ABSZTRAKT ALGEBRA

feladatok

2019 tavaszi félév, OT

1. feladat Melyek izomorfak egymással az alábbi grupoidok közül?

$$\mathbb{A}=\begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & a & b & a \\ c & a & c & c \end{array}\qquad \mathbb{B}=\begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & a & a & c \\ c & a & a & b \end{array}\qquad \mathbb{C}=\begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & b & b & a \\ c & b & b & c \end{array}$$

$$\mathbb{D}=\begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & a & b \\ b & a & b & c \\ c & a & a & c \end{array}\qquad \mathbb{E}=\begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & a & b & c \\ c & b & c & c \end{array}\qquad \mathbb{F}=\begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & b & b & c \\ c & a & b & c \end{array}$$

2. feladat Határozza meg az 1. feladatban szereplő grupoidok összes részalgebráját, és rajzolja fel a részalgebrahálóikat.

3. feladat Határozza meg alábbi grupoidokban az összes részalgebrát, és rajzolja fel a részalgebrahálóikat. Van-e egy-, illetve kételemű generátorrendszerük?

$$\mathbb{A}=\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & c & d & a & b \\ c & a & b & c & d \\ d & c & d & a & b \end{array}\ ,\qquad \mathbb{B}=\begin{array}{c|cccc} * & u & v & w & z \\ \hline u & u & v & w & z \\ v & u & w & v & z \\ w & u & w & v & z \\ z & u & v & w & z \end{array}$$

4. feladat Döntse el, hogy a B részhalmaz részalgebrát (részcsoportot, részgyűrűt) alkot-e az $\mathbb{A}$ algebrában.

(a) $\mathbb{A}=(S_5;\cdot)\,,\ B=\{\mathrm{id},(135),(153)\}$

(b) $\mathbb{A}=(\mathbb{Z}[i];+,\cdot),\ B=\{bi\mid b\in\mathbb{Z}\}$

(c) $\mathbb{A}=(\mathbb{C}[x];+,\cdot),\ B=\{f\in\mathbb{Z}[x]:f(1)=0\}$

(d) $\mathbb{A}=(\mathbb{C}^*,\cdot),\ B=(\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\},\cdot)$

(e) $\mathbb{A}=(\mathbb{Z}[x];+,\cdot),\ B=\{f\in\mathbb{Z}[x]:2\mid f(0)\};$

(f) $\mathbb{A}=(D_6;\cdot)\,,\ B=\{\mathrm{id},t,a^2,a^2t\}$

(g) $\mathbb{A}=(\mathcal{P}(X);\cap),\ B=\{Y\subseteq X:|Y|=2\}$, ahol X tetszőleges halmaz

(h) $\mathbb{A}=(\mathbb{R}[x];+,\cdot),\ B=\{f\in\mathbb{Z}[x]:f(1)\geq 0\}$

(i) $\mathbb{A}=(\mathbb{Z}_6,+),\ B=\mathbb{Z}_6^*$

(j) $\mathbb{A}=(\mathbb{Z}_{12};+,\cdot),\ B=\mathbb{Z}_{12}^*\cup\{\overline{0}\}$

(k) $\mathbb{A}=(\mathbb{Z}[i];+,\cdot),\ B=\{a+bi\in\mathbb{Z}[i]:2\mid a+b\}$

(l) $\mathbb{A}=(\mathbb{Z}[i];+,\cdot),\ B=\{a+bi\in\mathbb{Z}[i]:2\mid ab\}$

(m) $\mathbb{A}=(S_4;\cdot)\,,\ B=\{\mathrm{id},(13),(24),(13)(24)\}$

5. feladat Határozza meg az $\mathbb{A}$ algebrában a T részhalmaz által generált részalgebrát. (Az (i) és (j) feladatokban $m\,(x,y,z)=x-y+z$, az (s) és (t) feladatokban $f\,(x)=x$ számjegyeinek négyzetösszege).

