Csoportok II

1. Mellékosztályok
2. Lagrange tétele
3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció
4. Normálosztó, faktorcsoport
5. Konjugálás
6. Homomorfizmus, homomorfiatétel
7. Permutációcsoportok
8. Direkt szorzat

1. Mellékosztályok
2. Lagrange tétele
3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció
4. Normálosztó, faktorcsoport
5. Konjugálás
6. Homomorfizmus, homomorfiatétel
7. Permutációcsoportok
8. Direkt szorzat

[Sz] XII/3; [F] II/2,3

Definíció

A G csoport nemüres részhalmazait **komplexusoknak** nevezzük.
Komplexusok szorzata és inverze:

$$KL = \{ab \colon a \in K, b \in L\}, \qquad K^{-1} = \left\{a^{-1} \colon a \in K\right\}.$$

Jelölés

$$aK := \{a\}K, \qquad Ka := K\{a\}$$

Állítás

A komplexusok szorzása asszociatív művelet.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás. $\square$

Tétel

Egy $H \subseteq G$ komplexus akkor és csak akkor részcsoport, ha

$$1 \in H, \quad HH \subseteq H, \quad H^{-1} \subseteq H.$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.4. Tétel. $\square$

Megjegyzés

Tetszőleges H részcsoportra $HH \subseteq H = \{1\}H \subseteq HH$, tehát $HH = H$, és hasonlóan $H^{-1} = H$ is teljesül.

Tétel

Legyen $H \leq G$, és definiáljunk a G halmazon egy $\sim$ relációt:

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció, és egy $a \in G$ elem ekvivalenciaosztálya

$$aH = \{ah \colon h \in H\}.$$

Biz.

- reflexivitás: $\forall a \in G: \ a^{-1}a \in H$
- szimmetria: $\forall a, b \in G: \ a^{-1}b \in H \implies b^{-1}a \in H$
- tranzitivitás: $\forall a, b, c \in G: \ a^{-1}b \in H$ és $b^{-1}c \in H \implies a^{-1}c \in H$

Egy $b \in G$ elem akkor és csak akkor van benne az $a \in G$ elem $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályában, ha

$$\begin{aligned} a \sim b \quad &\iff \quad a^{-1}b \in H \\ &\iff \quad \exists h \in H : a^{-1}b = h \\ &\iff \quad \exists h \in H : b = ah. \quad \square \end{aligned}$$

Definíció

Az aH halmazt az a elem H szerinti **baloldali mellékosztályának** nevezzük.

Tétel

Egy $H \leq G$ részcsoport szerinti baloldali mellékosztályok a G csoport egy osztályozását alkotják.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.7. Tétel.

Bármely ekvivalenciareláció esetén az ekvivalenciaosztályok osztályozást alkotnak. $\square$

Megjegyzés

Hasonló módon definiálhatóak a Ha **jobboldali mellékosztályok**, amelyek szintén osztályozást alkotnak.

Megjegyzés

Abel-csoportok esetén a baloldali és jobboldali mellékosztályok megegyeznek ($aH = Ha$). Nemkommutatív esetben is előfordulhat, hogy megegyeznek a baloldali és jobboldali mellékosztályok, de nem mindig van így.

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6, \ H = [\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}\}$:

$$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}, \ \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}, \ \overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$
$$\overline{3} + H = \{\overline{3}, \overline{0}\}, \ \overline{4} + H = \{\overline{4}, \overline{1}\}, \ \overline{5} + H = \{\overline{5}, \overline{2}\}$$

$$\overline{0} + H = \overline{3} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$$
$$\overline{1} + H = \overline{4} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$$
$$\overline{2} + H = \overline{5} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$

A mellékosztályozás: $\{\{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_6, \ H = [\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$:

$$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \overline{2} + H = \overline{4} + H$$
$$\overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} = \overline{3} + H = \overline{5} + H$$

A mellékosztályozás: $\{\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}\}$.

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = \left[\overline{5}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{5}\right\}$:

$$\overline{1} \cdot H = \left\{\overline{1}, \overline{5}\right\} = \overline{5} \cdot H$$
$$\overline{7} \cdot H = \left\{\overline{7}, \overline{11}\right\} = \overline{11} \cdot H$$

A mellékosztályozás: $\left\{\left\{\overline{1}, \overline{5}\right\}, \left\{\overline{7}, \overline{11}\right\}\right\}$.

- $G = \mathbb{Z}_{13}^*,\ H = \left[\overline{5}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\right\}$:

$$\overline{1} \cdot H = \left\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\right\} = \overline{5} \cdot H = \overline{8} \cdot H = \overline{12} \cdot H$$
$$\overline{2} \cdot H = \left\{\overline{2}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{11}\right\} = \overline{10} \cdot H = \overline{3} \cdot H = \overline{11} \cdot H$$
$$\overline{4} \cdot H = \left\{\overline{4}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{9}\right\} = \overline{7} \cdot H = \overline{6} \cdot H = \overline{9} \cdot H$$

A mellékosztályozás: $\left\{\left\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\right\}, \left\{\overline{2}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{11}\right\}, \left\{\overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{9}\right\}\right\}$.

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$
$$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$$
$$(12) \cdot H = \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.$$

A baloldali mellékosztályozás:
$\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

$$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, (23)\} = H \cdot (23),$$
$$H \cdot (13) = \{(13), (132)\} = H \cdot (132)$$
$$H \cdot (12) = \{(12), (123)\} = H \cdot (123),$$

A jobboldali mellékosztályozás:
$\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (132)\}, \{(12), (123)\}\}.$

Példa

Határozzuk meg a $V \leq S_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat, ahol V a **Klein-csoport**:

$$V = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

A baloldali és jobboldali mellékosztályok ebben az esetben egybeesnek:

$\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,

$\{(12), (34), (1324), (1423)\}$,

$\{(13), (24), (1234), (1432)\}$,

$\{(14), (23), (1243), (1342)\}$,

$\{(123), (134), (142), (243)\}$,

$\{(132), (143), (124), (234)\}$.

HF utánaszámolni.

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\text{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\text{id} \cdot H = \{\text{id}, t\} = t \cdot H,$$
  $$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
  $$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$
  $$f^3 \cdot H = \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\text{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \text{id} = \{\text{id}, t\} = H \cdot t,$$
  $$H \cdot f = \{f, tf\} = H \cdot tf$$
  $$H \cdot f^2 = \left\{f^2, tf^2\right\} = H \cdot tf^2$$
  $$H \cdot f^3 = \left\{f^3, tf^3\right\} = H \cdot tf^3.$$

  A jobboldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\text{id}, t\}, \{f, tf\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf^3\right\}\right\}.$

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$$
  $$t \cdot H = \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\} = tf \cdot H = tf^2 \cdot H = tf^3 \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás: $\left\{\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\}, \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\}\right\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = H \cdot f = H \cdot f^2 = H \cdot f^3,$$
  $$H \cdot t = \left\{t, tf^3, tf^2, tf\right\} = H \cdot tf = H \cdot tf^2 = H \cdot tf^3.$$

  A jobboldali mellékosztályozás: $\left\{\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\}, \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\}\right\}$.

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \leq \mathbb{C}^*$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$z \sim w \iff \frac{z}{w} \in \mathbb{R}^+ \iff z$ és w argumentuma megegyezik.

$z \in \mathbb{C}$ mellékosztálya:

$$z \cdot \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ \cdot z = \left\{ w \in \mathbb{C}^* \colon \arg w = \arg z \right\}.$$

A mellékosztályok kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a $[0, 2\pi)$ intervallum elemeinek.

A mellékosztályozás: $\{F_\alpha \colon \alpha \in [0, 2\pi)\}$, ahol F_α az az origóból kiinduló nyílt félegyenes, amely α szöget zár be a valós tengely pozitív felével.

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$A \sim B \iff \det\left(A^{-1}B\right) = 1 \iff \det(A) = \det(B),$$

  $$A \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) :\ \det(B) = \det(A)\}.$$

  Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}^*$ esetén legyen
  $D_\lambda = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) :\ \det(B) = \lambda\}$.

  A baloldali mellékosztályozás: $\{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$A \sim B \iff \det\left(AB^{-1}\right) = 1 \iff \det(A) = \det(B).$$

  Tehát a jobboldali mellékosztályozás megegyezik a baloldalival.

Példa

Az $\{1\} \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályok egyeleműek:

$$a\{1\} = \{1\}a = \{a\} \text{ minden } a \in G \text{ esetén.}$$

A mellékosztályozás: $\{\{a\} : a \in G\}$.

Példa

A $G \leq G$ részcsoporthoz egyetlen mellékosztály tartozik:

$$aG = Ga = G \text{ minden } a \in G \text{ esetén.}$$

A mellékosztályozás: $\{G\}$.

1. Mellékosztályok

2. Lagrange tétele

3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció

4. Normálosztó, faktorcsoport

5. Konjugálás

6. Homomorfizmus, homomorfiatétel

7. Permutációcsoportok

8. Direkt szorzat

[Sz] XII/3; [F] II/7

Definíció

A G véges csoport H részcsoportja szerinti baloldali (jobboldali) mellékosztályok számát H **indexének** nevezzük. Jelölése: $[G : H]$.

Tétel (Lagrange tétele)

Tetszőleges G véges csoport és $H \leq G$ részcsoport esetén

$$|G| = |H| \cdot [G : H]\,.$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.7. és 3.11. Tétel.

Bármely $a \in G$ esetén

$$\lambda_a \colon H \to aH,\ x \mapsto ax$$

bijekció (miért?), tehát $|aH| = |H|$.

A H szerinti baloldali mellékosztályozás a G halmazt $[G : H]$ darab $|H|$-elemű osztályra osztja, így $|G| = |H| \cdot [G : H]$. $\square$

Következmény

Véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.12. Következmény. $\square$

Következmény

Véges csoport bármely elemének rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.13. Következmény.
Csak azt kell észrevenni, hogy $o(a) = |[a]|$. $\square$

Következmény

Ha G egy n-elemű csoport, akkor minden $a \in G$ elemre $a^n = 1$.

Biz.

Legyen $|G| = n = o(a) \cdot \ell$ (itt ℓ nem más, mint a $[a]$ részcsoport indexe).
Ekkor $a^n = a^{o(a)\cdot\ell} = \left(a^{o(a)}\right)^{\ell} = 1^{\ell} = 1$. $\square$

Következmény

Ha G egy n-elemű csoport, akkor minden $a \in G$ elemre $a^{-1} = a^{n-1}$.

