ABSZTRAKT ALGEBRA HÁZI FELADATOK

2016 tavaszi félév, levelező tagozat

1. feladat Vizsgálja meg, hogy grupoidot, félcsoportot, monoidot, csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok az összeadás, illetve a szorzás műveletével.

(1) $\left\{\frac{a}{2^k} : a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}_0\right\}$ (2) $\left\{\frac{a}{2^k} : a \in \mathbb{N}_0,\ k \in \mathbb{N}_0\right\}$ (3) $\{\varepsilon \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} : z^n = 1\}$

(4) $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ (5) $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \setminus \{0\}$ (6) $\left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = A\right\}$

(7) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ (8) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \setminus \{0\}$ (9) $\mathbb{R}^-$

(10) $\mathbb{Z}_{100}$ (11) $\mathbb{Z}_{100} \setminus \{0\}$ (12) $\mathbb{Z}_{100}^*$

(13) $\mathbb{Z}_{101}$ (14) $\mathbb{Z}_{101} \setminus \{0\}$ (15) $\mathbb{Z}_{101}^*$

2. feladat Vizsgálja meg, hogy grupoidot, félcsoportot, monoidot, csoportot, Abel-csoportot alkot-e az A halmaz a $*$ művelettel.

(1) $A = \mathbb{R}$, $x * y = x + y + 23$ (2) $A = \mathbb{Z}$, $x * y = x - y$

(3) $A = \mathbb{Q}$, $x * y = x + 2y - 3$ (4) $A = \mathcal{P}(\emptyset)$, $x * y = x \Delta y$

(5) $A = \mathbb{Z}$, $x * y = y + 2$ (6) $A = \mathcal{P}(\{1, 2\})$, $x * y = x \cup y$

(7) $A = \mathbb{Z}$, $x * y = \begin{cases} x + y, & \text{ha } x \text{ páros;} \\ x - y, & \text{ha } x \text{ páratlan.} \end{cases}$ (8) $A = \mathbb{R}$, $x * y = -9x - 9y + 5xy + 18.$

3. feladat Számítsa ki D_{15}-ben az alábbi elemeket. A végeredményt f^k vagy tf^k $(k = 0, \ldots, 14)$ alakban adja meg. (A jelölések ugyanazok, mint az előadáson.)

(1) $f^{12} \cdot tf^7, (tf^6)^{-2013}$ (2) $tf^7 \cdot f^{12}, (tf^6)^{2013}$

(3) $tf^8 \cdot tf^{10}, f^{-2013}$ (4) $tf^{10} \cdot tf^8, f^{2013}$

4. feladat Oldja meg a D_{15} csoportban az alábbi egyenleteket. A végeredményt f^k vagy tf^k $(k = 0, \ldots, 14)$ alakban adja meg. (A jelölések ugyanazok, mint az előadáson.)

(1) $x \cdot tf^3 = f$, (2) $f^4 t \cdot x = tf^9$, (3) $tf^7 \cdot x \cdot f^2 t = f^{23} t$.

5. feladat Számítsa ki S_9-ben az alábbi permutációkat. A végeredményt adja meg idegen ciklusok szorzataként és 2×9-es mátrixként is (minden elem alá a képét írva).

$$(1356)(2463)(342),\ (4732)^{-1}(15423),\ \pi\rho,\ \rho^2\pi,\ ((123)\pi)^{-1},\ (123)^{-1}\pi^{-1},\ \pi^2,\ \pi^3,\ \pi^4,\ \pi^5,\ \pi^{123},$$

ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 8 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 9 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. feladat Oldja meg az S_9 csoportban az alábbi egyenleteket. A végeredményt adja meg idegen ciklusok szorzataként és 2×9-es mátrixként is (minden elem alá a képét írva).

(1) $x \cdot (134)(246) = (12)$, (2) $(234)^{-1} \cdot x = (1452)(359)$, (3) $(25)(234) \cdot x \cdot (678)(789) = (4276)(934)$.

7. feladat Határozza meg a G csoportban a B részhalmaz által generált részcsoportot.

(1) $G = \mathbb{Q}$, $B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

(2) $G = \mathbb{Q}^*$, $B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

(3) $G = \mathbb{C}$, $B = \left\{1, \sqrt{2}\right\}$

(4) $G = \mathbb{C}^*$, $B = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$

