \cdot tf & = tf^2 \\ f^{-2} \cdot t \cdot f^2 & = t & (tf^2)^{-1} \cdot t \cdot tf^2 & = t \\ f^{-3} \cdot t \cdot f^3 & = tf^2 & (tf^3)^{-1} \cdot t \cdot tf^3 & = tf^2 \end{array}$$

A konjugáltak által generált részcsoport:

$$N = [t, tf^2] = \{\text{id}, f^2, t, tf^2\} \cong V.$$

A faktorcsoport:  $D_4/N = \{\{\text{id}, f^2, t, tf^2\}, \{f, f^3, tf, tf^3\}\} \cong \mathbb{Z}_2$ .



## Példa

Határozzuk meg a  $D_4$  csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok:  $\{\text{id}\}$ ,  $\{f^2\}$ ,  $\{f, f^3\}$ ,  $\{t, tf^2\}$ ,  $\{tf, tf^3\}$ .

Ha  $N \triangleleft D_4$ , akkor  $N$  a fenti halmazok közül néhánynak az uniója ( $\{\text{id}\}$  mindenképpen szerepel), másrészt  $|N|$  osztója 8-nak.

A következő lehetőségek vannak:

- ▶  $|N| = 1$ ,  $N = \{\text{id}\}$ ;
- ▶  $|N| = 1 + 1 = 2$ ,  $N = \{\text{id}, f^2\} \cong \mathbb{Z}_2$ ;
- ▶  $|N| = 1 + 1 + 2 = 4$ ,  $N = \{\text{id}, f^2, f, f^3\} \cong \mathbb{Z}_4$ ;
- ▶  $|N| = 1 + 1 + 2 = 4$ ,  $N = \{\text{id}, f^2, t, tf^2\} \cong V$ ;
- ▶  $|N| = 1 + 1 + 2 = 4$ ,  $N = \{\text{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong V$ ;
- ▶  $|N| = 8$ ,  $N = D_4$ .

Mind a hat esetben valóban normálosztót kapunk.  
(Ez nem automatikus, ellenőrizni kell!)

Rajzoljuk fel a normálosztóhálót!

1. Mellékosztályok, Lagrange tétele
2. Normálosztó, faktorcsoport
3. Homomorfiatétel, izomorfiatételek
4. Permutációcsoportok
5. Direkt szorzat

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] XII/4 és [F] II/9,10 fejezetekben található.

Legyen  $\varphi: G \rightarrow H$  csoport-homomorfizmus. Általános algebrában  $\varphi$  magját így definiáltuk:

$$\ker \varphi = \{(a, b) : a\varphi = b\varphi\} \subseteq G \times G.$$

Ez egy kongruenciája a  $G$  csoportnak, ezért az egységelem osztálya egy  $N$  normálosztót alkot  $G$ -ben. Ez a normálosztó teljesen meghatározza a  $\ker \varphi$  kongruenciát (ugyanis  $(a, b) \in \ker \varphi \iff aN = bN$ ); csoportelméletben magon ezt a normálosztót értjük.

## Definíció

A  $\varphi: G \rightarrow H$  csoport-homomorfizmus **magja** :

$$\ker \varphi := \{g \in G : g\varphi = 1\}.$$

Az általános algebrai homomorfiatétel speciális eseteként kapjuk:

## Tétel (Csoportelméleti homomorfiatétel)

Ha  $\varphi: G \rightarrow H$  csoport-homomorfizmus, akkor  $\ker \varphi \triangleleft G$  és

$$G / \ker \varphi \cong G\varphi \leq H.$$

**Biz.**

[Sz] XII. fejezet, 4.11. Tétel.



## Példa

Ellenőrizzük, hogy  $\varphi: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_3, \bar{k} \mapsto \hat{k}$  homomorfizmus.

Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

▶  $\varphi$  jóldefiniált:  $k_1 \equiv k_2 \pmod{6} \implies k_1 \equiv k_2 \pmod{3}$

▶  $\varphi$  homomorfizmus:

$$(\overline{k_1 + k_2}) \varphi = \overline{k_1 + k_2} \varphi = \widehat{k_1 + k_2} = \hat{k}_1 + \hat{k}_2 = \overline{k_1} \varphi + \overline{k_2} \varphi$$

▶ mag:  $\ker \varphi = \{\bar{k} \in \mathbb{Z}_6: \hat{k} = \hat{0}\} = \{\bar{k} \in \mathbb{Z}_6: 3 \mid k\} = \{\bar{0}, \bar{3}\} \triangleleft \mathbb{Z}_6$

▶ értékkészlet:  $\mathbb{Z}_6 \varphi = \{\hat{k}: \bar{k} \in \mathbb{Z}_6\} = \mathbb{Z}_3$

▶ izomorfizmus:

$$\psi: \mathbb{Z}_6 / \{\bar{0}, \bar{3}\} \rightarrow \mathbb{Z}_3, \quad \{\bar{0}, \bar{3}\} \mapsto \hat{0}, \quad \{\bar{1}, \bar{4}\} \mapsto \hat{1}, \quad \{\bar{2}, \bar{5}\} \mapsto \hat{2}$$

## Példa

Ellenőrizzük, hogy  $\varphi: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_{10}, \bar{k} \mapsto 5\hat{k}$  homomorfizmus.

Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

▶  $\varphi$  jóldefiniált:  $k_1 \equiv k_2 \pmod{6} \implies 5k_1 \equiv 5k_2 \pmod{10}$

▶  $\varphi$  homomorfizmus:

$$(\overline{k_1 + k_2}) \varphi = \overline{k_1 + k_2} \varphi = 5\widehat{k_1 + k_2} = 5\hat{k}_1 + 5\hat{k}_2 = \overline{k_1} \varphi + \overline{k_2} \varphi$$

▶ mag:

$$\ker \varphi = \{\bar{k} \in \mathbb{Z}_6: 5\hat{k} = \hat{0}\} = \{\bar{k} \in \mathbb{Z}_6: 10 \mid 5k\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \triangleleft \mathbb{Z}_6$$

▶ értékkészlet:  $\mathbb{Z}_6 \varphi = \{5\hat{k}: \bar{k} \in \mathbb{Z}_6\} = \{\hat{0}, \hat{5}\} \leq \mathbb{Z}_{10}$

▶ izomorfizmus:

$$\psi: \mathbb{Z}_6 / \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \rightarrow \mathbb{Z}_{10}, \quad \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \mapsto \hat{0}, \quad \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\} \mapsto \hat{5}$$

## Példa

Ellenőrizzük, hogy  $\varphi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto \frac{z}{|z|}$  homomorfizmus.

Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- ▶  $\varphi$  homomorfizmus:

$$(z \cdot w)\varphi = \frac{z \cdot w}{|z \cdot w|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|} = z\varphi \cdot w\varphi$$

- ▶ mag:  $\ker \varphi = \left\{ z \in \mathbb{C}^* : \frac{z}{|z|} = 1 \right\} = \{z \in \mathbb{C}^* : z = |z|\} = \mathbb{R}^+ \triangleleft \mathbb{C}^*$

- ▶ értékkészlet:  $\mathbb{C}^*\varphi = \left\{ \frac{z}{|z|} : z \in \mathbb{C}^* \right\} = T \leq \mathbb{C}^*$

- ▶ izomorfizmus:  $\psi: \mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ \rightarrow T$ ,  $F_\alpha \mapsto \text{cis}(\alpha)$

## Példa

Ellenőrizzük, hogy  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $x \mapsto \text{cis}(2\pi x)$  homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- ▶  $\varphi$  homomorfizmus:

$$(x + y)\varphi = \text{cis}(2\pi(x + y)) = \text{cis}(2\pi x) \cdot \text{cis}(2\pi y) = x\varphi \cdot y\varphi$$

- ▶ mag:  $\ker \varphi = \{x \in \mathbb{R} : \text{cis}(2\pi x) = 1\} = \mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$
- ▶ értékkészlet:  $\mathbb{R}\varphi = \{\text{cis}(2\pi x) : x \in \mathbb{R}\} = T \leq \mathbb{C}^*$
- ▶ izomorfizmus:  $\psi: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow T$ ,  $x + \mathbb{Z} \mapsto \text{cis}(2\pi x)$

## Példa

Ellenőrizzük, hogy  $\varphi: \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $A \mapsto \det(A)$  homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- ▶  $\varphi$  homomorfizmus:

$$(A \cdot B) \varphi = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = A\varphi \cdot B\varphi$$

- ▶ mag:  $\ker \varphi = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\} = \text{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \text{GL}_n(\mathbb{R})$
- ▶ értékkészlet:  $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \varphi = \{\det(A) : A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\} = \mathbb{R}^*$
- ▶ izomorfizmus:  $\psi: \text{GL}_n(\mathbb{R}) / \text{SL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $D_\lambda \mapsto \lambda$



## Példa

Ellenőrizzük, hogy  $\varphi: G \rightarrow H, g \mapsto 1$  homomorfizmus (triviális homomorfizmus).

Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- ▶  $\varphi$  homomorfizmus:  $(g_1 \cdot g_2)\varphi = 1 = 1 \cdot 1 = g_1\varphi \cdot g_2\varphi$
- ▶ mag:  $\ker \varphi = \{g \in G: g\varphi = 1\} = G \triangleleft G$
- ▶ értékkészlet:  $G\varphi = \{g\varphi: g \in G\} = \{1\} \leq H$
- ▶ izomorfizmus:  $\psi: G/G \rightarrow \{1\}, \quad G \mapsto 1$

## Példa

Létezik-e **injektív**  $\varphi: \mathbb{Z}_7 \rightarrow S_5$  homomorfizmus?

Ha létezik, akkor  $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \leq S_5$ . Ez lehetetlen, mert  $7 \nmid 120$  (Lagrange).

## Példa

Létezik-e **injektív**  $\varphi: \mathbb{Z}_6 \rightarrow S_5$  homomorfizmus?

Ha létezik, akkor  $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_6\varphi \leq S_5$ . Ekkor  $\mathbb{Z}_6\varphi = [\pi]$ , ahol

$\pi \in S_5$  hatodrendű permutáció. Ilyen létezik, például  $\pi = (123)(45)$ ,

és ekkor  $\varphi: \mathbb{Z}_6 \rightarrow S_5$ ,  $\bar{k} \mapsto \pi^k$  valóban injektív homomorfizmus:

- ▶  $\varphi$  jóldefiniált és injektív:

$$\overline{k_1}\varphi = \overline{k_2}\varphi \iff \pi^{k_1} = \pi^{k_2} \iff k_1 \equiv k_2 \pmod{6} \iff \overline{k_1} = \overline{k_2}$$

- ▶  $\varphi$  homomorfizmus:

$$(\overline{k_1} + \overline{k_2})\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = \pi^{k_1+k_2} = \pi^{k_1} \cdot \pi^{k_2} = \overline{k_1}\varphi \cdot \overline{k_2}\varphi$$

## Példa

Létezik-e **szürjektív**  $\varphi: \mathbb{Z}_{24} \rightarrow S_3$  homomorfizmus?

Ha létezik, akkor  $\mathbb{Z}_{24}/\ker \varphi \cong S_3$ . Ez lehetetlen, mert  $\mathbb{Z}_{24}$  Abel-csoport, és így minden faktorcsoportja is az.

## Példa

Létezik-e **szürjektív**  $\varphi: D_4 \rightarrow V$  homomorfizmus?

Ha létezik, akkor  $D_4/\ker \varphi \cong V$ . Ekkor  $\ker \varphi$  kételemű normálosztó  $D_4$ -ben. Ilyen csak egy van:  $\{\text{id}, f^2\}$ , és valóban,  $D_4/\{\text{id}, f^2\} \cong V$  például az alábbi  $\psi$  izomorfizmus mellett:

$$\begin{aligned} \psi: D_4/\{\text{id}, f^2\} \rightarrow V, \quad & \{\text{id}, f^2\} \mapsto \text{id}, & \{f, f^3\} \mapsto (12)(34), \\ & \{t, tf^2\} \mapsto (13)(24), & \{tf, tf^3\} \mapsto (14)(23). \end{aligned}$$

Ebből kapjuk a kívánt  $\varphi: D_4 \rightarrow V$  homomorfizmust:

$$\begin{aligned} \text{id} \varphi = \text{id}, \quad f \varphi = (12)(34), \quad t \varphi = (13)(24), \quad tf \varphi = (14)(23), \\ f^2 \varphi = \text{id}, \quad f^3 \varphi = (12)(34), \quad tf^2 \varphi = (13)(24), \quad tf^3 \varphi = (14)(23). \end{aligned}$$

## Példa

Határozzuk meg az összes  $\varphi: D_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  homomorfizmust.

Mivel  $D_4/\ker \varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$ , a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust  $D_4$  faktorcsoportjai és  $\mathbb{Z}_4$  részcsoportjai között.

$D_4$  faktorcsoportjai:

---

(1)  $D_4/\{\text{id}\} \cong D_4$

(2)  $D_4/\{\text{id}, f^2\} \cong V$

(3)  $D_4/\{\text{id}, f, f^2, f^3\} \cong \mathbb{Z}_2$

(4)  $D_4/\{\text{id}, f^2, t, tf^2\} \cong \mathbb{Z}_2$

(5)  $D_4/\{\text{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong \mathbb{Z}_2$

(6)  $D_4/D_4 \cong \{1\}$

$\mathbb{Z}_4$  részcsoportjai:

---

(a)  $\mathbb{Z}_4$

(b)  $\{\bar{0}, \bar{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$

(c)  $\{\bar{0}\} \cong \{1\}$

---

(3)  $\rightarrow$  (b):  $\{\text{id}, f, f^2, f^3\} \mapsto \bar{0}, \quad \{t, tf, tf^2, tf^3\} \mapsto \bar{2}$

$$\text{id} \varphi = \bar{0} \quad f \varphi = \bar{0} \quad f^2 \varphi = \bar{0} \quad f^3 \varphi = \bar{0}$$

$$t \varphi = \bar{2} \quad tf \varphi = \bar{2} \quad tf^2 \varphi = \bar{2} \quad tf^3 \varphi = \bar{2}$$

## Példa

Határozzuk meg az összes  $\varphi: D_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  homomorfizmust.

Mivel  $D_4 / \ker \varphi \cong D_4 \varphi \leq \mathbb{Z}_4$ , a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust  $D_4$  faktorcsoportjai és  $\mathbb{Z}_4$  részcsoportjai között.

$D_4$  faktorcsoportjai:

---

(1)  $D_4 / \{\text{id}\} \cong D_4$

(2)  $D_4 / \{\text{id}, f^2\} \cong V$

(3)  $D_4 / \{\text{id}, f, f^2, f^3\} \cong \mathbb{Z}_2$

(4)  $D_4 / \{\text{id}, f^2, t, tf^2\} \cong \mathbb{Z}_2$

(5)  $D_4 / \{\text{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong \mathbb{Z}_2$

(6)  $D_4 / D_4 \cong \{1\}$

$\mathbb{Z}_4$  részcsoportjai:

---

(a)  $\mathbb{Z}_4$

(b)  $\{\bar{0}, \bar{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$

(c)  $\{\bar{0}\} \cong \{1\}$

---

(4)  $\rightarrow$  (b):  $\{\text{id}, f^2, t, tf^2\} \mapsto \bar{0}, \quad \{f, f^3, tf, tf^3\} \mapsto \bar{2}$

$$\text{id} \varphi = \bar{0} \quad f \varphi = \bar{2} \quad f^2 \varphi = \bar{0} \quad f^3 \varphi = \bar{2}$$

$$t \varphi = \bar{0} \quad tf \varphi = \bar{2} \quad tf^2 \varphi = \bar{0} \quad tf^3 \varphi = \bar{2}$$

## Példa

Határozzuk meg az összes  $\varphi: D_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  homomorfizmust.

Mivel  $D_4 / \ker \varphi \cong D_4 \varphi \leq \mathbb{Z}_4$ , a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust  $D_4$  faktorcsoportjai és  $\mathbb{Z}_4$  részcsoportjai között.