Következmény

Minden prímrendű csoport ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha $|G| = p$ prímszám, akkor minden $a \in G$ elemre $o\,(a) \in \{1, p\}$.
Ha $a \neq 1$, akkor $o\,(a) = p$, és így $[a] = G$. $\square$

A kis elemszámú csoportok (izomorfia erejéig) a következők:

1. egyelemű: $\{1\}$;
2. kételemű: $\mathbb{Z}_2$;
3. háromelemű: $\mathbb{Z}_3$;
4. négyelemű: $\mathbb{Z}_4$, V;
5. ötelemű: $\mathbb{Z}_5$;
6. hatelemű: $\mathbb{Z}_6$; $D_3 \cong S_3$;
7. hételemű: $\mathbb{Z}_7$.

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{7}] = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{9}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{5}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{0}, \overline{8}, \overline{4}\}$
- $[\overline{9}] = \{\overline{0}, \overline{9}, \overline{6}, \overline{3}\}$
- $[\overline{10}] = \{\overline{0}, \overline{10}, \overline{8}, \overline{6}, \overline{4}, \overline{2}\}$
- $[\overline{11}] = \{\overline{0}, \overline{11}, \overline{10}, \overline{9}, \overline{8}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1}\}$
- $[\overline{0}] = \{\overline{0}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

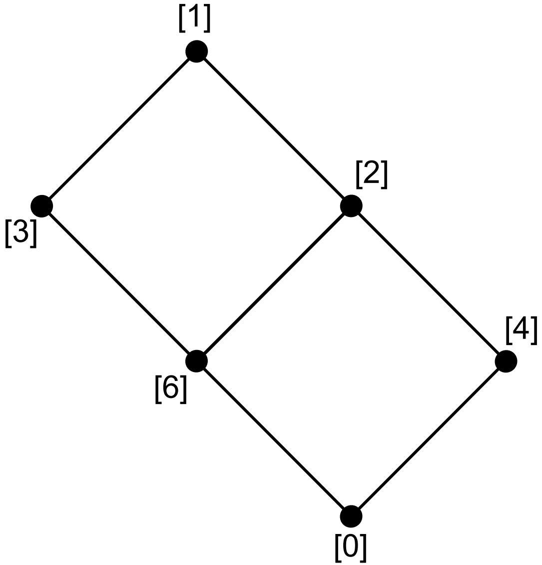
Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\} = [\overline{5}] = [\overline{7}] = [\overline{11}]$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} = [\overline{10}]$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\} = [\overline{9}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\} = [\overline{8}]$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{0}] = \{\overline{0}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

A részcsoportháló:



Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$
- $\left[f^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\}$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $\left[f^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$

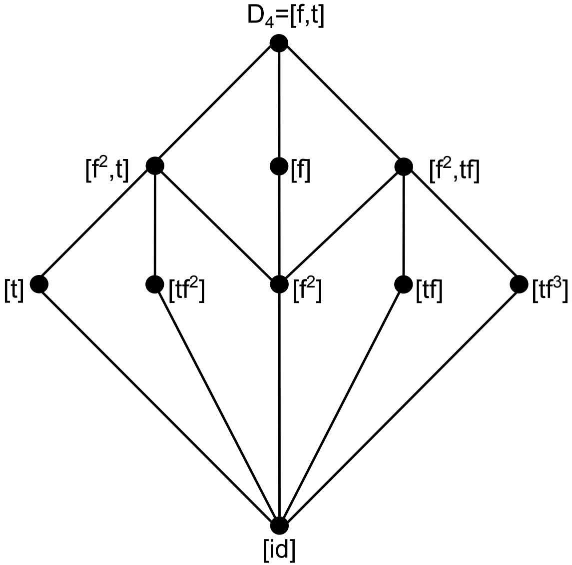
További részcsoportok:

- $\left[f^2, t\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} = \left[f^2, tf^2\right] = \left[t, tf^2\right] \cong V$
- $\left[f^2, tf\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} = \left[f^2, tf^3\right] = \left[tf, tf^3\right] \cong V$
- $[f, t] = D_4$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

A részcsoportháló:



Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\} = [\overline{16}]$
- $[\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{20}, \overline{16}, \overline{17}\} = [\overline{17}]$
- $[\overline{8}] = \{\overline{1}, \overline{8}\}$
- $[\overline{10}] = \{\overline{1}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{13}, \overline{4}, \overline{19}\} = [\overline{19}]$
- $[\overline{13}] = \{\overline{1}, \overline{13}\}$
- $[\overline{20}] = \{\overline{1}, \overline{20}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$$\mathbb{Z}_{21}^* = \left\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\right\}$$

A ciklikus részcsoportok:

- $\left[\overline{1}\right] = \left\{\overline{1}\right\}$
- $\left[-\overline{1}\right] = \left\{\overline{1}, -\overline{1}\right\}$
- $\left[\overline{8}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{8}\right\}$
- $\left[-\overline{8}\right] = \left\{\overline{1}, -\overline{8}\right\}$
- $\left[\overline{4}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{4}, -\overline{5}\right\}$
- $\left[\overline{2}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, \overline{8}, -\overline{10}\right\}$
- $\left[-\overline{2}\right] = \left\{\overline{1}, -\overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, -\overline{8}, \overline{10}\right\}$
- $\left[-\overline{4}\right] = \left\{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{4}, -\overline{4}, \overline{5}, -\overline{5}\right\}$

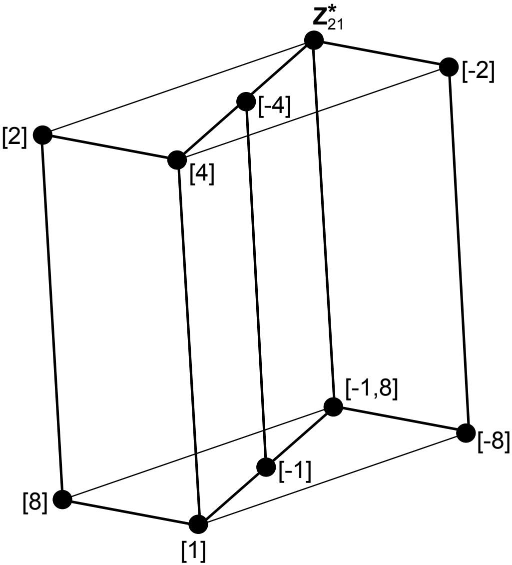
További részcsoportok:

- $\left[-\overline{1}, \overline{8}\right] = \left\{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{8}, -\overline{8}\right\} \cong V$
- $\mathbb{Z}_{21}^*$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

A részcsoportháló:



1. Mellékosztályok

2. Lagrange tétele

3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció

4. Normálosztó, faktorcsoport

5. Konjugálás

6. Homomorfizmus, homomorfiatétel

7. Permutációcsoportok

8. Direkt szorzat

[Sz] X/3; [F] I/7

Példa

A $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ osztályozás *kompatibilis* az alábbi művelettel:

$\mathbb{G} =$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

Bármely két szín szorzata jóldefiniált:

$$\color{red}\blacksquare \color{black} * \color{red}\blacksquare \color{black} = \color{blue}\blacksquare\color{black}, \quad \color{red}\blacksquare \color{black} * \color{blue}\blacksquare \color{black} = \color{blue}\blacksquare\color{black}, \quad \color{blue}\blacksquare \color{black} * \color{red}\blacksquare \color{black} = \color{red}\blacksquare\color{black}, \quad \color{blue}\blacksquare \color{black} * \color{blue}\blacksquare \color{black} = \color{blue}\blacksquare\color{black}.$$

Példa

A $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ osztályozás *kompatibilis* az alábbi művelettel:

$\mathbb{G} =$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

A megfelelő faktorgrupoid:

$*$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$
${\color{red}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$
${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$

Példa

A $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ osztályozás *kompatibilis* az alábbi művelettel:

$$\mathbb{G} \;=\; \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

A megfelelő faktorgrupoid:

$$\mathbb{G}/\sim \;=\; \begin{array}{c|cc} * & \{a\} & \{b, c, d, e\} \\ \hline \{a\} & \{b, c, d, e\} & \{b, c, d, e\} \\ \{b, c, d, e\} & \{a\} & \{b, c, d, e\} \end{array}$$

Példa

A $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ osztályozás *kompatibilis* az alábbi művelettel:

$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

A megfelelő faktorgrupoid:

$$\mathbb{G}/\sim \;=\; \begin{array}{c|cc} * & A & B \\ \hline A & B & B \\ B & A & B \end{array}, \quad \text{ahol } A = \{a\} \text{ és } B = \{b, c, d, e\}$$

Pl. $B * B = \overline{b} * \overline{b} = \overline{b * b} = \overline{c} = B$.

Példa

A $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$ osztályozás *kompatibilis* az alábbi művelettel:

$\mathbb{G} =$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

A megfelelő faktorgrupoid:

$*$	$\color{red}{\blacksquare}$	$\color{blue}{\blacksquare}$	$\color{green}{\blacksquare}$
$\color{red}{\blacksquare}$	$\color{red}{\blacksquare}$	$\color{blue}{\blacksquare}$	$\color{red}{\blacksquare}$
$\color{blue}{\blacksquare}$	$\color{red}{\blacksquare}$	$\color{red}{\blacksquare}$	$\color{blue}{\blacksquare}$
$\color{green}{\blacksquare}$	$\color{red}{\blacksquare}$	$\color{green}{\blacksquare}$	$\color{green}{\blacksquare}$

Példa

A $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$ osztályozás *kompatibilis* az alábbi művelettel:

$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

A megfelelő faktorgrupoid:

$$\mathbb{G}/\sim \; = \begin{array}{c|ccc} * & \{a, c\} & \{b, e\} & \{d\} \\ \hline \{a, c\} & \{a, c\} & \{b, e\} & \{a, c\} \\ \{b, e\} & \{a, c\} & \{a, c\} & \{b, e\} \\ \{d\} & \{a, c\} & \{d\} & \{d\} \end{array}$$

Példa

A $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$ osztályozás *kompatibilis* az alábbi művelettel:

$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

A megfelelő faktorgrupoid:

$$\mathbb{G}/\sim = \begin{array}{c|ccc} * & A & B & D \\ \hline A & A & B & A \\ B & A & A & B \\ D & A & D & D \end{array}$$, ahol $A = \{a, c\}$, $B = \{b, e\}$ és $D = \{d\}$

Példa

Kompatibilis-e a $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\}$ osztályozás az alábbi művelettel?