(5) $G = \mathbb{Z}$, $B = \{30, 42, 105\}$

(6) $G = \mathbb{Z}_{30}$, $B = \left\{\overline{6}, \overline{10}\right\}$

(7) $G = \mathbb{Z}_8$, $B = \left\{\overline{5}\right\}$

(8) $G = \mathbb{Z}_8^*$, $B = \left\{\overline{5}\right\}$

(9) $G = D_{12}$, $B = \{f^3, tf^2\}$

(10) $G = D_{12}$, $B = \{f^5, tf^2\}$

(11) $G = D_{12}$, $B = \{f^5\}$

(12) $G = S_4$, $B = \{(1234), (13)\}$

8. feladat Határozza meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

(1) $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $G = \mathbb{C}^*$

(2) $a = \overline{9}$, $G = \mathbb{Z}_{12}$

(3) $a = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $G = \mathbb{C}^*$

(4) $a = \overline{10}$, $G = \mathbb{Z}_{12}$

(5) $a = \sqrt{3} - i$, $G = \mathbb{C}^*$

(6) $a = \overline{11}$, $G = \mathbb{Z}_{12}$

(7) $a = \cos\frac{10\pi}{7} + i\sin\frac{10\pi}{7}$, $G = \mathbb{C}^*$

(8) $a = \overline{2}$, $G = \mathbb{Z}_5^*$

(9) $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $G = \mathbb{C}^*$

(10) $a = \overline{2}$, $G = \mathbb{Z}_7^*$

(11) $a = (123)(234)$, $G = S_9$

(12) $a = \overline{2}$, $G = \mathbb{Z}_{31}^*$

(13) $a = (12)(427)$, $G = S_9$

(14) $a = f^9$, $G = D_{24}$

(15) $a = (342)(25763)(37)$, $G = S_9$

(16) $a = tf^9$, $G = D_{24}$

(17) $a = (123)(456789)$, $G = S_9$

(18) $a = tf^9t$, $G = D_{24}$

9. feladat Hány másodrendű elem van az alábbi csoportokban? És hány hatodrendű elem van?

(1) $\mathbb{C}$, (2) $\mathbb{C}^*$, (3) $\mathbb{Z}_{10}$, (4) $\mathbb{Z}_{10}^*$, (5) $\mathbb{Z}_{12}$, (6) $\mathbb{Z}_{12}^*$, (7) S_6, (8) D_{10}, (9) D_{11}

10. feladat Határozza meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó bal-, illetve jobboldali mellékosztályokat.

(1) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $H = \left[\overline{3}\right]$

(2) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $H = \left[\overline{4}\right]$

(3) $G = \mathbb{Z}_{21}^*$, $H = \left\{\overline{1}, \overline{8}, \overline{13}, \overline{20}\right\}$

(4) $G = \mathbb{Z}_{21}^*$, $H = \left[\overline{4}\right]$

(5) $G = \mathbb{C}$, $H = \mathbb{R}$

(6) $G = \mathbb{R}^*$, $H = \mathbb{R}^+$

(7) $G = D_4$, $H = [f^2]$

(8) $G = D_4$, $H = [tf^2]$

(9) $G = D_4$, $H = [f^2, tf]$

(10) $G = S_4$, $H = [(1234), (13)]$

11. feladat Döntse el a 10. feladatbeli $H \leq G$ részcsoportokról, hogy normálosztók-e a G csoportban. Ha igen, akkor határozza meg a G/H faktorcsoportot (írja fel a művelettáblázatát és/vagy állapítsa meg, hogy melyik ismert csoporttal izomorf a faktorcsoport). Ha H nem normálosztó, akkor számítsa ki az általa generált N normálosztót, és határozza meg a G/N faktorcsoportot.

12. feladat Számítsa ki az alábbi csoportokban az egyes elemek generátumait (azaz a ciklikus részcsoportokat), majd határozza meg az összes részcsoportot, végül rajzolja fel a részcsoportháló Hasse-diagramját.

$$(1)\ \ \mathbb{Z}_{18}, \quad (2)\ \ \mathbb{Z}_{42}, \quad (3)\ \ \mathbb{Z}_{15}^*, \quad (4)\ \ \mathbb{Z}_{49}^*, \quad (5)\ \ \mathbb{Z}_{54}^*, \quad (6)\ \ D_3, \quad (7)\ \ S_3, \quad (8)\ \ V, \quad (9)\ \ Q$$

13. feladat Határozza meg az alábbi csoportokban a konjugáltosztályokat. Ennek segítségével keresse meg az összes normálosztójukat, majd rajzolja fel a normálosztóhálót.

$$(1)\ \ D_6, \quad (2)\ \ D_7, \quad (3)\ \ Q$$

14. feladat Homomorfizmusok-e az alábbi leképezések? Amelyik igen, annak határozza meg a magját és az értékkészletét, majd írja fel a homomorfiatételből adódó izomorfizmust a mag szerinti faktorcsoport és a homomorf kép között.

$$\begin{array}{llllll}
(1) & \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*, & z \mapsto |z| & \qquad (2) & \mathbb{Z}_{12} \to D_8, & \overline{k} \mapsto t^k \\
(3) & \mathbb{C} \to \mathbb{R}, & z \mapsto \operatorname{Im} z & \qquad (4) & \mathbb{Z}_{12} \to D_8, & \overline{k} \mapsto f^{6k} \\
(5) & \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{10}, & \overline{k} \mapsto \overline{k+2} & \qquad (6) & Q \to Q, & x \mapsto x^2 \\
(7) & \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{15}, & \overline{k} \mapsto \widehat{6k} & \qquad (8) & \mathbb{Z}_{20}^* \to \mathbb{Z}_{20}^*, & x \mapsto x^2
\end{array}$$