$D_4$  faktorcsoportjai:

---

(1)  $D_4 / \{\text{id}\} \cong D_4$

(2)  $D_4 / \{\text{id}, f^2\} \cong V$

(3)  $D_4 / \{\text{id}, f, f^2, f^3\} \cong \mathbb{Z}_2$

(4)  $D_4 / \{\text{id}, f^2, t, tf^2\} \cong \mathbb{Z}_2$

(5)  $D_4 / \{\text{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong \mathbb{Z}_2$

(6)  $D_4 / D_4 \cong \{1\}$

$\mathbb{Z}_4$  részcsoportjai:

---

(a)  $\mathbb{Z}_4$

(b)  $\{\bar{0}, \bar{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$

(c)  $\{\bar{0}\} \cong \{1\}$

---

(5)  $\rightarrow$  (b):  $\{\text{id}, f^2, tf, tf^3\} \mapsto \bar{0}, \quad \{f, f^3, t, tf^2\} \mapsto \bar{2}$

$$\text{id} \varphi = \bar{0} \quad f \varphi = \bar{2} \quad f^2 \varphi = \bar{0} \quad f^3 \varphi = \bar{2}$$

$$t \varphi = \bar{2} \quad tf \varphi = \bar{0} \quad tf^2 \varphi = \bar{2} \quad tf^3 \varphi = \bar{0}$$

## Példa

Határozzuk meg az összes  $\varphi: D_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  homomorfizmust.

Mivel  $D_4 / \ker \varphi \cong D_4 \varphi \leq \mathbb{Z}_4$ , a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust  $D_4$  faktorcsoportjai és  $\mathbb{Z}_4$  részcsoportjai között.

$D_4$  faktorcsoportjai:

---

(1)  $D_4 / \{\text{id}\} \cong D_4$

(2)  $D_4 / \{\text{id}, f^2\} \cong V$

(3)  $D_4 / \{\text{id}, f, f^2, f^3\} \cong \mathbb{Z}_2$

(4)  $D_4 / \{\text{id}, f^2, t, tf^2\} \cong \mathbb{Z}_2$

(5)  $D_4 / \{\text{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong \mathbb{Z}_2$

(6)  $D_4 / D_4 \cong \{1\}$

$\mathbb{Z}_4$  részcsoportjai:

---

(a)  $\mathbb{Z}_4$

(b)  $\{\bar{0}, \bar{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$

(c)  $\{\bar{0}\} \cong \{1\}$

---

(6)  $\rightarrow$  (c):  $\{\text{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\} \mapsto \bar{0}$

$$\text{id } \varphi = \bar{0} \quad f \varphi = \bar{0} \quad f^2 \varphi = \bar{0} \quad f^3 \varphi = \bar{0}$$

$$t \varphi = \bar{0} \quad tf \varphi = \bar{0} \quad tf^2 \varphi = \bar{0} \quad tf^3 \varphi = \bar{0}$$

## Példa

Határozzuk meg az összes  $\varphi: \mathbb{Z}_{15} \rightarrow \mathbb{Z}_6$  homomorfizmust.

Mivel  $\mathbb{Z}_{15}/\ker \varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$ , a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust  $\mathbb{Z}_{15}$  faktorcsoportjai és  $\mathbb{Z}_6$  részcsoportjai között.

$\mathbb{Z}_{15}$  faktorcsoportjai:

---

(1)  $\mathbb{Z}_{15}/\{\bar{0}\} \cong \mathbb{Z}_{15}$

(2)  $\mathbb{Z}_{15}/\{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}\} \cong \mathbb{Z}_5$

(3)  $\mathbb{Z}_{15}/\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\} \cong \mathbb{Z}_3$

(4)  $\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$

$\mathbb{Z}_6$  részcsoportjai:

---

(a)  $\mathbb{Z}_6$

(b)  $\{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$

(c)  $\{\hat{0}, \hat{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$

(d)  $\{\hat{0}\} \cong \{1\}$

---

(3)  $\rightarrow$  (b):  $\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\} \mapsto \hat{0}$ ,  $\{\bar{1}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{10}, \bar{13}\} \mapsto \hat{2}$ ,  $\{\bar{2}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{11}, \bar{14}\} \mapsto \hat{4}$

$$\bar{0}\varphi = \hat{0} \quad \bar{3}\varphi = \hat{0} \quad \bar{6}\varphi = \hat{0} \quad \bar{9}\varphi = \hat{0} \quad \bar{12}\varphi = \hat{0}$$

$$\bar{1}\varphi = \hat{2} \quad \bar{4}\varphi = \hat{2} \quad \bar{7}\varphi = \hat{2} \quad \bar{10}\varphi = \hat{2} \quad \bar{13}\varphi = \hat{2}$$

$$\bar{2}\varphi = \hat{4} \quad \bar{5}\varphi = \hat{4} \quad \bar{8}\varphi = \hat{4} \quad \bar{11}\varphi = \hat{4} \quad \bar{14}\varphi = \hat{4}$$



## Példa

Határozzuk meg az összes  $\varphi: \mathbb{Z}_{15} \rightarrow \mathbb{Z}_6$  homomorfizmust.

Mivel  $\mathbb{Z}_{15}/\ker \varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$ , a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust  $\mathbb{Z}_{15}$  faktorcsoportjai és  $\mathbb{Z}_6$  részcsoportjai között.

$\mathbb{Z}_{15}$  faktorcsoportjai:

---

(1)  $\mathbb{Z}_{15}/\{\bar{0}\} \cong \mathbb{Z}_{15}$

(2)  $\mathbb{Z}_{15}/\{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}\} \cong \mathbb{Z}_5$

(3)  $\mathbb{Z}_{15}/\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\} \cong \mathbb{Z}_3$

(4)  $\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$

$\mathbb{Z}_6$  részcsoportjai:

---

(a)  $\mathbb{Z}_6$

(b)  $\{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$

(c)  $\{\hat{0}, \hat{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$

(d)  $\{\hat{0}\} \cong \{1\}$

---

(3)  $\rightarrow$  (b):  $\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\} \mapsto \hat{0}$ ,  $\{\bar{1}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{10}, \bar{13}\} \mapsto \hat{4}$ ,  $\{\bar{2}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{11}, \bar{14}\} \mapsto \hat{2}$

$$\bar{0}\varphi = \hat{0} \quad \bar{3}\varphi = \hat{0} \quad \bar{6}\varphi = \hat{0} \quad \bar{9}\varphi = \hat{0} \quad \bar{12}\varphi = \hat{0}$$

$$\bar{1}\varphi = \hat{4} \quad \bar{4}\varphi = \hat{4} \quad \bar{7}\varphi = \hat{4} \quad \bar{10}\varphi = \hat{4} \quad \bar{13}\varphi = \hat{4}$$

$$\bar{2}\varphi = \hat{2} \quad \bar{5}\varphi = \hat{2} \quad \bar{8}\varphi = \hat{2} \quad \bar{11}\varphi = \hat{2} \quad \bar{14}\varphi = \hat{2}$$

## Példa

Határozzuk meg az összes  $\varphi: \mathbb{Z}_{15} \rightarrow \mathbb{Z}_6$  homomorfizmust.

Mivel  $\mathbb{Z}_{15}/\ker \varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$ , a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust  $\mathbb{Z}_{15}$  faktorcsoportjai és  $\mathbb{Z}_6$  részcsoportjai között.

$\mathbb{Z}_{15}$  faktorcsoportjai:

---

(1)  $\mathbb{Z}_{15}/\{\bar{0}\} \cong \mathbb{Z}_{15}$

(2)  $\mathbb{Z}_{15}/\{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}\} \cong \mathbb{Z}_5$

(3)  $\mathbb{Z}_{15}/\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\} \cong \mathbb{Z}_3$

(4)  $\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$

$\mathbb{Z}_6$  részcsoportjai:

---

(a)  $\mathbb{Z}_6$

(b)  $\{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$

(c)  $\{\hat{0}, \hat{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$

(d)  $\{\hat{0}\} \cong \{1\}$

---

(4)  $\rightarrow$  (d):  $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{14}\} \mapsto \hat{0}$

$$\bar{0}\varphi = \hat{0} \quad \bar{3}\varphi = \hat{0} \quad \bar{6}\varphi = \hat{0} \quad \bar{9}\varphi = \hat{0} \quad \bar{12}\varphi = \hat{0}$$

$$\bar{1}\varphi = \hat{0} \quad \bar{4}\varphi = \hat{0} \quad \bar{7}\varphi = \hat{0} \quad \bar{10}\varphi = \hat{0} \quad \bar{13}\varphi = \hat{0}$$

$$\bar{2}\varphi = \hat{0} \quad \bar{5}\varphi = \hat{0} \quad \bar{8}\varphi = \hat{0} \quad \bar{11}\varphi = \hat{0} \quad \bar{14}\varphi = \hat{0}$$

## Példa

Határozzuk meg az összes  $\varphi: \mathbb{Z}_{15} \rightarrow \mathbb{Z}_6$  homomorfizmust.