$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

Nem, pl. $a \sim b$ és $c \sim d$, de $a * c \nsim b * d$
(azaz $\blacksquare * \blacksquare$ nem jóldefiniált).

Definíció

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ egy grupoid, és legyen $\mathcal{C}$ egy osztályozás az A halmazon.
Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ **kompatibilis osztályozása** az $\mathbb{A}$ grupoidnak, ha tetszőleges $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ osztályokhoz létezik egy olyan $D \in \mathcal{C}$ osztály, amelyre

$$\{\, a_1 * a_2 \mid a_1 \in C_1,\ a_2 \in C_2 \,\} \subseteq D.$$

Definíció

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ egy grupoid, és legyen $\sim$ egy ekvivalenciareláció az A halmazon.
Azt mondjuk, hogy $\sim$ **kongruenciarelációja** az $\mathbb{A}$ grupoidnak, ha tetszőleges $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ elemek esetén

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \sim b_1 \\ a_2 \sim b_2 \end{array}\right\} \implies a_1 * a_2 \ \sim\ b_1 * b_2.$$

Állítás

Egy ekvivalenciareláció akkor és csak akkor kongruencia, ha a hozzá tartozó osztályozás kompatibilis.

Definíció

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ egy grupoid, legyen $\sim$ egy kongruenciarelációja $\mathbb{A}$-nak, és legyen $\mathcal{C} = A/\!\sim$ a megfelelő kompatibilis osztályozás. Értelmezzük a kongruenciaosztályok halmazán a $*$ műveletet a következőképpen: tetszőleges $C_1, C_2 \in A/\!\sim$ esetén legyen $C_1 * C_2$ az az egyértelműen meghatározott $D \in A/\!\sim$ kongruenciaosztály, amelyre

$$\{\, a_1 * a_2 \mid a_1 \in C_1,\, a_2 \in C_2 \,\} \subseteq D.$$

Az így kapott $\mathbb{A}/\!\sim = (A/\!\sim; *)$ grupoidot nevezzük az $\mathbb{A}$ algebra $\sim$ kongruencia szerinti **faktorgrupoidjának**.

Megjegyzés

Általában $\overline{a}$ jelöli az $a \in A$ elem $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályát. Ezzel a jelöléssel a faktorgrupoid művelete így definiálható:

$$\overline{a_1} * \overline{a_2} \;=\; \overline{a_1 * a_2}.$$

Az osztályozás kompatibilitása garantálja, hogy ez a művelet jóldefiniált, azaz az eredmény nem függ a reprezentánsok választásától.

1. Mellékosztályok
2. Lagrange tétele
3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció
4. Normálosztó, faktorcsoport
5. Konjugálás
6. Homomorfizmus, homomorfiatétel
7. Permutációcsoportok
8. Direkt szorzat

[Sz] XII/4; [F] II/8,9

Tétel

Tetszőleges $H \leq G$ részcsoportra az alábbiak ekvivalensek:

(1) *a H szerinti baloldali mellékosztályozás megegyezik a H szerinti jobboldali mellékosztályozással;*

(2) *$Hg = gH$ minden $g \in G$ elemre;*

(3) *$g^{-1}Hg = H$ minden $g \in G$ elemre;*

(4) *$g^{-1}Hg \subseteq H$ minden $g \in G$ elemre.*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.1. Tétel. $\square$

Definíció

A fenti ekvivalens feltételeket kielégítő részcsoportokat **normálosztóknak** nevezzük. Jelölés: $H \triangleleft G$.

Példa

- Minden G csoportra $\{1\} \triangleleft G$ és $G \triangleleft G$. Ha nincs más normálosztó, akkor azt mondjuk, hogy G **egyszerű** csoport.
- Abel-csoportban minden részcsoport normálosztó.
- Lásd a korábbi példákat.
- Minden 2 indexű részcsoport normálosztó.

Tétel

Bármely legalább kételemű G csoport esetén az alábbiak ekvivalensek:

(1) *G egyszerű Abel-csoport.*

(2) *G-nek csak két részcsoportja van: $\{1\}$ és G.*

(3) *G prímrendű ciklikus csoport (azaz $G \cong \mathbb{Z}_p$ valamely p prímszámra).*

Biz.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Világos.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Tetszőleges $1 \neq g \in G$ esetén $[g] = G$, tehát G ciklikus.

Ha G végtelen, akkor $G \cong \mathbb{Z}$, de ennek vannak nemtriviális valódi részcsoportjai.

Ha G véges, akkor $G \cong \mathbb{Z}_n$ valamely $n \geq 2$ természetes számra.
A $\mathbb{Z}_n$ csoportnak annyi részcsoportja van, ahány osztója n-nek, ezért n csak prím lehet.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Világos. $\square$

Tétel

Ha $N \triangleleft G$, akkor az N szerinti mellékosztályozás kompatibilis osztályozása G-nek.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(1) Tétel.

Igaz-e, hogy tetszőleges aN,bN mellékosztályokhoz létezik egy cN mellékosztály, amelyre $aN \cdot bN \subseteq cN$? Igen, éspedig $c = ab$ jó lesz:

$$aNbN = abNN \subseteq abN = cN. \qquad \square$$

Megjegyzés

Mivel $NN = N$, valójában nem csak $aNbN \subseteq abN$, hanem $aNbN = abN$ is teljesül, így a faktorcsoportbeli szorzás megegyezik a komplexusszorzással. (Grupoidokra általában ez nem igaz.)

Tétel

Ha $N \triangleleft G$, akkor az N szerinti mellékosztályozáshoz tartozó faktorgrupoid csoport. Ezt a G csoport N normálosztója szerinti **faktorcsoportjának** *nevezzük és G/N-nel jelöljük.*

Biz.

[F] II. fejezet, 2.18. Tétel.
A faktorcsoportbeli szorzás megegyezik a komplexusszorzással,amiről tudjuk, hogy asszociatív.

A G/N faktorcsoport egységeleme maga N:

$\forall aN \in G/N: \; aN{\cdot}N = a{\cdot}NN = aN$ és $N{\cdot}aN = N{\cdot}Na = NN{\cdot}a = Na = aN$.

Az $aN \in G/N$ mellékosztály inverze $a^{-1}N$:

$$aN \cdot a^{-1}N = Naa^{-1}N = NN = N \text{ és } a^{-1}N \cdot aN = Na^{-1}aN = NN = N.$$

$\square$

Tétel

Ha $\sim$ kongruenciája a G csoportnak, akkor $N := \{a \in G \colon a \sim 1\} \lhd G$, és a $\sim$ kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az N normálosztó szerinti mellékosztályozás.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.7. Állítás + 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$
- N tartalmazza az egységelemet: $1 \sim 1 \implies 1 \in N$
- N zárt az inverzképzésre:
  $a \in N \implies a \sim 1 \implies a^{-1} \sim 1^{-1} = 1 \implies a^{-1} \in N$
- N normálosztó: ha $g \in G$ és $n \in N$, akkor

$$\left.\begin{array}{r} g^{-1} \sim g^{-1} \\ n \sim 1 \\ g \sim g \end{array}\right\} \implies g^{-1}ng \sim g^{-1}1g = g^{-1}g = 1 \implies g^{-1}ng \in N$$

- osztályozások megegyezése:
  $a \sim b \iff ab^{-1} \sim 1 \iff ab^{-1} \in N \iff aN = bN.$ $\square$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{0}, \overline{3}\} \lhd \mathbb{Z}_6$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \left\{ \{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\} \right\}$$

$$\mathbb{Z}_6/N = \begin{array}{c|ccc} + & \{\overline{0},\overline{3}\} & \{\overline{1},\overline{4}\} & \{\overline{2},\overline{5}\} \\ \hline \{\overline{0},\overline{3}\} & \{\overline{0},\overline{3}\} & \{\overline{1},\overline{4}\} & \{\overline{2},\overline{5}\} \\ \{\overline{1},\overline{4}\} & \{\overline{1},\overline{4}\} & \{\overline{2},\overline{5}\} & \{\overline{0},\overline{3}\} \\ \{\overline{2},\overline{5}\} & \{\overline{2},\overline{5}\} & \{\overline{0},\overline{3}\} & \{\overline{1},\overline{4}\} \end{array} \cong \begin{array}{c|ccc} + & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{2} & \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{array} = \mathbb{Z}_3$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon \mathbb{Z}_6/N \to \mathbb{Z}_3, \quad \{\overline{0}, \overline{3}\} \mapsto \widehat{0},\ \{\overline{1}, \overline{4}\} \mapsto \widehat{1},\ \{\overline{2}, \overline{5}\} \mapsto \widehat{2}$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \lhd \mathbb{Z}_6$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \left\{ \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} \right\}$$

$$\mathbb{Z}_6/N \; = \; \begin{array}{c|cc} + & \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} & \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} \\ \hline \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} & \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} & \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} \\ \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} & \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} & \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \end{array} \; \cong \; \begin{array}{c|cc} + & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{0} \end{array} \; = \; \mathbb{Z}_2$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon \mathbb{Z}_6/N \to \mathbb{Z}_2, \quad \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \mapsto \widehat{0},\ \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} \mapsto \widehat{1}$

Példa

Határozzuk meg az $N = \left\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\right\} \triangleleft \mathbb{Z}_{13}^*$ részcsoporthoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_{13}^*/N = \left\{\left\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\right\}, \left\{\overline{2}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{11}\right\}, \left\{\overline{4}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{9}\right\}\right\} = \left\{\overline{1}\cdot N, \overline{2}\cdot N, \overline{4}\cdot N\right\}$$

$$\mathbb{Z}_{13}^*/N \;=\; \begin{array}{c|ccc} \cdot & \overline{1}\cdot N & \overline{2}\cdot N & \overline{4}\cdot N \\ \hline \overline{1}\cdot N & \overline{1}\cdot N & \overline{2}\cdot N & \overline{4}\cdot N \\ \overline{2}\cdot N & \overline{2}\cdot N & \overline{4}\cdot N & \overline{1}\cdot N \\ \overline{4}\cdot N & \overline{4}\cdot N & \overline{1}\cdot N & \overline{2}\cdot N \end{array} \;\cong\; \begin{array}{c|ccc} + & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{2} & \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{array} \;=\; \mathbb{Z}_3$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon \mathbb{Z}_{13}^*/N \to \mathbb{Z}_3, \quad \overline{1}\cdot N \mapsto \widehat{0},\ \overline{2}\cdot N \mapsto \widehat{1},\ \overline{4}\cdot N \mapsto \widehat{2}$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{1}, \overline{5}\} \lhd \mathbb{Z}_{12}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\}\} = \{\overline{1} \cdot N, \overline{7} \cdot N\}$$

$$\mathbb{Z}_{12}^*/N = \begin{array}{c|cc} \cdot & \overline{1} \cdot N & \overline{7} \cdot N \\ \hline \overline{1} \cdot N & \overline{1} \cdot N & \overline{7} \cdot N \\ \overline{7} \cdot N & \overline{7} \cdot N & \overline{1} \cdot N \end{array} \cong \begin{array}{c|cc} + & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{0} \end{array} = \mathbb{Z}_2$$

Izomorfizmus: $\varphi \colon \mathbb{Z}_{12}^*/N \to \mathbb{Z}_2, \quad \overline{1} \cdot N \mapsto \widehat{0},\ \overline{7} \cdot N \mapsto \widehat{1}$

Példa

Határozzuk meg a $V \triangleleft S_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$S_4/V \cong \ ?$$

$|S_4/V| = 6 \implies S_4/V \cong \mathbb{Z}_6$ vagy $S_4/V \cong S_3$

A két esetet megkülönbözteti a kommutativitás.