(a) $\mathbb{A}=(\mathcal{P}(\mathbb{N});\cup)$, $T=\{\text{háromelemű halmazok}\}$

(b) $\mathbb{A}=(\mathcal{P}(\mathbb{N});\cap)$, $T=\{\text{háromelemű halmazok}\}$

(c) $\mathbb{A}=(\mathcal{P}(\mathbb{N});\cup,\cap)$, $T=\{\text{háromelemű halmazok}\}$

(d) $\mathbb{A}=(\mathcal{P}(\mathbb{N});\Delta)$, $T=\{\text{háromelemű halmazok}\}$

(e) $\mathbb{A}=(\mathbb{N};+)$, $T=\{2,3\}$

(f) $\mathbb{A}=(\mathbb{N};\cdot)$, $T=\{2,3\}$

(g) $\mathbb{A}=(\mathbb{N};+)$, $T=\{3,5\}$

(h) $\mathbb{A}=(\mathbb{N};+,\cdot)$, $T=\{3,5\}$

(i) $\mathbb{A}=(\mathbb{Z};m)$, $T=\{-2,2\}$

(j) $\mathbb{A}=(\mathbb{Z};m)$, $T=\{1,3,8\}$

(k) $\mathbb{A}=(\mathbb{C};+)$, $T=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq 1\}$

(l) $\mathbb{A}=(\mathbb{C};\cdot)$, $T=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq 1\}$

(m) $\mathbb{A}=(\mathbb{C};+)$, $T=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,z\geq 0\}$

(n) $\mathbb{A}=(\mathbb{C};\cdot)$, $T=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,z\geq 0\}$

(o) $\mathbb{A}=(\mathbb{C};+)$, $T=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,z=0\}$

(p) $\mathbb{A}=(\mathbb{C};\cdot)$, $T=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,z=0\}$

(q) $\mathbb{A}=(\mathbb{C};+,\cdot)$, $T=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,z=0\}$

(r) $\mathbb{A}=(\mathbb{Z}[i];+,\cdot)$, $T=\{i\}$

(s) $\mathbb{A}=(\mathbb{Z};f)$, $T=\{2018\}$

(t) $\mathbb{A}=(\mathbb{Z};f)$, $T=\{2019\}$

6. feladat Határozza meg a G csoportban a T részhalmaz által generált részcsoportot.

(a) $G = \mathbb{Z}, \quad T = \{30, 42, 105\}$

(b) $G = \mathbb{Z}_{12}, \quad T = \{\overline{9}\}$

(c) $G = \mathbb{Z}_{12}, \quad T = \{\overline{10}\}$

(d) $G = \mathbb{Z}_{30}, \quad T = \{\overline{6}, \overline{10}\}$

(e) $G = \mathbb{Z}_{31}, \quad T = \{\overline{6}, \overline{10}\}$

(f) $G = \mathbb{Z}_{8}, \quad T = \{\overline{5}\}$

(g) $G = \mathbb{Z}_{8}^{*}, \quad T = \{\overline{5}\}$

(h) $G = D_{24}, \quad T = \{a^9\}$

(i) $G = D_{24}, \quad T = \{ta^9\}$

(j) $G = D_{12}, \quad T = \{a^3, a^2t\}$

(k) $G = D_{12}, \quad T = \{a^5, a^2t\}$

(l) $G = D_{10}, \quad T = \{a^4, a^5t\}$

(m) $G = S_9, \quad T = \{(12453)\,(34)\}$

(n) $G = S_4, \quad T = \{(1234)\,, (13)\}$

(o) $G = \mathbb{C}, \quad T = \{1, \sqrt{2}\}$

(p) $G = \mathbb{C}^{*}, \quad T = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$

(q) $G = \mathbb{C}^{*}, \quad T = \left\{\cos\frac{10\pi}{7} + i\sin\frac{10\pi}{7}\right\}$

(r) $G = \mathbb{C}^{*}, \quad T = \left\{i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

(s) $G = \mathbb{Q}, \quad T = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

(t) $G = \mathbb{Q}^{*}, \quad T = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

7. feladat Számítsa ki az alábbi csoportokban az egyes elemek generátumait (azaz a ciklikus részcsoportokat), majd határozza meg az összes részcsoportot, végül rajzolja fel a részcsoportháló Hasse-diagramját.

$$\mathbb{Z}_{18}, \quad \mathbb{Z}_{42}, \quad \mathbb{Z}_{15}^{*}, \quad \mathbb{Z}_{49}^{*}, \quad \mathbb{Z}_{54}^{*}, \quad D_3, \quad S_3, \quad V, \quad Q$$

8. feladat Határozza meg az R egységelemes gyűrű T részhalmaza által generált részgyűrűjét, valamint egységelemes részgyűrűjét.

