Absztrakt algebra dolgozat (minta)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

Név: ..............................................

**Tudnivalók:** Minden feladatnál indokolni kell a választ, illetve le kell írni a végeredményhez elvezető levezetést. Semmilyen segédeszköz nem használható, még függvénytáblázat, számológép, mobiltelefon sem. Bármiféle nem megengedett segédeszköz használata esetén a dolgozat automatikusan 0 pontos, javítási lehetőség nélkül. A rendelkezésre álló idő 90 perc.

---

**1. feladat (6 pont):** Határozza meg a $\mathbb{C}^*$ csoportban a $\left\{-1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ halmaz által generált részcsoportot.

**2. feladat (6 pont):** Oldja meg az $S_9$ csoportban a $(25)\,(234) \cdot x \cdot (678)\,(789) = (4276)\,(934)$ egyenletet. A végeredményt adja meg idegen ciklusok szorzataként és $2 \times 9$-es mátrixként is (minden elem alá a képét írva).

**3. feladat (8 pont):** Számítsa ki a $\mathbb{Z}_{15}^*$ csoportban az egyes elemek generátumait (azaz a ciklikus részcsoportokat), majd döntse el, hogy van-e nemciklikus valódi részcsoportja $\mathbb{Z}_{15}^*$-nak.

**4. feladat (8 pont):** Adjon meg egy nemtriviális $S_4 \to Q$ homomorfizmust.

**5. feladat (6 pont):** Sorolja fel (izomorfia erejéig) az összes 900-elemű Abel-csoportot.

**6. feladat (6 pont):** Számítsa ki az $\alpha^2 - 1$ elem multiplikatív inverzét a $\mathbb{Z}_5\,(\alpha)$ testben, ahol $\alpha$ gyöke az $x^4 + 3 \in \mathbb{Z}_5\,[x]$ irreducibilis polinomnak. (A végeredményt $a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d$ $(a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4\})$ alakban kell megadni.)

**7. feladat (10 pont):** Igazak-e a következő állítások? Röviden indokolja is a választ.

**(a)** Tetszőleges $G$ csoport és $x, y \in G$ esetén $x^2 = y^2 \implies x = y$.

**(b)** Az $S_4$ csoportban pontosan 6 másodrendű elem van.

**(c)** Minden páros permutáció rendje páros.

**(d)** A Klein-csoport direkt felbontható.

**(e)** A $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + x + 1)$ gyűrűben vannak zérusosztók.