$(12)\,V \cdot (13)\,V = (123)\,V, \qquad (13)\,V \cdot (12)\,V = (132)\,V$ és

$(123)\,(132)^{-1} = (132) \notin V \implies (123)\,V \neq (132)\,V,$

tehát S_4/V nem kommutatív, így $S_4/V \cong S_3$.

Példa

Határozzuk meg az $N = [f] \triangleleft D_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$D_4/N = \{\{\text{forgatások}\}\,, \{\text{tükrözések}\}\}$$

$$D_4/N \;=\; \begin{array}{c|cc} \cdot & \{\text{forg.}\} & \{\text{tükr.}\} \\ \hline \{\text{forg.}\} & \{\text{forg.}\} & \{\text{tükr.}\} \\ \{\text{tükr.}\} & \{\text{tükr.}\} & \{\text{forg.}\} \end{array} \;\cong\; \begin{array}{r|rr} \cdot & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \;\cong\; \mathbb{Z}_2$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon D_4/N \to \{\pm 1\}\,, \quad \{\text{forg.}\} \mapsto 1,\ \{\text{tükr.}\} \mapsto -1$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \triangleleft \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\} = \{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Legyen $T = \{z \in \mathbb{C} \colon \; |z| = 1\}$; ekkor $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong (T; \cdot)$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon \; (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \to (T; \cdot)\,, \quad F_\alpha \mapsto \operatorname{cis}(\alpha)$

- φ bijektív: világos
- φ felcserélhető a műveletekkel:

$$(F_\alpha \cdot F_\beta)\,\varphi = F_{\alpha+\beta}\varphi = \operatorname{cis}(\alpha+\beta) = \operatorname{cis}(\alpha) \cdot \operatorname{cis}(\beta) = F_\alpha\varphi \cdot F_\beta\varphi$$

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cong \mathbb{R}^*$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*, \quad D_\lambda \mapsto \lambda$

- φ bijektív: világos
- φ felcserélhető a műveletekkel:

$$(D_\lambda \cdot D_\mu)\,\varphi = D_{\lambda\cdot\mu}\varphi = \lambda \cdot \mu = D_\lambda\varphi \cdot D_\mu\varphi$$

Példa

Határozzuk meg az $\{1\} \triangleleft G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/\{1\} = \{\{a\} : a \in G\} \cong G$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon G/\{1\} \to G, \quad \{a\} \mapsto a$

Példa

Határozzuk meg a $G \triangleleft G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/G = \{G\} \cong \{1\}$$

1. Mellékosztályok
2. Lagrange tétele
3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció
4. Normálosztó, faktorcsoport
5. Konjugálás
6. Homomorfizmus, homomorfiatétel
7. Permutációcsoportok
8. Direkt szorzat

[Sz] XII/4,5; [F] II/8

Definíció

- Az $a \in G$ elem g-vel való **konjugáltján** a $g^{-1}ag$ elemet értjük.
- Az $\alpha_g\colon G \to G$, $x \mapsto g^{-1}xg$ leképezést g-vel való **konjugálásnak** nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy a és b **konjugáltak**, ha létezik olyan $g \in G$ elem, amelyre $b = g^{-1}ag$.

Állítás

*Minden $g \in G$-re $\alpha_g\colon G \to G$ izomorfizmus (**belső automorfizmus**).*

Biz.

[F] II/8. fejezet.

$\square$

Állítás

*A konjugáltsági reláció ekvivalenciareláció; a megfelelő ekvivalenciaosztályokat **konjugáltosztályoknak** nevezzük.*

Biz.

HF

$\square$

Állítás

- *Egy $N \leq G$ részcsoport pontosan akkor normálosztó, ha zárt a konjugálásra: $\forall g \in G \;\; \forall n \in N : \;\; g^{-1}ng \in N$.*
- *Normálosztók metszete normálosztó.*
- *Egy $B \subseteq G$ halmazt tartalmazó legszűkebb normálosztó mindazokból az elemekből áll, amelyek megkaphatók B elemeiből szorzás, inverzképzés és konjugálások véges számú alkalmazásával. Ezt nevezzük a B halmaz által* **generált normálosztónak***.*

Biz.

HF $\square$

Példa

- Abel-csoportban minden elem csak saját magával konjugált (a konjugáltsági reláció az egyenlőség reláció).
- Bármely csoportban az egységelem csak saját magához konjugált.
- Két mátrix akkor és csak akkor konjugált a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ csoportban, ha az $\mathbb{R}^n$ vektortér ugyanazon lineáris transzformációját adják meg (különböző bázisokban).

Állítás

Két S_n-beli permutáció akkor és csak akkor konjugált, ha ugyanaz a **ciklusszerkezetük** *(azaz minden ℓ-re ugyanannyi ℓ hosszúságú ciklust tartalmaznak).*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.16. Állítás.

Legyen $\pi = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_k)\,(b_1\, b_2\, \ldots\, b_l) \ldots \in S_n$ és $\sigma \in S_n$. Állítjuk, hogy ekkor

$$\sigma^{-1}\pi\sigma \stackrel{?}{=} (a_1\sigma\; a_2\sigma\; \ldots a_k\sigma)\,(b_1\sigma\; b_2\sigma\; \ldots b_l\sigma) \ldots .$$

Szorozzunk balról σ-val (ez ekvivalens átalakítás):

$$\pi\sigma \stackrel{?}{=} \sigma\,(a_1\sigma\; a_2\sigma\; \ldots a_k\sigma)\,(b_1\sigma\; b_2\sigma\; \ldots b_l\sigma) \ldots .$$

Egy tetszőleges a_i elem képe a baloldali és a jobboldali permutáció mellett egyaránt $a_{i\oplus 1}\sigma$. (HF) $\square$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoport által generált N normálosztót és az S_3/N faktorcsoportot.

A konjugáltak: id, (23), (12), (13).

A konjugáltak által generált részcsoport: $N = [(12), (13), (23)] = S_3$.

A faktorcsoport: $S_3/S_3 = \{S_3\} \cong \{1\}$.

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.
A konjugáltosztályok:

- $\{\mathrm{id}\}$ (1 db)
- $(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (8 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (3 db)

Ha $N \lhd S_4$, akkor egyrészt $|N|$ a fenti számok közül néhánynak az összege (az 1-nek mindenképpen szerepelnie kell az összegben), másrészt $|N|$ osztója 24-nek. A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\mathrm{id}\}$;
- $|N| = 1 + 3 = 4, \quad N = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = V$;
- $|N| = 1 + 3 + 8 = 12, \quad N = \{\mathrm{id}, (12)(34), \ldots, (123), \ldots\} = A_4$;
- $|N| = 24$, $N = S_4$.

Mind a négy esetben valóban normálosztót kapunk.
(Ez nem automatikus, ellenőrizni kell!)

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoport által generált N normálosztót és a D_4/N faktorcsoportot.

A konjugáltak:

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{id}^{-1} \cdot t \cdot \mathrm{id} & = t & t^{-1} \cdot t \cdot t & = t \\
f^{-1} \cdot t \cdot f & = tf^2 & (tf)^{-1} \cdot t \cdot tf & = tf^2 \\
f^{-2} \cdot t \cdot f^2 & = t & \left(tf^2\right)^{-1} \cdot t \cdot tf^2 & = t \\
f^{-3} \cdot t \cdot f^3 & = tf^2 & \left(tf^3\right)^{-1} \cdot t \cdot tf^3 & = tf^2
\end{array}$$

A konjugáltak által generált részcsoport:
$N = \left[t, tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong V$.

A faktorcsoport: $D_4/N = \left\{\left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\}, \left\{f, f^3, tf, tf^3\right\}\right\} \cong \mathbb{Z}_2$.

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok: $\{\mathrm{id}\}$, $\left\{f^2\right\}$, $\left\{f, f^3\right\}$, $\left\{t, tf^2\right\}$, $\left\{tf, tf^3\right\}$.

Ha $N \triangleleft D_4$, akkor N a fenti halmazok közül néhánynak az uniója ($\{\mathrm{id}\}$ mindenképpen szerepel), másrészt $|N|$ osztója 8-nak.
A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\mathrm{id}\}$;
- $|N| = 1 + 1 = 2, \quad N = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\} \cong \mathbb{Z}_2$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \left\{\mathrm{id}, f^2, f, f^3\right\} \cong \mathbb{Z}_4$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong V$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} \cong V$;
- $|N| = 8$, $N = D_4$.

Mind a hat esetben valóban normálosztót kapunk.
(Ez nem automatikus, ellenőrizni kell!)

Rajzoljuk fel a normálosztóhálót!