Egy másik megoldás: határozzuk meg  $\varphi$  értékét egy generátorrendszeren.

Ha  $\overline{1}\varphi = \widehat{k} \in \mathbb{Z}_6$ , akkor minden  $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{15}$  esetén  $\overline{a}\varphi = \widehat{ak}$ .

Milyen  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  értékekre lesz

$$\varphi: \mathbb{Z}_{15} \rightarrow \mathbb{Z}_6, \overline{a} \mapsto \widehat{ak}$$

valóban homomorfizmus?

- ▶  $\varphi$  jóldefiniált: Minden  $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ -re teljesülnie kell, hogy  $a_1 \equiv a_2 \pmod{15} \implies ka_1 \equiv ka_2 \pmod{6}$ .  
Tehát  $k = 0, 2, 4$  lehet csak.

- ▶  $\varphi$  homomorfizmus:

$$(\overline{a_1} + \overline{a_2})\varphi = \overline{a_1 + a_2}\varphi = k(\widehat{a_1 + a_2}) = \widehat{ka_1} + \widehat{ka_2} = \overline{a_1}\varphi + \overline{a_2}\varphi$$

Emlékeztető:

(1) Ha  $N \triangleleft G$ , akkor  $\nu: G \rightarrow G/N, g \mapsto gN$  a **természetes homomorfizmus**.

(2) Homomorfizmusnál részcsoport képe részcsoport:  
ha  $\varphi: G \rightarrow \tilde{G}$  homomorfizmus és  $H \leq G$ , akkor

$$H\varphi = \{h\varphi: h \in H\} \leq \tilde{G}.$$

(3) Homomorfizmusnál részcsoport teljes inverz képe részcsoport:  
ha  $\varphi: G \rightarrow \tilde{G}$  homomorfizmus és  $\tilde{H} \leq \tilde{G}$ , akkor

$$\tilde{H}\varphi^{-1} = \{g \in G: g\varphi \in \tilde{H}\} \leq G.$$

## Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha  $H \leq G$  és  $N \triangleleft G$ , akkor  $N \triangleleft HN \leq G$  és  $H \cap N \triangleleft H \leq G$ , továbbá

$$HN/N \cong H/H \cap N.$$

Biz.

Tekintsük a  $\nu: G \rightarrow G/N, g \mapsto gN$  természetes homomorfizmus  $H$ -ra való megszorítását:

$$\nu|_H: H \rightarrow G/N, h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

- ▶ mag:  
 $\ker \nu|_H = \{h \in H: h\nu = N\} = \{h \in H: hN = N\} = H \cap N \triangleleft H$
- ▶ értékkészlet:  
 $H\nu|_H = \{h\nu: h \in H\} = \{hN: h \in H\} = HN/N \leq G/N$
- ▶ izomorfizmus:  $H/H \cap N \cong HN/N$  □

Miért lesz  $HN$  részcsoport  $G$ -ben?

1. válasz:  $HN = (H\nu)\nu^{-1}$

2. válasz:  $HN \cdot HN = HHNN = HN$  és  $(HN)^{-1} = N^{-1}H^{-1} = NH = HN$

$HN = [H \cup N] = H \vee N$  a legszűkebb részcsoport, ami  $H$ -t és  $N$ -et is tartalmazza.

## Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a  $G = \mathbb{Z}_{24}$ ,  $H = [4]$ ,  $N = [6]$  szereposztással.

$$\blacktriangleright H \cap N = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{12}, \bar{16}, \bar{20}\} \cap \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}, \bar{18}\} = \{\bar{0}, \bar{12}\} = [12]$$

$$\begin{aligned}\blacktriangleright H/H \cap N &= \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{12}, \bar{16}, \bar{20}\} / \{\bar{0}, \bar{12}\} \\ &= \{\{\bar{0}, \bar{12}\}, \{\bar{4}, \bar{16}\}, \{\bar{8}, \bar{20}\}\} \cong \mathbb{Z}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\blacktriangleright H + N &= \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{12}, \bar{16}, \bar{20}\} + \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}, \bar{18}\} \\ &= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}, \bar{22}\} = [2]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\blacktriangleright (H + N)/N &= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}, \bar{22}\} / \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}, \bar{18}\} \\ &= \{\{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}, \bar{18}\}, \{\bar{2}, \bar{8}, \bar{14}, \bar{20}\}, \{\bar{4}, \bar{10}, \bar{16}, \bar{22}\}\} \cong \mathbb{Z}_3\end{aligned}$$

$\blacktriangleright$  izomorfia:

$$\begin{aligned}\varphi: [2] / [6] &\rightarrow [4] / [12], & \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}, \bar{18}\} &\mapsto \{\bar{0}, \bar{12}\} \\ & & \{\bar{2}, \bar{8}, \bar{14}, \bar{20}\} &\mapsto \{\bar{8}, \bar{20}\} \\ & & \{\bar{4}, \bar{10}, \bar{16}, \bar{22}\} &\mapsto \{\bar{4}, \bar{16}\}\end{aligned}$$

$$G = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\ \hline \overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\ \hline \overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\ \hline \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \\ \hline \end{array}$$

$$N = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\ \hline \overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\ \hline \overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\ \hline \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \\ \hline \end{array}$$

$$G/N = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\ \hline \overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\ \hline \overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\ \hline \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \\ \hline \end{array}$$

$$H = \begin{array}{cccccc} \overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\ \overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\ \overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{array}$$

$$H + N = \begin{array}{cccccc} \overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\ \overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\ \overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{array}$$

$$(H + N) / N = \begin{array}{ccc|ccc} \overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\ \overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\ \overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{array}$$



$$H = \begin{array}{cccccc} \overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\ \overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\ \boxed{\overline{12}} & \boxed{\overline{16}} & \boxed{\overline{20}} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{array}$$

$$H \cap N = \begin{array}{cccccc} \overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\ \overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\ \boxed{\overline{12}} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{array}$$

$$H/H \cap N = \begin{array}{cccccc} \overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\ \overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\ \boxed{\overline{12}} & \boxed{\overline{16}} & \boxed{\overline{20}} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{array}$$

Az első izomorfizáció által szolgáltatott izomorfizmus:

$$(H + N) / N = \begin{array}{|c|} \hline \overline{18} \\ \hline \overline{6} \\ \hline \overline{12} \\ \hline \overline{0} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \overline{22} \\ \hline \overline{10} \\ \hline \overline{16} \\ \hline \overline{4} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \overline{2} \\ \hline \overline{14} \\ \hline \overline{20} \\ \hline \overline{8} \\ \hline \end{array}$$

$\varphi \downarrow$        $\downarrow$        $\downarrow$        $\downarrow$

$$H / H \cap N = \begin{array}{|c|} \hline \overline{12} \\ \hline \overline{0} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \overline{16} \\ \hline \overline{4} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \overline{20} \\ \hline \overline{8} \\ \hline \end{array}$$

## Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a  $G = S_4$ ,  $H = S_3$ ,  $N = V$  szereposztással.

- ▶  $H \cap N = S_3 \cap V = \{\text{id}\}$
- ▶  $H/H \cap N = S_3/\{\text{id}\}$
- ▶  $HN = S_3V = S_4$
- ▶  $HN/N = S_4/V$
- ▶ izomorfia:  $S_4/V \cong S_3/\{\text{id}\} \cong S_3$

Láttuk, hogy ha  $H \leq G$ , akkor  $H\nu = HN/N \leq G/N$ , és itt  $HN$  egy  $N$ -et tartalmazó részcsoportha  $G$ -nek.

Legyen most  $N \leq K \leq G$ . Ekkor  $F := K\nu = KN/N = K/N \leq G/N$ .