(a) $R = \mathbb{R}[x], \quad T = \{x\}$

(b) $R = \mathbb{R}[x], \quad T = \{x^2\}$

(c) $R = \mathbb{Z}[x], \quad T = \{x^2, x^3\}$

(d) $R = \mathbb{Z}[x], \quad T = \{x - 1\}$

(e) $R = \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad T = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$

(f) $R = \mathbb{C}, \quad T = \{i\}$

(g) $R = \mathbb{C}, \quad T = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

(h) $R = \mathbb{R}, \quad T = \{\sqrt{2}\}$

(i) $R = \mathbb{Q}, \quad T = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(j) $R = \mathbb{Q}, \quad T = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

9. feladat Adjon meg minimális generátorrendszert a következő algebrákban:

(a) $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}); \cap)$;

(b) $(\mathbb{Q}^{+}; \cdot, ^{-1}, 1)$.

10. feladat Létezik-e háromelemű minimális generátorrendszere a $(\mathbb{Z}; +, -)$ algebrának?

11. feladat Határozza meg a $\mathbb{Z}$ gyűrű részgyűrűit és egységelemes részgyűrűit!

12. feladat Határozza meg az $(\mathbb{N}; ')$ algebra részalgebráit és generátorrendszereit, ahol $n' = n + 1$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re!

13. feladat Tekintsük az $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}; m)$ algebrát, ahol $m(a, b, c) = a - b + c$ tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}$-re. Mutassa meg, hogy

(a) bármely n pozitív egészre minden modulo n maradékosztály részalgebra $\mathbb{A}$-ban, és

(b) $\mathbb{A}$ minden részalgebrája ilyen.

14. feladat Határozza meg az $(\mathbb{Z}; f, g)$ algebra összes részalgebráját, ahol $f(x) = 2x$ és $g(x) = x - 1$.

15. feladat Leteszünk egymás mellé néhány pénzérmét úgy, hogy mindegyiken fej van felül. Egy lépésben bármelyik két egymás melletti érmét megfordíthatjuk. Milyen fej-írás mintázatokat érhetünk el ilyen lépésekkel?

16. feladat Igazolja, hogy ha egy integritástartomány nemtriviális részgyűrűjének van egységeleme, az megegyezik az integritástartomány egységelemével. Mutasson példát arra, hogy ez nem marad igaz, ha elhagyjuk a zérusosztómentesség feltételét.

17. feladat Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak (a választ indokolni is kell).

(a) Kommutatív gyűrű minden részgyűrűje is kommutatív.

(b) Nemkommutatív gyűrű egyetlen részgyűrűje sem kommutatív.

(c) Végtelen gyűrű minden részgyűrűje végtelen.

(d) Egy algebra bármely két generátorrendszerének az egyesítése is generátorrendszer.

(e) Egy algebra bármely két generátorrendszerének a metszete is generátorrendszer.

18. feladat Vizsgálja meg, hogy kompatibilis osztályozások-e az alábbiak a 3. feladatban szereplő $\mathbb{A}$ grupoidon. Amelyik igen, ahhoz írja fel a megfelelő faktorgrupoid művelettáblázatát.

$$\mathcal{C}_1 = \{\,\{a,c\},\,\{b\},\,\{d\}\,\}\,,\quad \mathcal{C}_2 = \{\,\{a,c\},\,\{b,d\}\,\}\,,\quad \mathcal{C}_3 = \{\,\{a,b\},\,\{c\},\,\{d\}\,\}$$

$$\mathcal{C}_4 = \{\,\{a\},\,\{c\},\,\{b,d\}\,\}\,,\quad \mathcal{C}_5 = \{\,\{a\},\,\{b,c,d\}\,\}\,,\quad \mathcal{C}_6 = \{\,\{a,\,b,c,d\}\,\}$$

19. feladat Döntse el, hogy a megadott $\mathcal{C}$ osztályozás kompatibilis-e az $\mathbb{A}$, illetve a $\mathbb{B}$ algebra műveleteivel. Ha igen, akkor határozza meg a megfelelő faktoralgebrát.

(a) $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N})\,;\cap)\,,\ \mathbb{B} = (\mathcal{P}(\mathbb{N})\,;\Delta)\,,\ \mathcal{C} = \{\,\{\text{véges halmazok}\}\,,\,\{\text{végtelen halmazok}\}\,\}$

(b) $\mathbb{A} = (\mathbb{C};+)\,,\ \mathbb{B} = (\mathbb{C};\cdot)\,,\ \mathcal{C} = \{\,\{\text{algebrai számok}\}\,,\,\{\text{transzcendens számok}\}\,\}$

(c) $\mathbb{A} = (\mathbb{N};+)\,,\ \mathbb{B} = (\mathbb{N};\cdot)\,,\ \mathcal{C} = \{\,\{\text{3-mal osztható számok}\}\,,\,\{\text{3-mal nem osztható számok}\}\,\}$