1. Mellékosztályok
2. Lagrange tétele
3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció
4. Normálosztó, faktorcsoport
5. Konjugálás
6. Homomorfizmus, homomorfiatétel
7. Permutációcsoportok
8. Direkt szorzat

[Sz] XII/4; [F] II/9,10

$\leftrightarrow$	igaz	hamis
igaz	igaz	hamis
hamis	hamis	igaz

$\cdot$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

izomorf csoportok

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\otimes$		
		
		

Az $\mathbb{A} = (\{\overline{0}, \overline{1}\}\,;+)$ és a $\mathbb{B} = (\{$  ,  $\};\otimes)$ csoportok szerkezete ugyanaz: ha $\mathbb{A}$ művelettáblázatában

minden $\overline{0}$-t átnevezünk  -ra, és minden $\overline{1}$-t átnevezünk  -ra,

akkor éppen $\mathbb{B}$ művelettáblázatát kapjuk:

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\xrightarrow{\text{átnevezés}}$

$\otimes$		
		
		

Ezt az „átnevezést” a

$\varphi\colon\ \{\overline{0}, \overline{1}\} \to \{$  ,  $\}, \quad \overline{0} \mapsto$  , $\overline{1} \mapsto$ 

leképezéssel írhatjuk le. Az átnevezés „jogossága” pedig a következőképpen fogalmazható meg:

$$\forall a_1, a_2 \in \{\overline{0}, \overline{1}\} : \quad (a_1 + a_2)\,\varphi \;=\; (a_1\varphi) \otimes (a_2\varphi)\,.$$

Definíció

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ és $\mathbb{B} = (B; \oplus)$ két grupoid. Azt mondjuk, hogy a $\varphi \colon A \to B$ leképezés **homomorfizmus** $\mathbb{A}$-ból $\mathbb{B}$-be, ha φ felcserélhető a műveletekkel, azaz

$$\forall a_1, a_2 \in A: \quad (a_1 * a_2)\,\varphi \;=\; a_1\varphi \,\oplus\, a_2\varphi.$$

Ha létezik $\varphi \colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ szürjektív homorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbb{B}$ **homomorf képe** $\mathbb{A}$-nak.

Speciális homomorifzmusok:

- bijektív homomorfizmus = **izomorfizmus**,
- injektív homomorfizmus = **beágyazás**,
- $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ homomorfizmus = **endomorfizmus**,
- bijektív $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ homomorfizmus = **automorfizmus**.

Példa

- $\varphi\colon\ (\mathbb{R}^+;\cdot) \to (\mathbb{R};+)\,,\ \ x \mapsto \log x$ izomorfizmus
- $\varphi\colon\ (\mathbb{C};+) \to (\mathbb{C};+)\,,\ \ z \mapsto \overline{z}$ automorfizmus
- $\varphi\colon\ (\mathbb{C};\cdot) \to (\mathbb{C};\cdot)\,,\ \ z \mapsto \overline{z}$ automorfizmus
- $\varphi\colon\ (\mathbb{C};+) \to (\mathbb{C};+)\,,\ \ z \mapsto \operatorname{Re} z$ endomorfizmus
- $\varphi\colon\ (\mathbb{C};+) \to (\mathbb{R};+)\,,\ \ z \mapsto \operatorname{Re} z$ szürjektív homomorfizmus
- $\varphi\colon\ (\mathbb{C};\cdot) \to (\mathbb{R};\cdot)\,,\ \ z \mapsto \operatorname{Re} z$ nem homomorfizmus
- $\varphi\colon\ (\mathbb{R};\cdot) \to (\mathbb{C};\cdot)\,,\ \ x \mapsto x$ beágyazás
- $\varphi\colon\ (\mathbb{R}^{n\times n};\cdot) \to (\mathbb{R};\cdot)\,,\ \ M \mapsto \det M$ szürjektív homomorfizmus
- $\varphi\colon\ (C\,[0,1]\,;+) \to (\mathbb{R};+)\,, f \mapsto \int\limits_0^1 f(x)\,dx$ szürjektív homomorfizmus

Tétel

Ha $\varphi\colon G \to H$ *csoporthomomorfizmus, akkor* $1_G\varphi = 1_H$ *és* $g^{-1}\varphi = (g\varphi)^{-1}$ *minden* $g \in G$*-re.*

Biz.

HF [Sz] XII. fejezet, 1.7. Tétel. $\square$

Tétel

Ha $\varphi\colon G \to H$ *csoporthomomorfizmus, akkor* $G\varphi$ *részcsoportja* H*-nak.*

Biz.

A $G\varphi = \{g\varphi\colon g \in G\} \subseteq H$ halmaz zárt a szorzásra:

$$\forall a, b \in G: \; a\varphi \cdot b\varphi = (ab)\,\varphi \in G\varphi.$$

A fenti tételből következik, hogy $G\varphi$ tartalmazza H egységelemét és zárt az inverzképzésre is. $\square$

Következmény

Csoport homomorf képe csoport.

Tétel

Homomorfizmusok szorzata homomorfizmus, izomorfizmusok szorzata izomorfizmus, izomorfizmus inverze izomorfizmus.

Biz.

HF [Sz] X. fejezet, 1.13.és 1.14. Tétel. $\square$

Definíció

Legyen N normálosztója a G csoportnak. Ekkor a

$$\nu\colon G \to G/N,\ a \mapsto aN$$

leképezés szürjektív homomorfizmus (HF), amelyet az N normálosztóhoz tartozó **természetes homomorfizmusnak** nevezünk.

A természetes homomorfizmus mutatja, hogy minden faktorcsoport előáll homomorf képként. Ennek a fordítottja is igaz: minden homomorf kép faktorcsoport (legalábbis izomorfia erejéig).

Definíció

A $\varphi\colon G \to H$ csoporthomomorfizmus **magja** :

$$\ker\varphi := \{g \in G : g\varphi = 1\}.$$

Tétel (Csoportelméleti homomorfiatétel)

Ha $\varphi\colon G \to H$ *csoporthomomorfizmus, akkor* $\ker\varphi \lhd G$ *és*

$$G/\ker\varphi \cong G\varphi \leq H.$$

Tétel (Csoportelméleti homomorfiatétel)

Ha $\varphi\colon G \to H$ *csoporthomomorfizmus, akkor* $\ker\varphi \lhd G$ *és*

$$G/\ker\varphi \cong G\varphi \leq H.$$

Biz.

Legyen $N = \ker\varphi = \{g \in G : g\varphi = 1\}$. Először ellenőrizzük, hogy N valóban normálosztó.

- Zárt a szorzásra:

$$a\varphi = b\varphi = 1 \implies (ab)\,\varphi = a\varphi \cdot b\varphi = 1 \cdot 1 = 1.$$

- Tartalmazza az egységelemet:

$$1\varphi = 1.$$

- Zárt az inverzképzésre:

$$a\varphi = 1 \implies \left(a^{-1}\right)\varphi = \left(a\varphi\right)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

- Zárt a konjugálásra:

$$a\varphi = 1 \implies \left(g^{-1}ag\right)\varphi = g^{-1}\varphi \cdot a\varphi \cdot g\varphi = (g\varphi)^{-1} \cdot 1 \cdot g\varphi = 1.$$

Biz. (folyt.)

Megmutatjuk, hogy $\forall a, b \in G: \; a\varphi = b\varphi \iff aN = bN$:

$$
\begin{aligned}
a\varphi = b\varphi \quad &\iff \quad 1 = a\varphi \cdot (b\varphi)^{-1} = a\varphi \cdot b^{-1}\varphi = \left(ab^{-1}\right)\varphi \\
&\iff \quad ab^{-1} \in N \\
&\iff \quad aN = bN.
\end{aligned}
$$

Tehát a $\psi\colon G/N \to G\varphi$, $aN \mapsto a\varphi$ leképezés egy jóldefiniált bijekció.

Igazoljuk, hogy ψ homomorfizmus: tetszőleges $aN, bN \in G/N$ mellékosztályokra

$$(aN \cdot bN)\,\psi = (abN)\,\psi = (ab)\,\varphi = a\varphi \cdot b\varphi = (aN)\,\psi \cdot (bN)\,\psi.$$

$\square$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$, $\overline{k} \mapsto \widehat{k}$ homomorfizmus.
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies k_1 \equiv k_2 \pmod 3$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = \widehat{k_1 + k_2} = \widehat{k_1} + \widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon \widehat{k} = \widehat{0}\right\} = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 3 \mid k\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\} \lhd \mathbb{Z}_6$
- értékkészlet: $\mathbb{Z}_6\varphi = \left\{\widehat{k} \colon \overline{k} \in \mathbb{Z}_6\right\} = \mathbb{Z}_3$
- izomorfizmus:
  $\psi\colon \mathbb{Z}_6/\left\{\overline{0}, \overline{3}\right\} \to \mathbb{Z}_3, \quad \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\} \mapsto \widehat{0},\ \left\{\overline{1}, \overline{4}\right\} \mapsto \widehat{1},\ \left\{\overline{2}, \overline{5}\right\} \mapsto \widehat{2}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$, $\overline{k} \mapsto 5\widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies 5k_1 \equiv 5k_2 \pmod{10}$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = 5\widehat{k_1 + k_2} = 5\widehat{k_1} + 5\widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag:
  $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 5\widehat{k} = \widehat{0}\right\} = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 10 \mid 5k\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\} \lhd \mathbb{Z}_6$
- értékkészlet: $\mathbb{Z}_6\varphi = \left\{5\widehat{k} \colon \overline{k} \in \mathbb{Z}_6\right\} = \left\{\widehat{0}, \widehat{5}\right\} \leq \mathbb{Z}_{10}$
- izomorfizmus:
  $\psi\colon \mathbb{Z}_6/\left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\} \to \mathbb{Z}_{10}, \quad \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\} \mapsto \widehat{0}, \;\; \left\{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\right\} \mapsto \widehat{5}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ homomorfizmus.
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:
  $(z \cdot w)\,\varphi = \frac{z \cdot w}{|z \cdot w|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|} = z\varphi \cdot w\varphi$
- mag: $\ker \varphi = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \colon \frac{z}{|z|} = 1 \right\} = \{ z \in \mathbb{C}^* \colon z = |z| \} = \mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$
- értékkészlet: $\mathbb{C}^*\varphi = \left\{ \frac{z}{|z|} \colon z \in \mathbb{C}^* \right\} = T \leq \mathbb{C}^*$
- izomorfizmus: $\psi\colon \mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ \to T, \quad F_\alpha \mapsto \operatorname{cis}(\alpha)$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det(A)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(A \cdot B)\,\varphi = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = A\varphi \cdot B\varphi$

- mag: $\ker\varphi = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

- értékkészlet: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\,\varphi = \{\det(A) : A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\} = \mathbb{R}^*$

- izomorfizmus: $\psi\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*, \quad D_\lambda \mapsto \lambda$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon G \to H$, $g \mapsto 1$ homomorfizmus (triviális homomorfizmus).
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus: $(g_1 \cdot g_2)\,\varphi = 1 = 1 \cdot 1 = g_1\varphi \cdot g_2\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \{g \in G : g\varphi = 1\} = G \lhd G$
- értékkészlet: $G\varphi = \{g\varphi \colon g \in G\} = \{1\} \leq H$
- izomorfizmus: $\psi\colon G/G \to \{1\}, \quad G \mapsto 1$

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \leq S_5$. Ez lehetetlen, mert $7 \nmid 120$ (Lagrange).