15. feladat Létezik-e injektív/szürjektív/nemtriviális homomorfizmus a megadott csoportok között? (Ha van, akkor adjon is meg egyet, ha nincs, akkor igazolja, hogy nincs.)

$$(1)\ \ \mathbb{Z}_4 \to Q, \quad (2)\ \ \mathbb{Z}_9 \to D_6, \quad (3)\ \ D_4 \to S_4, \quad (4)\ \ \mathbb{Z}_9 \to Q, \quad (5)\ \ D_4 \to V, \quad (6)\ \ Q \to D_6$$

16. feladat Írja fel az alábbi csoportok Cayley-féle ábrázolását. A csoport minden g elemére adja meg a ρ_g permutációt mátrixos formában és idegen ciklusok szorzataként is.

$$(1)\ \ V, \quad (2)\ \ \mathbb{Z}_5, \quad (3)\ \ D_3, \quad (4)\ \ \mathbb{Z}_5^*$$

17. feladat Határozza meg az alábbi S_9-beli permutációk paritását:

$$a = (143)\,(79)\,(86)\,, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & 9 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad c = (25)\,(38)\,(167)\,(49)\,,$$

$$d = a^{2013}, \quad e = b^{2014}, \quad f = c^{2013}.$$

18. feladat Sorolja fel (izomorfia erejéig) az összes 896, 897, 898, 899 és 900 n-elemű Abel-csoportot.

$$(1)\ \ n = 896, \quad (2)\ \ n = 897, \quad (3)\ \ n = 898, \quad (4)\ \ n = 899, \quad (5)\ \ n = 900$$

19. feladat Melyek izomorfak egymással az alábbi csoportok közül?

$$\mathbb{Z}_{300}, \quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{15}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{75}, \quad \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}, \quad \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{60}, \quad \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{30},$$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{75}, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{20}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{25}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{30}$$

20. feladat Melyek testek az alábbi faktorgyűrűk közül?

(1) $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x^2+1)$, (2) $\mathbb{Q}[x]/(x^4+4x^2+4)$, (3) $\mathbb{Q}[x]/(x^4+x^3-3x^2+2x-1)$,

(4) $\mathbb{R}[x]/(x^2-3x+2)$, (5) $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3+x^2+1)$, (6) $\mathbb{Q}[x]/(x^4+4x^2+6)$,

(7) $\mathbb{Q}[x]/(x^3+4x^2+5x+2)$, (8) $\mathbb{R}[x]/(x^2+3x-2)$, (9) $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3+x^2+1)$,

(10) $\mathbb{R}[x]/(x^4+4x^2+6)$, (11) $\mathbb{R}[x]/(x^3+4x^2+5x+2)$, (12) $\mathbb{C}[x]/(x^2+x+2)$

21. feladat Hány eleműek az alábbi testek?

$$\mathbb{Z}_2[x]/\left(x^7+x^4+1\right),\quad \mathbb{Z}_3[x]/\left(x^4+2x+2\right),\quad \mathbb{Z}_5[x]/\left(x^2+x+2\right),\quad \mathbb{Z}_7[x]/\left(x^3+2\right)$$

22. feladat Határozza meg a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ és a $\sqrt[3]{5+\sqrt{3}}$ számok minimálpolinomját a racionális számok teste felett.

23. feladat Számítsa ki az alábbi számok reciprokát a $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ testben. (A végeredményt $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ $(a,b,c\in\mathbb{Q})$ alakban kell megadni.)

$$(1)\quad 1-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\qquad (2)\quad 4+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$$

24. feladat Számítsa ki az alábbi számok reciprokát a $\mathbb{Q}(\alpha)$ testben, ahol α gyöke az x^3-x+1 polinomnak. (A végeredményt $a\alpha^2+b\alpha+c$ $(a,b,c\in\mathbb{Q})$ alakban kell megadni.)

$$(1)\quad \alpha^2-\alpha-3\qquad (2)\quad \alpha^2+\alpha-1$$

25. feladat Számítsa ki az alábbi elemek multiplikatív inverzét a $\mathbb{Z}_5(\alpha)$ testben, ahol α gyöke az $x^4+3\in\mathbb{Z}_5[x]$ polinomnak. (A végeredményt $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d$ $(a,b,c,d\in\{0,1,2,3,4\})$ alakban kell megadni.)

$$(1)\quad \alpha^2-1\qquad (2)\quad \alpha^3+\alpha^2-2\alpha+1$$

26. feladat Határozza meg az alábbi testbővítések fokszámát.

(1) $\left[\mathbb{R}\left(1+\sqrt[3]{2}\right):\mathbb{R}\right]$ (2) $\left[\mathbb{R}\left(1+i\sqrt[3]{2}\right):\mathbb{R}\right]$ (3) $\left[\mathbb{R}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right):\mathbb{R}\right]$

(4) $\left[\mathbb{Q}\left(1+\sqrt[3]{2}\right):\mathbb{Q}\right]$ (5) $\left[\mathbb{Q}\left(1+i\sqrt[3]{2}\right):\mathbb{Q}\right]$ (6) $\left[\mathbb{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right):\mathbb{Q}\right]$