(d) $\mathbb{A} = (\mathbb{N}_0;+)\,,\ \mathbb{B} = (\mathbb{N}_0;\cdot)\,,\ \mathcal{C} = \{\,\{0,1\}\,,\,\{2,3,\ldots\}\,\}$

(e) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_9^*;\cdot)\,,\ \mathbb{B} = \left(\mathbb{Z}_9^*;^{-1}\right)\,,\ \mathcal{C} = \left\{\,\left\{\overline{2},\overline{7}\right\},\left\{\overline{1},\overline{8}\right\},\left\{\overline{4},\overline{5}\right\}\,\right\}$

(f) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_9^*;\cdot)\,,\ \mathbb{B} = \left(\mathbb{Z}_9^*;^{-1}\right)\,,\ \mathcal{C} = \left\{\,\left\{\overline{2},\overline{7}\right\},\left\{\overline{1}\right\},\left\{\overline{8}\right\},\left\{\overline{4},\overline{5}\right\}\,\right\}$

(g) $\mathbb{A} = (S_5;\cdot)\,,\ \mathbb{B} = \left(S_5;^{-1}\right)\,,\ \mathcal{C} = \{\,A_5, S_5 \setminus A_5\,\}$

20. feladat Döntse el, hogy a megadott ρ reláció kongruenciája-e az $\mathbb{A}$, illetve a $\mathbb{B}$ algebrának. Ha igen, akkor határozza meg a megfelelő faktoralgebrát.

(a) $\mathbb{A} = (\mathbb{N};+)\,,\ \mathbb{B} = (\mathbb{N};\cdot)\,,\ \rho = \{(a,b) : a \mid b\}$

(b) $\mathbb{A} = (\mathbb{C};+)\,,\ \mathbb{B} = (\mathbb{C};\cdot)\,,\ \rho = \{(z,w) : |z| = |w|\}$

(c) $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N})\,;\cap)\,,\ \mathbb{B} = (\mathcal{P}(\mathbb{N})\,;\Delta)\,,\ \rho = \{(X,Y) : |X| = |Y|\}$

(d) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z};+)\,,\ \mathbb{B} = (\mathbb{Z};\cdot)\,,\ \rho = \left\{(a,b) : 3 \mid a^2 - b^2\right\}$

(e) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_6;+)\,,\ \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_6;\cdot)\,,\ \rho = \{(a,b) : 2a = 2b\}$

(f) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}[x]\,;+)\,,\ \mathbb{B} = (\mathbb{Z}[x]\,;\cdot)\,,\ \rho = \{(f,g) : f(1) = g(1)\}$

21. feladat Definiáljuk a természetes számok halmazán a ρ relációt a következőképpen:

$$a\rho b \iff \left\{k \in \mathbb{N}_0 : 5^k \mid a\right\} = \left\{k \in \mathbb{N}_0 : 5^k \mid b\right\}.$$

Igazolja, hogy ρ kongruenciája az $(\mathbb{N};\cdot)$ algebrának, és határozza meg a hozzá tartozó faktoralgebrát. Mi a helyzet, ha ρ definíciójában 5 helyett 6-ot írunk?

22. feladat Határozza meg az alábbi grupoidok összes kongruenciáját és a megfelelő faktorgrupoidokat.

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & b & b \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array} \qquad \mathbb{B} = \begin{array}{c|cccc} * & p & q & r & s \\ \hline p & p & q & r & r \\ q & q & q & r & r \\ r & r & r & r & r \\ s & s & s & s & s \end{array}$$

23. feladat Milyen betűket kell írni a kérdőjelek helyére, hogy $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizmusokat kapjunk? (A művelettáblázatokat lásd a 3. feladatnál.) Mindegyik homomorfizmusnak határozza meg a magját, és írja fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

$$av = u,\quad bv = v,\quad cv = ?,\quad dv = ?$$

$$a\varphi = z,\quad b\varphi = ?,\quad c\varphi = ?,\quad d\varphi = w$$

$$a\chi = ?,\quad b\chi = z,\quad c\chi = u,\quad d\chi = ?$$

$$a\psi = ?,\quad b\psi = ?,\quad c\psi = u,\quad d\psi = w$$

$$a\omega = z,\quad b\omega = v\quad c\omega = ?,\quad d\omega = ?$$

24. feladat Gondoltam egy $\varphi\colon (\mathbb{N};+) \to (\mathbb{N};+)$ homomorfizmust. Annyit elárulok, hogy $2\varphi = 16$ és $5\varphi = 40$, Mi lehet ez a homomorfizmus? Hány lehetőség van? Oldja meg a feladatot $(\mathbb{N};+) \to (\mathbb{N};\cdot)$, $(\mathbb{N};\cdot) \to (\mathbb{N};+)$, illetve $(\mathbb{N};\cdot) \to (\mathbb{N};\cdot)$ homomorfizmusra is.