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_6\varphi \leq S_5$. Ekkor $\mathbb{Z}_6\varphi = [\pi]$, ahol $\pi \in S_5$ hatodrendű permutáció. Ilyen létezik, például $\pi = (123)\,(45)$, és ekkor $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$, $\overline{k} \mapsto \pi^k$ valóban injektív homomorfizmus:

- φ jóldefiniált és injektív:
  $\overline{k_1}\varphi = \overline{k_2}\varphi \iff \pi^{k_1} = \pi^{k_2} \iff k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \iff \overline{k_1} = \overline{k_2}$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = \pi^{k_1+k_2} = \pi^{k_1} \cdot \pi^{k_2} = \overline{k_1}\varphi \cdot \overline{k_2}\varphi$

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_{24} \to S_3$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_{24}/\ker\varphi \cong S_3$. Ez lehetetlen, mert $\mathbb{Z}_{24}$ Abel-csoport, és így minden faktorcsoportja is az.

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon D_4 \to V$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $D_4/\ker\varphi \cong V$. Ekkor $\ker\varphi$ kételemű normálosztó D_4-ben. Ilyen csak egy van: $\{\mathrm{id}, f^2\}$, és valóban, $D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \cong V$ például az alábbi ψ izomorfizmus mellett:

$$\psi\colon D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \to V, \quad \begin{array}{ll} \{\mathrm{id}, f^2\} \mapsto \mathrm{id}, & \{f, f^3\} \mapsto (12)(34), \\ \{t, tf^2\} \mapsto (13)(24), & \{tf, tf^3\} \mapsto (14)(23). \end{array}$$

Ebből kapjuk a kívánt $\varphi\colon D_4 \to V$ homomorfizmust:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{id}\,\varphi = \mathrm{id}, & f\,\varphi = (12)(34), & t\,\varphi = (13)(24), & tf\,\varphi = (14)(23), \\ f^2\,\varphi = \mathrm{id}, & f^3\,\varphi = (12)(34), & tf^2\,\varphi = (13)(24), & tf^3\,\varphi = (14)(23). \end{array}$$

Példa

Adjunk meg egy nemtriviális $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk találni egy izomorfizmust D_4 valamelyik faktorcsoportja és $\mathbb{Z}_4$ egy nemtriviális részcsoportja között.

D_4 faktorcsoportjai:	
(1)	$D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$
(2)	$D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \cong V$
(3)	$D_4/\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$D_4/\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\} \cong \mathbb{Z}_2$
(5)	$D_4/\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong \mathbb{Z}_2$
(6)	$D_4/D_4 \cong \{1\}$

$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:	
(a)	$\mathbb{Z}_4$
(b)	$\{\overline{0}, \overline{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(c)	$\{\overline{0}\} \cong \{1\}$

(3) $\to$ (b): $\quad \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \mapsto \overline{0}, \quad \{t, tf, tf^2, tf^3\} \mapsto \overline{2}$

$$\mathrm{id}\,\varphi = \overline{0} \qquad f\,\varphi = \overline{0} \qquad f^2\,\varphi = \overline{0} \qquad f^3\,\varphi = \overline{0}$$

$$t\,\varphi = \overline{2} \qquad tf\,\varphi = \overline{2} \qquad tf^2\,\varphi = \overline{2} \qquad tf^3\,\varphi = \overline{2}$$

Példa

Adjunk meg egy nemtriviális $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Mivel $\mathbb{Z}_{15}/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$, a feladatunk találni egy izomorfizmust $\mathbb{Z}_{15}$ valamelyik faktorcsoportja és $\mathbb{Z}_6$ egy nemtriviális részcsoportja között.

$\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai:		$\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai:	
(1)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}\right\} \cong \mathbb{Z}_{15}$	(a)	$\mathbb{Z}_6$
(2)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0},\overline{5},\overline{10}\right\} \cong \mathbb{Z}_5$	(b)	$\{\widehat{0},\widehat{2},\widehat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$
(3)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\right\} \cong \mathbb{Z}_3$	(c)	$\{\widehat{0},\widehat{3}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$	(d)	$\{\widehat{0}\} \cong \{1\}$

(3) $\to$ (b): $\left\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\right\} \mapsto \widehat{0}$, $\left\{\overline{1},\overline{4},\overline{7},\overline{10},\overline{13}\right\} \mapsto \widehat{2}$, $\left\{\overline{2},\overline{5},\overline{8},\overline{11},\overline{14}\right\} \mapsto \widehat{4}$

$$
\begin{array}{lllll}
\overline{0}\,\varphi = \widehat{0} & \overline{3}\,\varphi = \widehat{0} & \overline{6}\,\varphi = \widehat{0} & \overline{9}\,\varphi = \widehat{0} & \overline{12}\,\varphi = \widehat{0} \\
\overline{1}\,\varphi = \widehat{2} & \overline{4}\,\varphi = \widehat{2} & \overline{7}\,\varphi = \widehat{2} & \overline{10}\,\varphi = \widehat{2} & \overline{13}\,\varphi = \widehat{2} \\
\overline{2}\,\varphi = \widehat{4} & \overline{5}\,\varphi = \widehat{4} & \overline{8}\,\varphi = \widehat{4} & \overline{11}\,\varphi = \widehat{4} & \overline{14}\,\varphi = \widehat{4}
\end{array}
$$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ *és* $N \triangleleft G$, *akkor* $N \triangleleft HN \leq G$ *és* $H \cap N \triangleleft H \leq G$, *továbbá*

$$HN/N \cong H/H{\cap}N.$$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = S_4$, $H = S_3$, $N = V$ szereposztással.

- $H \cap N = S_3 \cap V = \{\mathrm{id}\}$
- $H/H{\cap}N = S_3/\{\mathrm{id}\}$
- $HN = S_3V = S_4$
- $HN/N = S_4/V$
- izomorfia: $S_4/V \cong S_3/\{\mathrm{id}\} \cong S_3$

Tétel (Megfeleltetési tétel)

Ha $N \lhd G$*, akkor* G/N *részcsoportjai kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a* G *csoport* N*-et tartalmazó részcsoportjainak. A* $K \leq G$ *részcsoportnak (ahol* $N \leq K$*) az* $F := K/N \leq G/N$ *részcsoport felel meg.*

Tétel (II. izomorfiatétel)

Ha $K \leq G$ *és* $F \leq G/N$ *a fentiek szerint egymásnak megfelelő részcsoportok, akkor* $K \lhd G \iff F \lhd G/N$*. Ha ez teljesül, akkor* $(G/N)/F \cong G/K$*, azaz*

$$(G/N)/(K/N) \cong G/K.$$

1. Mellékosztályok

2. Lagrange tétele

3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció

4. Normálosztó, faktorcsoport

5. Konjugálás

6. Homomorfizmus, homomorfiatétel

7. Permutációcsoportok

8. Direkt szorzat

[Sz] XII/5; [F] II/12

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.
A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon\, G \to S_G,\; g \mapsto \rho_g.$$

- Minden $g \in G$ esetén $\rho_g \in S_G$ (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ρ injektív: $g \neq h \implies 1 \cdot g = 1\rho_g \neq 1\rho_h = 1 \cdot h \implies \rho_g \neq \rho_h$
- ρ homomorfizmus: $\rho_{gh} \overset{?}{=} \rho_g \circ \rho_h$
  $\forall x \in G : x\rho_{gh} = x\,(gh) = (xg)\,h = (xg)\,\rho_h = (x\rho_g)\,\rho_h = x\,(\rho_g \circ \rho_h)$

Legyen $H = G\rho \leq S_G$; ekkor ρ izomorfizmus G és H között.

□

Példa

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_6$ csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_6$ esetén $\rho_a \colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $\overline{x} \mapsto \overline{x} + \overline{a}$.

$$\rho_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\rho_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{2}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{2}\,\overline{4})\,(\overline{1}\,\overline{3}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{3}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{3})\,(\overline{1}\,\overline{4})\,(\overline{2}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{4}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{4}\,\overline{2})\,(\overline{1}\,\overline{5}\,\overline{3})$$

$$\rho_{\overline{5}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{5}\,\overline{4}\,\overline{3}\,\overline{2}\,\overline{1})$$

Példa

Írjuk fel az S_3 csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\pi \in S_3$ esetén $\rho_\pi \colon S_3 \to S_3,\ x \mapsto x \cdot \pi$.

$$\rho_{\mathrm{id}} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\rho_{(12)} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ (12) & \mathrm{id} & (132) & (123) & (23) & (13) \end{pmatrix}$$

$$= \big(\mathrm{id}\ (12)\big)\big((13)\ (132)\big)\big((23)\ (123)\big)$$

$$\rho_{(123)} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ (123) & (13) & (23) & (12) & (132) & \mathrm{id} \end{pmatrix}$$

$$= \big(\mathrm{id}\ (123)\ (132)\big)\big((12)\ (13)\ (23)\big)$$

$$\vdots$$

Tétel

Egy S_n-beli permutáció transzpozíciók szorzataként való felírásában a tényezők számának paritása egyértelműen meghatározott.

Biz.