Fordítva, ha  $F \leq G/N$ , akkor  $K := F\nu^{-1}$  olyan részcsoportha  $G$ -nek, ami tartalmazza  $N$ -et.

### Tétel (Megfeleltetési tétel)

*Ha  $N \triangleleft G$ , akkor  $G/N$  részcsoporthai kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a  $G$  csoport  $N$ -et tartalmazó részcsoporthainak. A  $K \leq G$  részcsoporthnak (ahol  $N \leq K$ ) az  $F := K/N \leq G/N$  részcsoporth felel meg.*

### Tétel (II. izomorfiatétel)

*Ha  $K \leq G$  és  $F \leq G/N$  a fentiek szerint egymásnak megfelelő részcsoporthok, akkor  $K \triangleleft G \iff F \triangleleft G/N$ . Ha ez teljesül, akkor  $(G/N)/F \cong G/K$ , azaz  $(G/N)/(K/N) \cong G/K$ .*

1. Mellékosztályok, Lagrange tétele
2. Normálosztó, faktorcsoport
3. Homomorfiatétel, izomorfiatételek
4. Permutációcsoportok
5. Direkt szorzat

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] XII/5 és [F] II/12 fejezetekben található.

## Definíció

A nemüres  $A$  halmaz összes permutációi alkotta  $S_A$  szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

## Tétel (Cayley-reprezentáció)

*Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.*

### Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.

A következő  $\rho$  leképezés beágyazza a  $G$  csoportot az  $S_G$  szimmetrikus csoportba:

$$\rho: G \rightarrow S_G, g \mapsto \rho_g.$$

- ▶ Minden  $g \in G$  esetén  $\rho_g \in S_G$  (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ▶  $\rho$  injektív:  $g \neq h \implies 1 \cdot g = 1\rho_g \neq 1\rho_h = 1 \cdot h \implies \rho_g \neq \rho_h$
- ▶  $\rho$  homomorfizmus:  $\rho_{gh} \stackrel{?}{=} \rho_g \circ \rho_h$   
 $\forall x \in G : x\rho_{gh} = x(gh) = (xg)h = (xg)\rho_h = (x\rho_g)\rho_h = x(\rho_g \circ \rho_h)$

Legyen  $H = G\rho \leq S_G$ ; ekkor  $\rho$  izomorfizmus  $G$  és  $H$  között.



## Példa

Írjuk fel a  $\mathbb{Z}_6$  csoport Cayley-reprezentációját.

Minden  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_6$  esetén  $\rho_{\bar{a}}: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6, \bar{x} \mapsto \bar{x} + \bar{a}$ .

$$\rho_{\bar{0}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \end{pmatrix} = \text{id}$$

$$\rho_{\bar{1}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} \end{pmatrix} = (\bar{0}\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5})$$

$$\rho_{\bar{2}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = (\bar{0}\bar{2}\bar{4})(\bar{1}\bar{3}\bar{5})$$

$$\rho_{\bar{3}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix} = (\bar{0}\bar{3})(\bar{1}\bar{4})(\bar{2}\bar{5})$$

$$\rho_{\bar{4}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix} = (\bar{0}\bar{4}\bar{2})(\bar{1}\bar{5}\bar{3})$$

$$\rho_{\bar{5}} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{pmatrix} = (\bar{0}\bar{5}\bar{4}\bar{3}\bar{2}\bar{1})$$

## Példa

Írjuk fel az  $S_3$  csoport Cayley-reprezentációját.

Minden  $\pi \in S_3$  esetén  $\rho_\pi: S_3 \rightarrow S_3, x \mapsto x \cdot \pi$ .

$$\rho_{\text{id}} = \begin{pmatrix} \text{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ \text{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \end{pmatrix} = \text{id}$$

$$\begin{aligned} \rho_{(12)} &= \begin{pmatrix} \text{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ (12) & \text{id} & (132) & (123) & (23) & (13) \end{pmatrix} \\ &= (\text{id} (12))((13) (132))((23) (123)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{(123)} &= \begin{pmatrix} \text{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ (123) & (13) & (23) & (12) & (132) & \text{id} \end{pmatrix} \\ &= (\text{id} (123) (132))((12) (13) (23)) \end{aligned}$$

⋮



## Tétel

Egy  $S_n$ -beli permutáció transzpozíciók szorzataként való felírásában a tényezők számának paritása egyértelműen meghatározott.

## Biz.

[Sz] XII/5. fejezet.

Tegyük fel, hogy

$$\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{2k+1} = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{2l},$$

ahol mindegyik  $\tau_i$  és  $\sigma_j$  transzpozíció. Ekkor az identikus permutáció előáll páratlan sok transzpozíció szorzataként:

$$\text{id} = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{2k+1} \sigma_{2l} \cdots \sigma_2 \sigma_1.$$

Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen.