25. feladat Oldja meg az előző feladatot a $2\varphi = 4$, $5\varphi = 32$ adatokkal is.

26. feladat Határozza meg a 22. feladatbeli grupoidokra az összes $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$, illetve $\mathbb{B} \to \mathbb{A}$ homomorfizmust.

27. feladat Homomorfizmusok-e az alábbi $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ leképezések?

(a) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z};\cdot)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z};\cdot)$, $x \mapsto x^3$

(b) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z};+)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z};+)$, $x \mapsto x^3$

(c) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_3+)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_3;+)$, $x \mapsto x^3$

(d) $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N});\cap,\cup)$, $\mathbb{B} = (\mathcal{P}(\mathbb{N});\cup,\cap)$, $X \mapsto \overline{X} = \mathbb{N} \setminus X$

(e) $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N});\cup)$, $\mathbb{B} = (\mathcal{P}(\mathbb{N});\cup)$, $X \mapsto X \cap \{1,2,3\}$

(f) $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N});\cup)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z};+)$, $X \mapsto |X|$

28. feladat Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak (a választ indokolni is kell).

(a) Egy véges algebra bármely kompatibilis osztályozásában minden osztály elemszáma azonos

(b) Két olyan homomorfizmus szorzata is lehet izomorfizmus, amelyek egyike sem izomorfizmus.

(c) Tetszőleges $\mathbb{A}$ algebra minden részalgebrája előáll egy alkalmas $\mathbb{A}$-ba vezető homomorfizmus képeként.

(d) Tetszőleges $\mathbb{A}$ algebra minden faktoralgebrája előáll egy alkalmas $\mathbb{A}$-ba vezető homomorfizmus képeként.

29. feladat Legyen R az $\mathbb{A} = (A;+)$ Abel-csoport endomorfizmusainak halmaza. Definiáljuk R-en a $\oplus$ és $\odot$ műveleteket a következőképpen: $a(\varphi \oplus \psi) = a\varphi + a\psi$, és $a(\varphi \odot \psi) = (a\varphi)\psi$ minden $\varphi, \psi \in R$ és $a \in A$ esetén. Mutassa meg, hogy $(R;\oplus,\odot)$ gyűrű. Ezt a gyűrűt nevezzük $\mathbb{A}$ *endomorfizmusgyűrűjének.*

30. feladat Találós kérdés: Abel-csoport, aminek az endomorfizmusgyűrűjébe be van ágyazva a valós számtest. Mi az?

31. feladat Döntse el, hogy normálosztója-e a H részcsoport a G csoportnak, és ha igen, határozza meg a G/H faktorcsoportot. Ha H nem normálosztó, akkor számítsa ki az általa generált N normálosztót, és határozza meg a G/N faktorcsoportot.

(a) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $H = [\overline{3}]$

(b) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $H = [\overline{4}]$

(c) $G = \mathbb{Z}_{21}^*$, $H = \{\overline{1}, \overline{8}, \overline{13}, \overline{20}\}$

(d) $G = \mathbb{Z}_{21}^*$, $H = [\overline{4}]$

(e) $G = \mathbb{C}$, $H = \mathbb{R}$

(f) $G = \mathbb{R}^*$, $H = \mathbb{R}^+$

(g) $G = Q$, $H = [-1]$

(h) $G = D_4$, $H = [a^2]$

(i) $G = D_4$, $H = [a^2, at]$

(j) $G = D_4$, $H = [a^2t]$

(k) $G = D_5$, $H = [a^2t]$

(l) $G = S_3$, $H = [(12)]$

(m) $G = S_4$, $H = V$

(n) $G = S_4$, $H = [(1234),(13)]$

32. feladat Határozza meg az alábbi csoportokban a konjugáltosztályokat. Ennek segítségével keresse meg az összes normálosztójukat, majd rajzolja fel a normálosztóhálót.

$$D_3,\ D_4,\ D_5,\ D_6,\ S_3,\ S_4,\ Q$$

33. feladat Adjon meg minél több olyan $\pi \in S_5$ permutációt, amelyre $\pi^{-1}(123)\pi = (345)$.