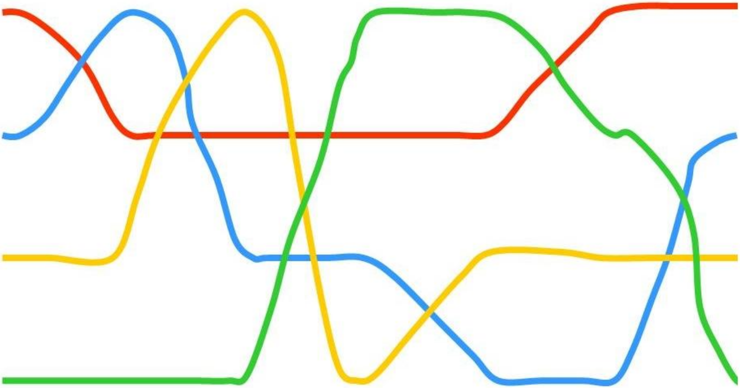
[Sz] XII/5. fejezet.
Tegyük fel, hogy

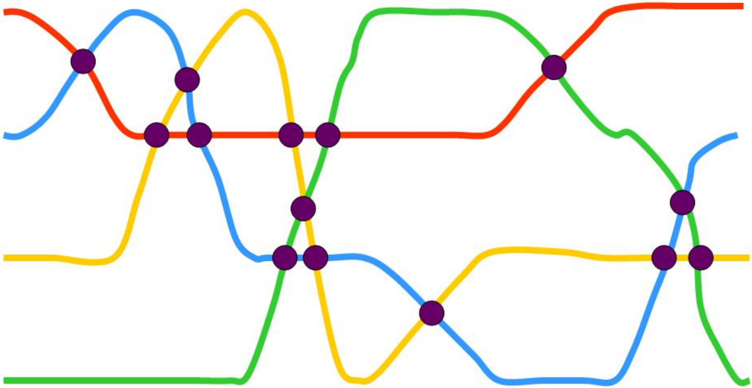
$$\tau_1\tau_2\cdots\tau_{2k+1} = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2l},$$

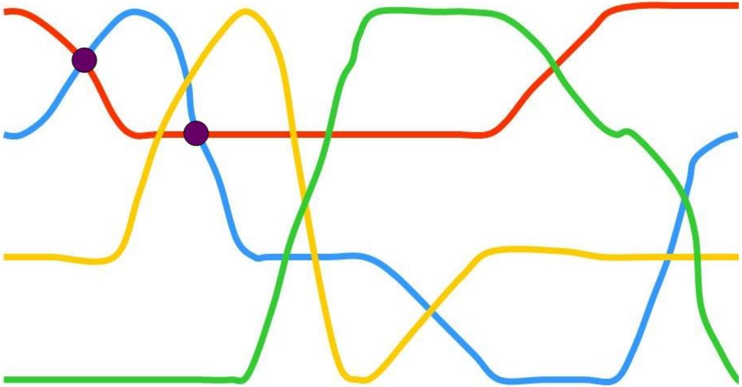
ahol mindegyik τ_i és σ_j transzpozíció. Ekkor az identikus permutáció előáll páratlan sok transzpozíció szorzataként:

$$\mathrm{id} = \tau_1\tau_2\cdots\tau_{2k+1}\sigma_{2l}\cdots\sigma_2\sigma_1.$$

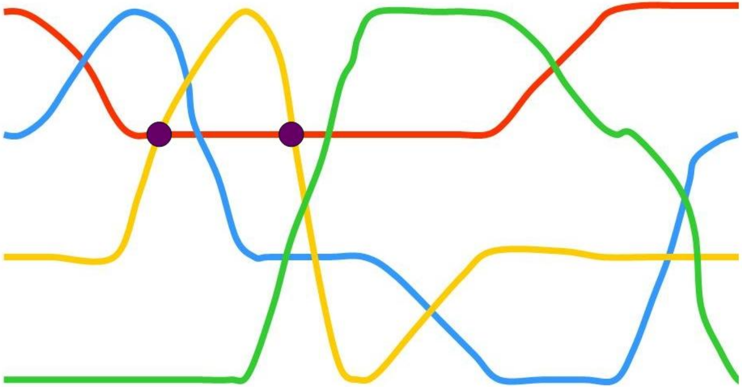
Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen.



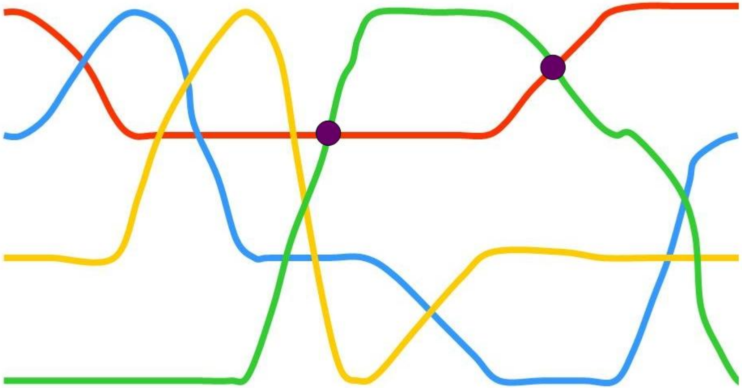




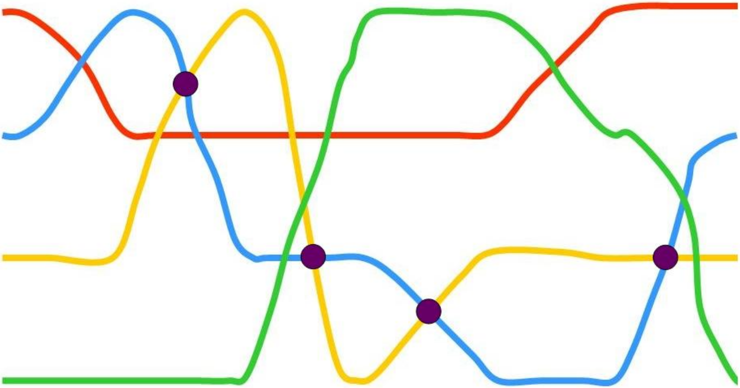
metszéspontok: 2



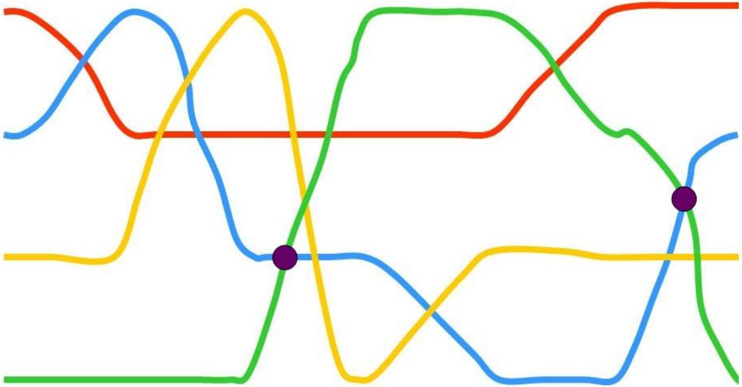
metszéspontok: $2 + 2$



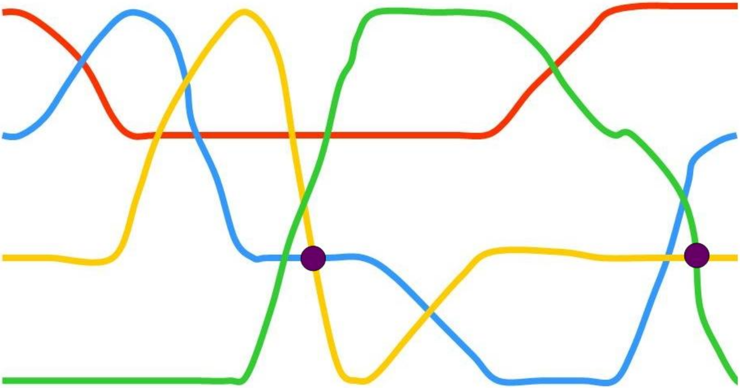
metszéspontok: $2 + 2 + 2$



metszéspontok: $2+2+2+4$

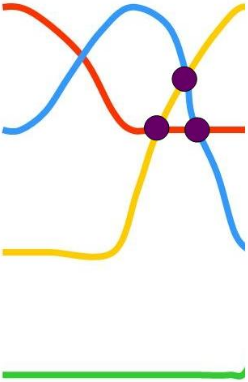


metszéspontok: $2 + 2 + 2 + 4 + 2$

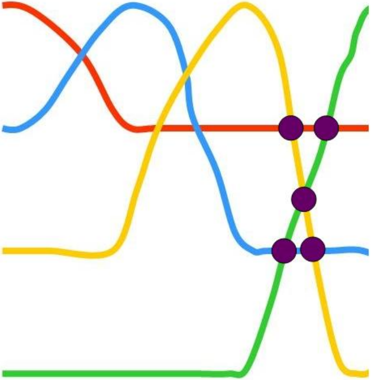


metszéspontok: $2+2+2+4+2+2 \equiv 0 \pmod 2$

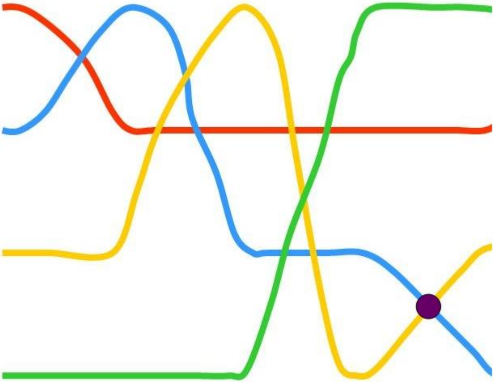
metszéspontok: 1



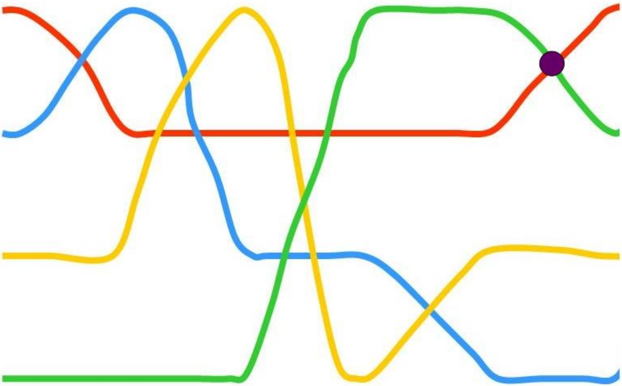
metszéspontok: $1 + 3$



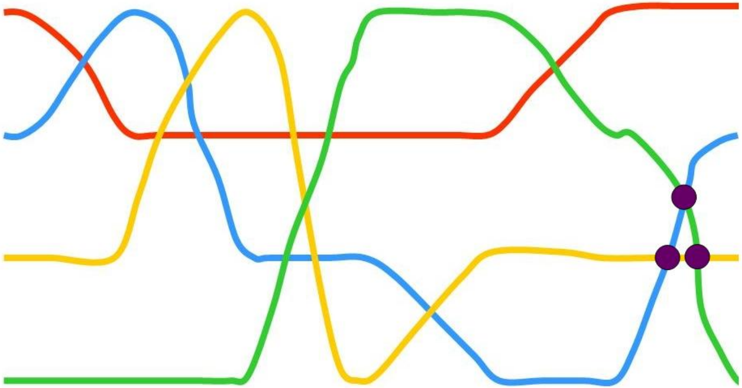
metszéspontok: $1 + 3 + 5$



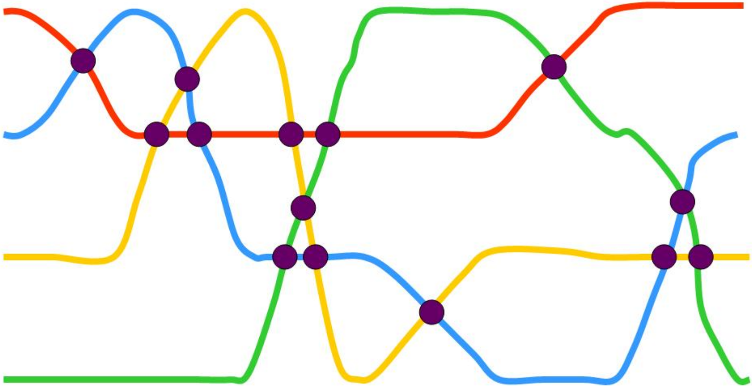
metszéspontok: $1 + 3 + 5 + 1$



metszéspontok: $1 + 3 + 5 + 1 + 1$



metszéspontok: $1 + 3 + 5 + 1 + 1 + 3 \equiv$ cserék száma $\pmod 2$



metszéspontok: $0 \equiv$ cserék száma $\pmod 2$

Állítás

Permutációk szorzatának a paritása a következőképpen alakul:

$$\begin{array}{lclcl} \textit{páros} & \cdot & \textit{páros} & = & \textit{páros} \\ \textit{páratlan} & \cdot & \textit{páratlan} & = & \textit{páros} \end{array} \qquad \begin{array}{lclcl} \textit{páros} & \cdot & \textit{páratlan} & = & \textit{páratlan} \\ \textit{páratlan} & \cdot & \textit{páros} & = & \textit{páratlan} \end{array}$$

Biz.

Szorzáskor a permutációt előállító transzpozíciók száma összeadódik.

$\square$

Következmény

A páros hosszúságú ciklusok páratlan permutációk, míg a páratlan hosszúságú ciklusok páros permutációk.

Biz.

Láttuk korábban, hogy egy k hosszúságú ciklus felírható $k-1$ transzpozíció szorzataként. $\square$

Példa

Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$: páros
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$: páratlan
- $(123)\,(4567)$: páratlan
- $(12)\,(3456)\,(78)$: páratlan
- $(12)\,(345)\,(6789)$: páros

Következmény

A páros permutációk részcsoportot (sőt, normálosztót) alkotnak S_n-ben. Ezt a csoportot n-edfokú **alternáló csoportnak** *nevezzük, és A_n-nel jelöljük.*

Biz.

Értelmezzük egy π permutáció előjelét a következőképpen:

$$\operatorname{sgn} \pi := \begin{cases} 1, & \text{ha } \pi \text{ páros;} \\ -1, & \text{ha } \pi \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ homomorfizmus, és magja éppen A_n.

□

Következmény

$[S_n : A_n] = 2$ *és így* $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

Tétel

Az alternáló csoportot generálják a 3 hosszúságú ciklusok.

Biz.

$(ab)\,(ac) = (abc)\,, \qquad (ab)\,(cd) = (ab)\,(ac) \cdot (ac)\,(cd) = (abc)\,(acd)$ □

Tétel

Ha $n \geq 5$, akkor A_n egyszerű csoport.

Megjegyzés

Ha $n = 4$, akkor A_n nem egyszerű, mert $V \triangleleft A_4$. Az A_3,A_2 csoportok persze egyszerűek.

Következmény

Ha $n \neq 4$, akkor S_n egyetlen nemtriviális normálosztója A_n.

Biz.

Legyen N nemtriviális normálosztója S_n-nek ($n \neq 4$).
Ekkor $N \cap A_n \triangleleft A_n$, így A_n egyszerűsége miatt két eset lehetséges:

- $N \cap A_n = A_n$ esetén $A_n \leq N$, ezért $N = A_n$.
- $N \cap A_n = \{\mathrm{id}\}$ esetén $|N| = 2$, mert

$$N \cong N/\{\mathrm{id}\} \cong N/N \cap A_n \cong NA_n/A_n = S_n/A_n.$$

  Ez viszont lehetetlen, hiszen ekkor $N \setminus \{\mathrm{id}\}$ egyelemű konjugáltosztály lenne S_n-ben. $\square$

1. Mellékosztályok
2. Lagrange tétele
3. Kompatibilis osztályozás, kongruenciareláció
4. Normálosztó, faktorcsoport
5. Konjugálás
6. Homomorfizmus, homomorfiatétel
7. Permutációcsoportok
8. Direkt szorzat

[Sz] X/4; [F] II/13,14

Definíció

Az A és B csoportok **külső direkt szorzatán** azt a csoportot értjük, melynek tartóhalmaza $A \times B$, művelete pedig a következőképpen van definiálva:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)\,.$$

Állítás

Csoportok külső direkt szorzata csoport.

Biz.

Az asszociativitás világos, az egységelem $(1_A, 1_B)$, az $(a, b) \in A \times B$ elem inverze pedig $\left(a^{-1}, b^{-1}\right)$.

$\square$

Példa

- Síkbeli vektorok az összeadás műveletével: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})\,; \Delta) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Állítás

Az $A \times B$ *külső direkt szorzatban az* $A_1 := \{(a, 1_B) : a \in A\}$ *és* $B_1 := \{(1_A, b) : b \in B\}$ *részcsoportokra teljesülnek a következők:*

(1) $A_1, B_1 \lhd A \times B$;

(2) $A_1 \vee B_1 = A_1 B_1 = A \times B$;

(3) $A_1 \wedge B_1 = A_1 \cap B_1 = \{(1_A, 1_B)\}$.

Biz.

[F] II/13. fejezet.

$\square$

Definíció

Azt mondjuk, hogy a G csoport az A és B részcsoportjainak **belső direkt szorzata**, ha

(1) $A, B \lhd G$;

(2) $A \vee B = AB = G$;

(3) $A \wedge B = A \cap B = \{1_G\}$.

Tétel

A G csoport az A és B részcsoportjainak belső direkt szorzata akkor és csak akkor, ha

(a) *G minden eleme előáll ab* $(a \in A, b \in B)$ *alakban;*

(b) *a fenti előállítás egyértelmű;*

(c) $\forall a \in A \, \forall b \in B: \; ab = ba.$

Biz.

[F] II/13. fejezet.

□

Tétel

A külső és a belső direkt szorzat „lényegében" ugyanaz:

$$G \cong A \times_k B \iff \exists A_1, B_1 \leq G: \; A_1 \cong A, \; B_1 \cong B \text{ és } G = A_1 \times_b B_1.$$

Biz.

[F] II/13. fejezet. □

Definíció

Azt mondjuk, hogy a G csoport az $A_1, \ldots, A_n$ részcsoportjainak **belső direkt szorzata**, ha

(1) $A_1, \ldots, A_n \lhd G$;

(2) $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n = G$;

(3) $A_i \cap (A_1 \cdot \ldots \cdot A_{i-1} \cdot A_{i+1} \cdot \ldots \cdot A_n) = \{1_G\}$ minden i-re.

Tétel

A G csoport az $A_1, \ldots, A_n$ részcsoportjainak belső direkt szorzata akkor és csak akkor, ha

(a) *G minden eleme előáll $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ $(a_i \in A_i)$ alakban;*

(b) *a fenti előállítás egyértelmű;*

(c) $\forall a_i \in A_i \, \forall a_j \in A_j : \; a_i a_j = a_j a_i$ *minden $i \neq j$ esetén.*

Tétel

Ha n és m relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.

[Sz] X/4.5. Tétel. (gyűrűkre, kínai maradéktétel segítségével)

$\square$

Állítás

Ha n és m nem relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \ncong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.

Legyen $d = \operatorname{lnko}(n, m) > 1$; ekkor $\operatorname{lkkt}(n, m) = \frac{nm}{d} < nm$.
Tetszőleges $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ elemre

$$\frac{nm}{d}\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\frac{m}{d} \cdot n\overline{a}, \frac{n}{d} \cdot m\overline{b}\right) = \left(\overline{0}, \overline{0}\right),$$

ezért $\left(\overline{a}, \overline{b}\right)$ rendje legfeljebb $\operatorname{lkkt}(n, m)$.
Tehát $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ nem tartalmaz nm-ed rendű elemet, így nem is ciklikus. $\square$

Következmény

Ha n prímhatványtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}.$$

Biz.

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \cdots \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

$\square$

Tétel (Véges Abel-csoportok alaptétele)

Minden véges Abel-csoport felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára. Ez a felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű.

Példa

Határozzuk meg az összes n-elemű Abel-csoportot (izomorfia erejéig).

- $n = 4$: $\mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 8$: $\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 10$: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ (izomorf $\mathbb{Z}_{10}$-zel)
- $n = 16$: $\mathbb{Z}_{16},\ \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 100$: $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25},\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25},\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2$?

Az alaptétel szerinti „kanonikus" felbontások:

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \quad \text{és} \quad \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2.$$

Ezek csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát izomorfak.

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$?

Az alaptétel szerinti „kanonikus" felbontások:

$$\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \text{ és } \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4.$$

Ezek nem csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát nem izomorfak (az alaptétel unicitás része szerint).

Másik megoldás: nem izomorfak, mert $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$-ben van negyedrendű elem, például $(\overline{0}, \overline{3})$, míg $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6$-ban nincs negyedrendű elem (miért?).

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{21}^* \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$?

Nem, mert $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$, de $\mathbb{Z}_{21}^*$ nem ciklikus.

(Másik megoldás: meghatároztuk $\mathbb{Z}_{21}^*$ összes részcsoportját, és nem volt közöttük 4-elemű ciklikus.)

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{25}^* \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$?

Igen, mert $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{20}$, és $\mathbb{Z}_{25}^*$ valóban 20-elemű ciklikus csoport.

Példa

Igaz-e, hogy $D_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$?

Nem, mert $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ kommutatív, de D_4 nem az.

Példa

Igaz-e, hogy $V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?

Igen, $V = A \times_{\mathrm{b}} B$, ahol $A = \{\mathrm{id}, (12)\,(34)\}$ és $B = \{\mathrm{id}, (13)\,(24)\}$

Példa

Direkt felbontható-e a $\mathbb{C}^*$ csoport?

Igen $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^+ \times_{\mathsf{b}} T$, hiszen minden nemnulla z komplex szám felírható egy pozitív valós szám és egy egységnyi abszolút értékű komplex szám szorzataként:

$$z = |z| \left(\cos \arg z + i \sin \arg z\right),$$

és ez a felírás egyértelmű.