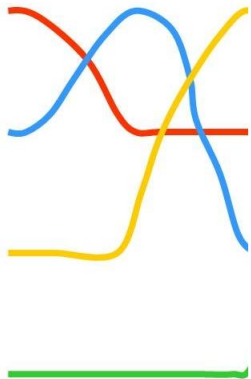
—

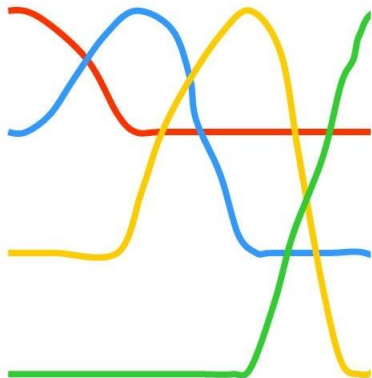
—

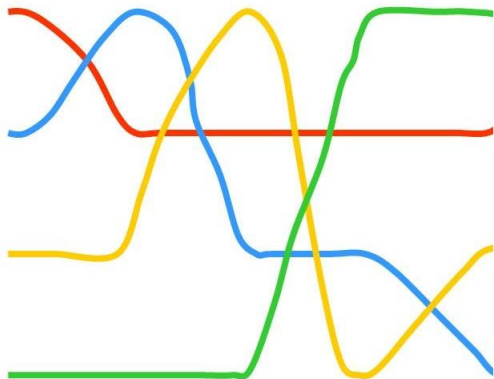
—

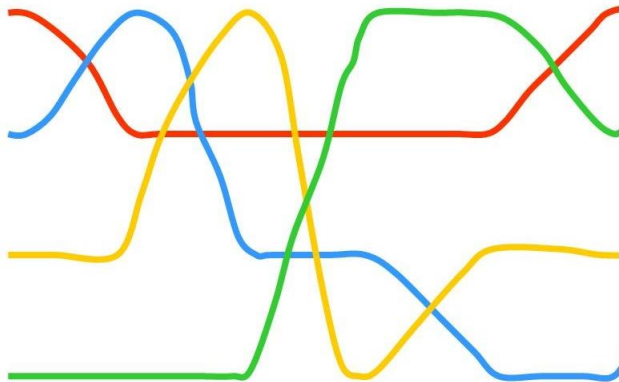
—

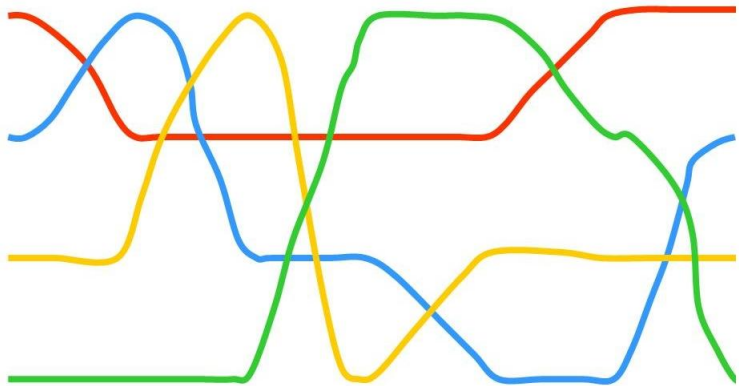




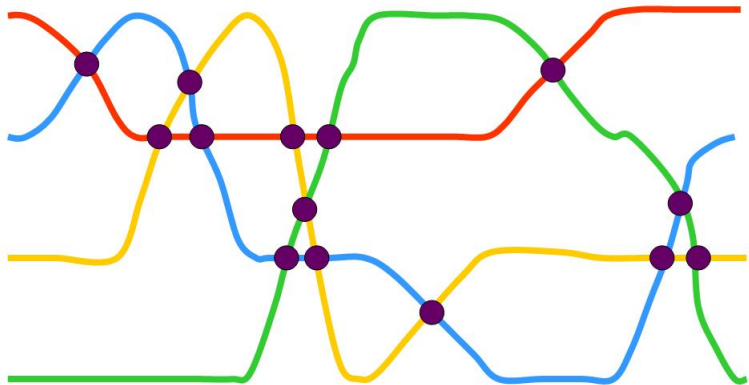


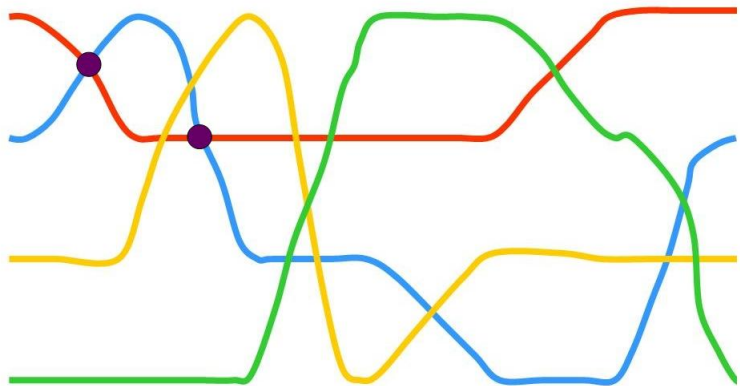




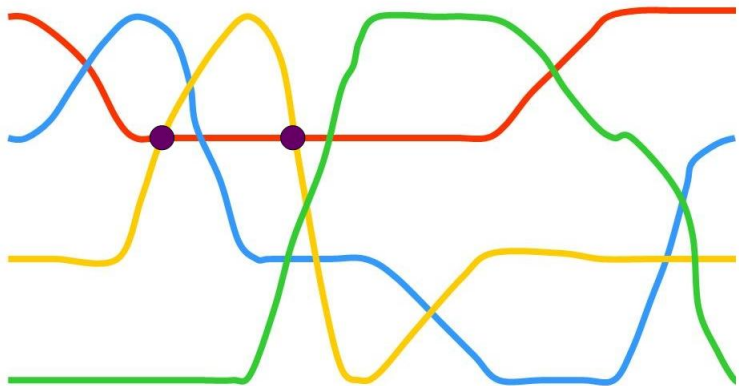




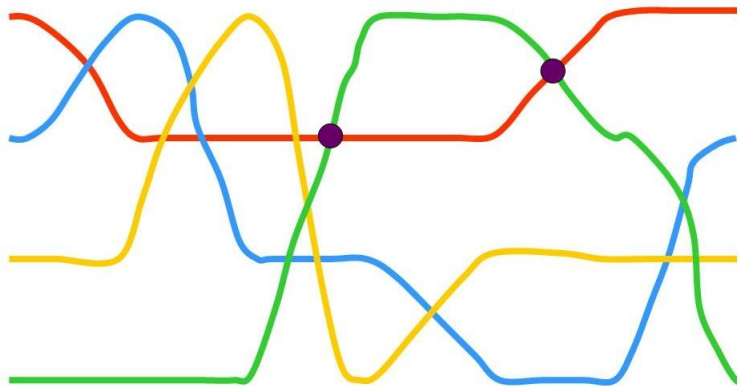




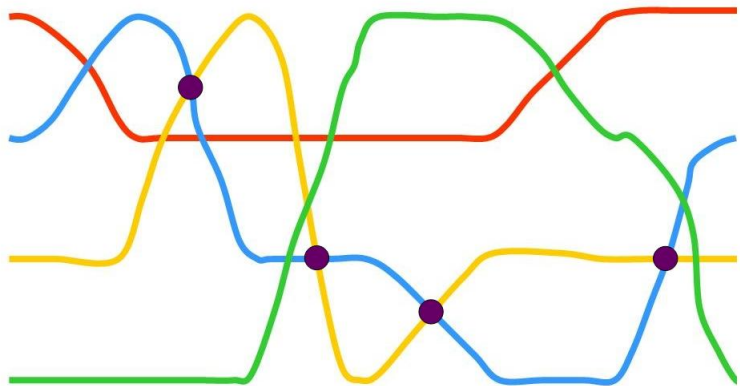
metszéspontok: 2



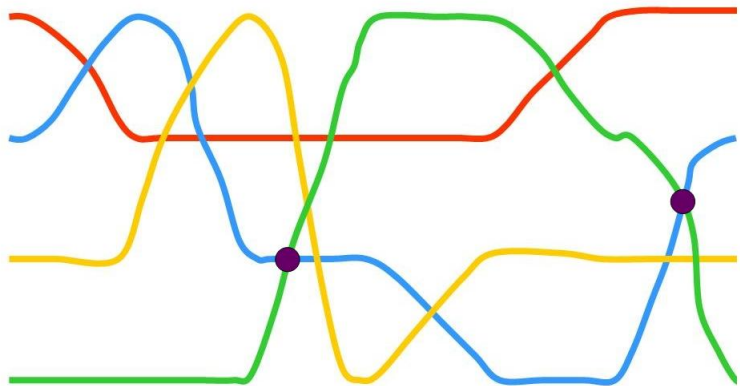
metszéspontok:  $2 + 2$



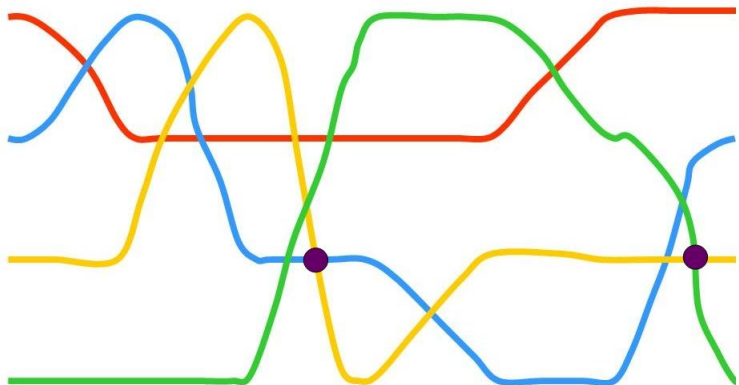
metszéspontok:  $2 + 2 + 2$



metszéspontok:  $2 + 2 + 2 + 4$



metszéspontok:  $2 + 2 + 2 + 4 + 2$



metszéspontok:  $2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 \equiv 0 \pmod{2}$