34. feladat Igazolja, hogy A_n-ben bármely két 4 hosszúságú ciklus konjugált (minden $n \geq 4$ esetén).

35. feladat Bizonyítsa be, hogy A_6-ban (12345) és (21345) nem konjugáltak.

36. feladat Igazolja, hogy egy G csoport H részcsoportja akkor és csak akkor normálosztó, ha minden $a, b \in G$ esetén $ab \in H \implies ba \in H$.

37. feladat Bizonyítsa be, hogy ha $N = \{1, n\}$ egy kételemű normálosztó a G csoportban, akkor n felcserélhető G minden elemével.

38. feladat Határozza meg a $\mathbb{Z}_{15}^*/[\overline{4}]$ faktorcsoport összes részcsoportját.

39. feladat Csoporthomomorfizmusok-e az alábbi leképezések? Amelyik igen, annak határozza meg a magját és az értékkészletét, majd írja fel a homomorfiatételből adódó izomorfizmust a mag szerinti faktorcsoport és a homomorf kép között.

(a) $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $z \mapsto |z|$

(b) $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$

(c) $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, $k \mapsto \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{13}$

(d) $\mathbb{Z} \to D_3$, $k \mapsto a^k$

(e) $\mathbb{Z}_{12} \to D_8$, $\overline{k} \mapsto a^{6k}$

(f) $D_4 \to \mathbb{Z}_2$, $a^k t^\ell \mapsto \overline{k+\ell}$

(g) $Q \to Q$, $x \mapsto x^2$

(h) $\mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{10}$, $\overline{k} \mapsto \overline{k+2}$

(i) $\mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{10}$, $\overline{k} \mapsto \overline{4k}$

(j) $\mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{15}$, $\overline{k} \mapsto \overline{6k}$

(k) $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_8$, $\overline{k} \mapsto \overline{3k}$

(l) $\mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_{16}^*$, $\overline{k} \mapsto \overline{3}^k$

(m) $\mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_{16}^*$, $\overline{k} \mapsto \overline{k}^3$

(n) $\mathbb{Z}_{20}^* \to \mathbb{Z}_{20}^*$, $x \mapsto x^2$

40. feladat Létezik-e injektív/szürjektív/nemtriviális homomorfizmus a megadott csoportok között? Ha létezik, akkor adja is meg az összeset.

(a) $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_8$
(b) $\mathbb{Z}_9 \to D_6$
(c) $\mathbb{Z}_9 \to Q$
(d) $\mathbb{Z}_4 \to Q$
(e) $D_4 \to S_4$
(f) $D_4 \to \mathbb{Z}_4$
(g) $\mathbb{Z}_{19}^* \to \mathbb{Z}_{11}^*$
(h) $Q \to D_6$
(i) $S_3 \to \mathbb{Z}_6$
(j) $S_{100} \to D_{100}$
(k) $\mathbb{Z} \to S_3$
(l) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

41. feladat Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak (a választ indokolni is kell).

(a) Ha egy csoport minden részcsoportja normálosztó, akkor a csoport kommutatív.

(b) Tetszőleges csoport minden kommutatív részcsoportja normálosztó.

(c) Tetszőleges csoport minden normálosztója kommutatív részcsoport.

(d) Tetszőleges csoport bármely 2 rendű részcsoportja normálosztó.

(e) Tetszőleges N, K, G csoportok esetén, ha $N \lhd K$ és $K \lhd G$, akkor $N \lhd G$.

(f) Ciklikus csoport minden faktorcsoportja is ciklikus.

(g) A konjugáltsági reláció minden csoport esetében kongruenciareláció.

(h) A konjugáltsági reláció minden Abel-csoport esetében kongruenciareláció.

(i) Ha egy csoportban két elem egymás konjugáltja, akkor a rendjük azonos.

(j) Egy csoport azonos rendű elemei egymás konjugáltjai.

42. feladat Döntse el, hogy a megadott R gyűrűben az I részhalmaz ideált alkot-e. Ha igen, akkor adja meg a hozzá tartozó kompatibilis osztályozást, valamint az R/I faktorgyűrű elemeit és művelettáblázatait.