—

—

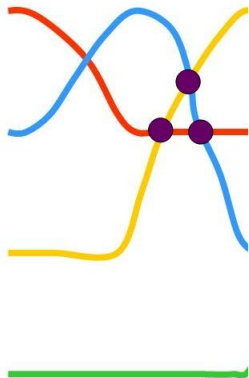
—

—

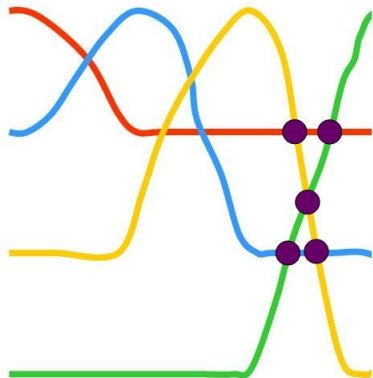




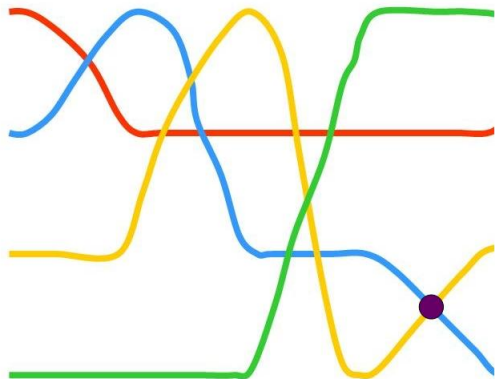
metszéspontok: 1



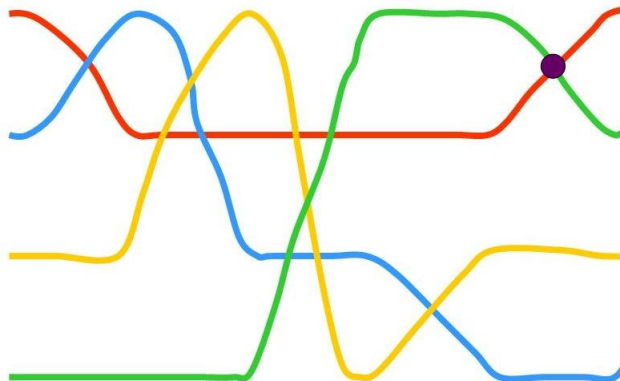
metszéspontok:  $1 + 3$



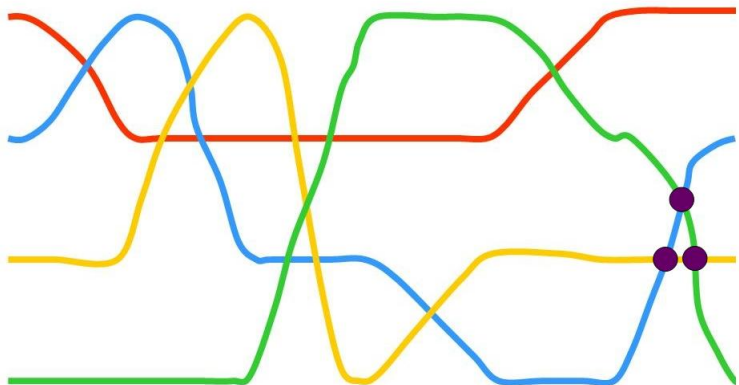
metszéspontok:  $1 + 3 + 5$



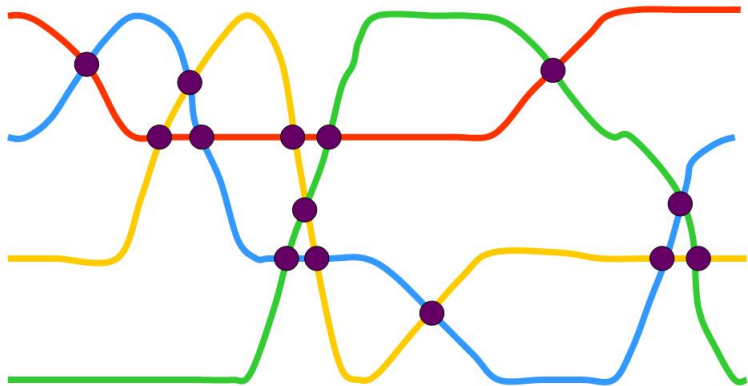
metszéspontok:  $1 + 3 + 5 + 1$



metszéspontok:  $1 + 3 + 5 + 1 + 1$



metszéspontok:  $1 + 3 + 5 + 1 + 1 + 3 \equiv$  cserék száma (mod 2)



metszéspontok:  $0 \equiv \text{cserék száma} \pmod{2}$

## Állítás

*Permutációk szorzatának a paritása a következőképpen alakul:*

$$\begin{array}{l} \text{páros} \cdot \text{páros} = \text{páros} \quad \text{páros} \cdot \text{páratlan} = \text{páratlan} \\ \text{páratlan} \cdot \text{páratlan} = \text{páros} \quad \text{páratlan} \cdot \text{páros} = \text{páratlan} \end{array}$$

## Biz.

Szorzáskor a permutációt előállító transzpozíciók száma összeadódik.



## Következmény

*A páros hosszúságú ciklusok páratlan permutációk, míg a páratlan hosszúságú ciklusok páros permutációk.*

## Biz.

Láttuk korábban, hogy egy  $k$  hosszúságú ciklus felírható  $k - 1$  transzpozíció szorzataként.





## Példa

Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

- ▶  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ : páros
- ▶  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ : páratlan
- ▶  $(123)(4567)$ : páratlan
- ▶  $(12)(3456)(78)$ : páratlan
- ▶  $(12)(345)(6789)$ : páros

## Következmény

A páros permutációk részcsoportot (sőt, normálosztót) alkotnak  $S_n$ -ben. Ezt a csoportot  $n$ -edfokú **alternáló csoportnak** nevezzük, és  $A_n$ -nel jelöljük.

**Biz.**

Értelmezzük egy  $\pi$  permutáció előjelét a következőképpen:

$$\operatorname{sgn} \pi := \begin{cases} 1, & \text{ha } \pi \text{ páros;} \\ -1, & \text{ha } \pi \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor  $\operatorname{sgn}: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$  homomorfizmus, és magja éppen  $A_n$ .




## Következmény

$[S_n : A_n] = 2$  és így  $|A_n| = \frac{n!}{2}$ .

**Tétel**

Az alternáló csoportot generálják a 3 hosszúságú ciklusok.

**Biz.**

$(ab)(ac) = (abc)$ ,  $(ab)(cd) = (ab)(ac) \cdot (ac)(cd) = (abc)(acd)$  

## Tétel

Ha  $n \geq 5$ , akkor  $A_n$  egyszerű csoport.

## Megjegyzés

Ha  $n = 4$ , akkor  $A_n$  nem egyszerű, mert  $V \triangleleft A_4$ . Az  $A_3, A_2$  csoportok persze egyszerűek, mert prímszámúak.

## Következmény

Ha  $n \neq 4$ , akkor  $S_n$  egyetlen nemtriviális normálosztója  $A_n$ .

## Biz.

Legyen  $N$  nemtriviális normálosztója  $S_n$ -nek ( $n \neq 4$ ).

Ekkor  $N \cap A_n \triangleleft A_n$ , így  $A_n$  egyszerűsége miatt két eset lehetséges:

- ▶  $N \cap A_n = A_n$  esetén  $A_n \leq N$ , ezért  $N = A_n$ .
- ▶  $N \cap A_n = \{\text{id}\}$  esetén  $|N| = 2$ , mert

$$N \cong N / \{\text{id}\} \cong N / N \cap A_n \cong NA_n / A_n = S_n / A_n.$$

Ez viszont lehetetlen, hiszen ekkor  $N \setminus \{\text{id}\}$  egyelemű konjugáltosztály lenne  $S_n$ -ben.



1. Mellékosztályok, Lagrange tétele
2. Normálosztó, faktorcsoport
3. Homomorfiatétel, izomorfiatételek
4. Permutációcsoportok
5. Direkt szorzat

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] X/4 és [F] II/13,14 fejezetekben található.

## Definíció

Az  $A$  és  $B$  csoportok **külső direkt szorzatán** azt a csoportot értjük, melynek tartóhalmaza  $A \times B$ , művelete pedig a következőképpen van definiálva:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2).$$

## Állítás

*Csoportok külső direkt szorzata csoport.*

## Biz.

Az asszociativitás világos, az egységelem  $(1_A, 1_B)$ , az  $(a, b) \in A \times B$  elem inverze pedig  $(a^{-1}, b^{-1})$ .



## Példa

- ▶ Síkbeli vektorok az összeadás műveletével:  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
- ▶  $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}); \Delta) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

## Állítás

Az  $A \times B$  külső direkt szorzatban az  $A_1 := \{(a, 1_B) : a \in A\}$  és  $B_1 := \{(1_A, b) : b \in B\}$  részcsoporthokra teljesülnek a következők:

- (1)  $A_1, B_1 \triangleleft A \times B$ ;
- (2)  $A_1 \vee B_1 = A_1 B_1 = A \times B$ ;
- (3)  $A_1 \wedge B_1 = A_1 \cap B_1 = \{(1_A, 1_B)\}$ .

Biz.

[F] II/13. fejezet.



## Definíció

Azt mondjuk, hogy a  $G$  csoport az  $A$  és  $B$  részcsoporthjainak **belső direkt szorzata**, ha

- (1)  $A, B \triangleleft G$ ;
- (2)  $A \vee B = AB = G$ ;
- (3)  $A \wedge B = A \cap B = \{1_G\}$ .

## Tétel

*A  $G$  csoport az  $A$  és  $B$  részcsoporthainak belső direkt szorzata akkor és csak akkor, ha*

- (a)  *$G$  minden eleme előáll  $ab$  ( $a \in A, b \in B$ ) alakban;*
- (b) *a fenti előállítás egyértelmű;*
- (c)  $\forall a \in A \forall b \in B : ab = ba$ .

**Biz.**

[F] II/13. fejezet.



## Tétel

*A külső és a belső direkt szorzat „lényegében” ugyanaz:*

$$G \cong A \times_k B \iff \exists A_1, B_1 \leq G : A_1 \cong A, B_1 \cong B \text{ és } G = A_1 \times_b B_1.$$

**Biz.**

[F] II/13. fejezet.



## Definíció

Azt mondjuk, hogy a  $G$  csoport az  $A_1, \dots, A_n$  részcsoporthainak **belső direkt szorzata**, ha

- (1)  $A_1, \dots, A_n \triangleleft G$ ;
- (2)  $A_1 \cdot \dots \cdot A_n = G$ ;
- (3)  $A_i \cap (A_1 \cdot \dots \cdot A_{i-1} \cdot A_{i+1} \cdot \dots \cdot A_n) = \{1_G\}$  minden  $i$ -re.

## Tétel

*A  $G$  csoport az  $A_1, \dots, A_n$  részcsoporthainak belső direkt szorzata akkor és csak akkor, ha*

- $G$  minden eleme előáll  $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$  ( $a_i \in A_i$ ) alakban;*
- a fenti előállítás egyértelmű;*
- $\forall a_i \in A_i \forall a_j \in A_j : a_i a_j = a_j a_i$  minden  $i \neq j$  esetén.*



## Tétel

Ha  $n$  és  $m$  relatív prímek, akkor  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$ .

## Biz.

[Sz] X/4.5. Tétel. (gyűrűkre, kínai maradéktétel segítségével)

Egy másik bizonyítás: megfigyeltük, hogy  $\mathbb{Z}_\ell$  részcsoporthálója (azaz normálosztóhálója) éppen a  $D_k$  hálónak ( $k$  osztói oszthatóság szerint rendezve) a „fejreállítottja” (hivatalosan: duálisa). Minden részcsoportháló áll  $[\bar{a}]$  alakban (ahol  $a \mid \ell$ ), és

$$[\bar{a}] \wedge [\bar{b}] = [\overline{\text{lkk}(a, b)}], \quad [\bar{a}] \vee [\bar{b}] = [\overline{\text{Inko}(a, b)}].$$

Tegyük fel, hogy  $\text{Inko}(m, n) = 1$ , és legyen  $\ell = nm$ ,  $a = n$ ,  $b = m$ . Ekkor

$$[\bar{a}] \wedge [\bar{b}] = [\overline{\text{lkk}(n, m)}] = [\overline{nm}] = [\bar{0}], \quad [\bar{a}] \vee [\bar{b}] = [\overline{\text{Inko}(n, m)}] = [\bar{1}] = \mathbb{Z}_{nm}.$$

Tehát  $\mathbb{Z}_{nm}$  az  $[\bar{n}]$  és  $[\bar{m}]$  részcsoporthátok belső direkt szorzata, és  $[\bar{n}] \cong \mathbb{Z}_m$ ,  $[\bar{m}] \cong \mathbb{Z}_n$ . □

## Következmény

Ha  $n$  prímszámhatványozós felbontása  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ , akkor

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

**Biz.**

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}} \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k}} \cong \dots \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$



## Állítás

Ha  $n$  és  $m$  nem relatív prímek, akkor  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \not\cong \mathbb{Z}_{nm}$ .

**Biz.**

Legyen  $d = \text{Inko}(n, m) > 1$ ; ekkor  $\text{lkkt}(n, m) = \frac{nm}{d} < nm$ .

Tetszőleges  $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$  elemre

$$\frac{nm}{d} (\bar{a}, \bar{b}) = \left( \frac{m}{d} \cdot n\bar{a}, \frac{n}{d} \cdot m\bar{b} \right) = (\bar{0}, \bar{0}),$$

ezért  $(\bar{a}, \bar{b})$  rendje legfeljebb  $\text{lkkt}(n, m)$ .

Tehát  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$  nem tartalmaz  $nm$ -ed rendű elemet, így nem is ciklikus.



## Tétel (Véges Abel-csoportok alaptétele)

*Minden véges Abel-csoport felbontható prímszámú ciklikus csoportok direkt szorzatára. Ez a felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű.*

### Példa

Határozzuk meg az összes  $n$ -elemű Abel-csoportot (izomorfia erejéig).

- ▶  $n = 4$ :  $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- ▶  $n = 8$ :  $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- ▶  $n = 10$ :  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$  (izomorf  $\mathbb{Z}_{10}$ -zel)
- ▶  $n = 16$ :  $\mathbb{Z}_{16}, \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- ▶  $n = 100$ :  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

## Példa

Igaz-e, hogy  $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2$ ?

Az alaptétel szerinti „kanonikus” felbontások:

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \quad \text{és} \quad \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2.$$

Ezek csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát izomorfak.

## Példa

Igaz-e, hogy  $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$ ?

Az alaptétel szerinti „kanonikus” felbontások:

$$\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \quad \text{és} \quad \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4.$$

Ezek nem csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát nem izomorfak (az alaptétel unicitási része szerint).

Másik megoldás: nem izomorfak, mert  $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$ -ben van negyedrendű elem, például  $(\bar{0}, \bar{3})$ , míg  $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6$ -ban nincs negyedrendű elem (miért?).

## Példa

Igaz-e, hogy  $\mathbb{Z}_{21}^* \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ ?

Nem, mert  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$ , de  $\mathbb{Z}_{21}^*$  nem ciklikus.

(Másik megoldás: meghatároztuk  $\mathbb{Z}_{21}^*$  összes részcsoportját, és nem volt közöttük 4-elemű.)

## Példa

Igaz-e, hogy  $\mathbb{Z}_{25}^* \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ ?

Igen, mert  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{20}$ , és  $\mathbb{Z}_{25}^*$  valóban 20-elemű ciklikus csoport.

## Példa

Igaz-e, hogy  $D_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ?

Nem, mert  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  kommutatív, de  $D_4$  nem az.

## Példa

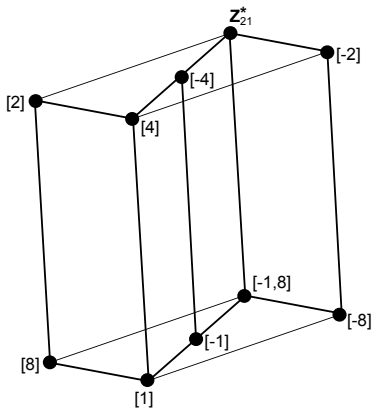
Igaz-e, hogy  $V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ?

Igen,  $V = A \times_b B$ , ahol  $A = \{\text{id}, (12)(34)\}$  és  $B = \{\text{id}, (13)(24)\}$

## Példa

Direkt felbontható-e a  $\mathbb{Z}_{21}^*$  csoport?

A válasz leolvasható a normálosztóhálóról:

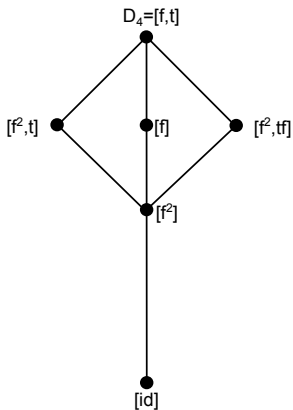


Legyen  $A = [2]$  és  $B = [-8]$ . Ekkor  $A \wedge B = [1] = \{1\}$  és  $A \vee B = \mathbb{Z}_{21}^*$ ,  
tehát  $\mathbb{Z}_{21}^* = A \times_b B \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ .

## Példa

Direkt felbontható-e a  $D_4$  csoport?

A válasz leolvasható a normálosztóhálóról:



Nincs két nemtriviális normálosztó, melyek metszete  $\{id\}$  lenne, ezért  $D_4$  direkt felbonthatatlan.

## Példa

Direkt felbontható-e a  $\mathbb{C}^*$  csoport?

Igen  $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^+ \times_b T$ , hiszen minden nemnulla  $z$  komplex szám felírható egy pozitív valós szám és egy egységnyi abszolút értékű komplex szám szorzataként:

$$z = |z| (\cos \arg z + i \sin \arg z),$$

és ez a felírás egyértelmű.