(a) R a páros egész számok gyűrűje, I a 4-gyel osztható egészek halmaza

(b) $R = \mathbb{Z}[i]$, $I = \mathbb{Z}$

(c) $R = \mathbb{Z}[i]$, $I = \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] : 2 \mid a, b\}$

(d) $R = \mathbb{Z}[i]$, $I = \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] : 4 \mid a,\ 6 \mid b\}$

(e) $R = \mathbb{Z}[x]$, $I = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x] : 2 \mid a_0\}$

(f) $R = \mathbb{Z}[x]$, $I = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x] : 2 \mid a_1\}$

(g) $R = \mathbb{Z}[x]$, $I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) = 0\}$

(h) $R = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $I = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right) :\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$

43. feladat Gyűrűhomomorfizmusok-e az alább leképezések? Amelyik igen, annak határozza meg a magját és az értékkészletét, majd írja fel a homomorfiatételből adódó izomorfizmust a mag szerinti faktorcsoport és a homomorf kép között.

(a) $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $a + bi \mapsto a$
(b) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$
(c) $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, $f \mapsto f(0)$
(d) $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mapsto a_1$
(e) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}[x]/\langle x\rangle$, $a \mapsto 2a + \langle x\rangle$
(f) $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$, $a + bi \mapsto a^2 + b^2$
(g) $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$, $a + bi \mapsto a - b$
(h) $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_2$, $a + bi \mapsto \overline{a - b}$

44. feladat A 42. feladatban (azokban a részekben, ahol I ideál) adjon meg egy olyan $R \to S$ szürjektív gyűrűhomomorfizmust (alkalmas S gyűrűvel) amelynek magja éppen I, és határozza meg az R/I faktorgyűrűt ennek segítségével is. Konstruálja meg a 46. feladatbeli faktorgyűrűket is hasonlóképpen a homomorfiatétel segítségével.

45. feladat Határozza meg az R gyűrű T részhalmaza által generált ideálját.

(a) $R = \mathbb{Z}$, $T = \{18, 30\}$

(b) $R = \mathbb{Z}[i]$, $T = \{1 + i\}$

(c) $R = \mathbb{Z}[x]$, $T = \{4, x\}$

(d) $R = \mathbb{Q}[x]$, $T = \{x^2 - 4x + 3,\ x^2 + x - 2\}$

46. feladat Adja meg az alábbi faktorgyűrűk elemeit és művelettáblázatait.

(a) $\mathbb{Z}_4/\langle\overline{0}\rangle$
(b) $\mathbb{Z}_8/\langle\overline{4}\rangle$
(c) $\mathbb{Z}_{10}/\langle\overline{4}\rangle$
(d) $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + i\rangle$
(e) $\mathbb{Z}[x]/\langle 4, x\rangle$
(f) $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$

47. feladat Legyen $R = \mathbb{Z}^{2\times 2}$ és $I = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) : a, b, c, d \text{ páros} \right\}$. Mutassa meg, hogy I ideál az R gyűrűben, és határozza meg az R/I faktorgyűrűt. (Mik az elemei, hogyan végezzük rajtuk a műveleteket?)

48. feladat Legyen $R = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{smallmatrix} \right) : \ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$. Mutassa meg, hogy $I = \{A \in R \mid A^2 = 0\}$ ideál az R gyűrűben, és határozza meg az R/I faktorgyűrűt. (Mik az elemei, hogyan végezzük rajtuk a műveleteket?)

49. feladat Határozza meg a $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) gyűrűk ideáljait.

50. feladat Mutassa meg, hogy a $\mathbb{Z}$ gyűrű bármely m, n elemére

$$\langle m \rangle \cap \langle n \rangle = \langle \mathrm{lkkt}(m, n) \rangle \quad \text{és} \quad \langle m \rangle + \langle n \rangle = \langle \mathrm{lnko}(m, n) \rangle.$$

51. feladat Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak (a választ indokolni is kell).

(a) Egy egységelemes gyűrű valódi ideálja nem tartalmazhatja a gyűrű egységelemét.

(b) Egy kommutatív egységelemes gyűrű minden faktorgyűrűje is kommutatív és egységelemes.

(c) Egy gyűrű bármely I és J ideáljára $IJ = I \cap J$.

(d) Egy zérusosztómentes gyűrű minden faktorgyűrűje is zérusosztómentes.

(e) Kommutatív gyűrűben minden részgyűrű ideál.

52. feladat Számítsa ki az alábbi csoportokban az egyes elemek rendjét.

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \quad \mathbb{Z}_2 \times Q, \quad \mathbb{Z}_3 \times D_3, \quad \mathbb{Z}_2 \times S_3$$

53. feladat Melyek direkt felbonthatóak az alábbi csoportok közül? Amelyik felbontható, annak adja is meg egy felbontását.

$$S_5,\ A_5,\ \mathbb{Z}_{14},\ \mathbb{Z}_{15},\ \mathbb{Z}_{16},\ \mathbb{Z}_{14}^*,\ \mathbb{Z}_{15}^*,\ \mathbb{Z}_{16}^*,\ \mathbb{Z}_{24}^*,\ D_4,\ D_{10},\ D_{12},\ Q$$

54. feladat Sorolja fel (izomorfia erejéig) az összes 896, 897, 898, 899 és 900 elemű Abel-csoportot.

55. feladat Melyek izomorfak egymással az alábbi csoportok közül?

$$\mathbb{Z}_{300}, \quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{15}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{75}, \quad \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}, \quad \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{60}, \quad \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{30},$$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{75}, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{20}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{25}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{30}$$

56. feladat Melyek izomorfak egymással az alábbi csoportok közül?

$$\mathbb{Z}_6, \quad \mathbb{Z}_5^*, \quad \mathbb{Z}_9^*, \quad \mathbb{Z}_{12}^*, \quad \mathbb{Z}_{15}^*, \quad \mathbb{Z}_{24}^*, \quad \mathbb{Z}_{30}^*, \quad \mathbb{Z}_{24}/\left[\overline{6}\right], \quad \mathbb{Z}_{13}^*/\left[\overline{8}\right], \quad \mathbb{Z}_{15}^*/\left[\overline{14}\right], \quad \mathbb{Z}_{21}^*/\left[\overline{5}\right],$$

$$Q, \quad D_4, \quad D_4/\left[a^2\right], \quad D_4/\left[a^2, t\right], \quad D_6/\left[a^2\right], \quad D_6/\left[a^3\right], \quad D_9/\left[a^3, t\right]$$

57. feladat Melyek azok az n természetes számok, amelyekre izomorfia erejéig csak egy n-elemű Abel-csoport létezik?

58. feladat Igazolja, hogy $\mathbb{Q}$ direkt felbonthatatlan, míg $\mathbb{Q}^*$ direkt felbontható.

59. feladat Igazolja, hogy ha G véges Abel-csoport, és m osztja G rendjét, akkor G-ben van m rendű részcsoport.

60. feladat Bizonyítsa be, hogy ha U egy n-elemű halmaz, akkor a $(\mathcal{P}(U); \Delta, \cap)$ gyűrű izomorf a $\mathbb{Z}_2^n$ gyűrűvel.

61. feladat Bizonyítsa be, hogy az $R \times S$ gyűrű pontosan akkor egységelemes, ha R és S is az, és ilyenkor $R \times S$ minden ideálja $I \times J$ alakú, ahol $I \lhd R$ és $J \lhd S$.

62. feladat Igazolja, hogy minden integritástartomány direkt felbonthatatlan.

63. feladat Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak (a választ indokolni is kell).

(a) Tetszőleges G_1, G_2 csoportok esetén, ha $H_1 \le G_1$ és $H_2 \le G_2$, akkor $H_1 \times H_2 \le G_1 \times G_2$.

(b) Tetszőleges G_1, G_2 csoportok esetén $G_1 \times G_2$ minden részcsoportja előáll $H_1 \times H_2$ alakban, ahol $H_1 \le G_1$ és $H_2 \le G_2$.

(c) A $G_1 \times G_2$ csoport pontosan akkor kommutatív, ha G_1 és G_2 kommutatív.

(d) A $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{10}$ csoport minden elemének legfeljebb 30 a rendje.

(e) A $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ csoportnak négy részcsoportja van.

(f) Izomorfiától eltekintve egyetlen 2019 elemű Abel-csoport van.

64. feladat Hányféleképpen lehet kiszínezni a sakktábla mezőit két színnel, ha a forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek?

65. feladat Melyik ismert csoporttal izomorf a szabályos tetraéder forgáscsoportja?

66. feladat Határozza meg a p-Sylow részcsoportokat az alábbi csoportokban (a p prímszám minden szóba jövő értékére). Hány p-Sylow részcsoport van?

$$S_3,\ S_4,\ A_4,\ \mathbb{Z}_{24},\ \mathbb{Z}_{25},\ \mathbb{Z}_{14}^*,\ \mathbb{Z}_{15}^*,\ \mathbb{Z}_{21}^*,\ D_4,\ D_5,\ D_6,\ Q$$

67. feladat Bizonyítsa be, hogy nem létezik 30-elemű egyszerű csoport.