ABSZTRAKT ALGEBRA HÁZI FELADATOK

2014 tavaszi félév, levelező tagozat

1. feladat Vizsgálja meg, hogy grupoidot, félcsoportot, monoidot, csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok az összeadás, illetve a szorzás műveletével.

$$\left\{\tfrac{a}{2^k}:a\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{N}_0\right\}\qquad \left\{\tfrac{a}{2^k}:a\in\mathbb{N}_0,\ k\in\mathbb{N}_0\right\}\qquad \{\varepsilon\in\mathbb{C}\mid \exists n\in\mathbb{N}: z^n=1\}$$

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]=\left\{a+b\sqrt{2}\colon a,b\in\mathbb{Z}\right\}\qquad \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\setminus\{0\}\qquad \left\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\colon A^T=A\right\}$$

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)=\left\{a+b\sqrt{2}\colon a,b\in\mathbb{Q}\right\}\qquad \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)\setminus\{0\}\qquad \mathbb{R}^-$$

$$\mathbb{Z}_{100}\qquad \mathbb{Z}_{100}\setminus\{0\}\qquad \mathbb{Z}_{100}^*$$

$$\mathbb{Z}_{101}\qquad \mathbb{Z}_{101}\setminus\{0\}\qquad \mathbb{Z}_{101}^*$$

2. feladat Vizsgálja meg, hogy grupoidot, félcsoportot, monoidot, csoportot, Abel-csoportot alkot-e az A halmaz a $*$ művelettel.

$$A=\mathbb{R},\quad x*y=x+y+23\qquad\qquad A=\mathbb{Z},\quad x*y=x-y$$

$$A=\mathbb{Q},\quad x*y=x+2y-3\qquad\qquad A=\mathcal{P}(\emptyset),\quad x*y=x\Delta y$$

$$A=\mathbb{Z},\quad x*y=y+2\qquad\qquad A=\mathcal{P}(\{1,2\}),\quad x*y=x\cup y$$

$$A=\mathbb{Z},\quad x*y=\begin{cases}x+y, & \text{ha } x \text{ páros;}\\ x-y, & \text{ha } x \text{ páratlan.}\end{cases}\qquad\qquad A=\mathbb{R},\quad x*y=-9x-9y+5xy+18.$$

3. feladat Számítsa ki D_{15}-ben az alábbi elemeket. A végeredményt f^k vagy tf^k $(k=0,\dots,14)$ alakban adja meg. (A jelölések ugyanazok, mint az előadáson.)

$$f^{12}\cdot tf^7,\quad tf^7\cdot f^{12},\quad tf^8\cdot tf^{10},\quad tf^{10}\cdot tf^8,\quad f^{2013},\quad f^{-2013},\quad \left(tf^6\right)^{2013},\quad \left(tf^6\right)^{-2013}.$$

4. feladat Oldja meg a D_{15} csoportban az alábbi egyenleteket. A végeredményt f^k vagy tf^k $(k=0,\dots,14)$ alakban adja meg. (A jelölések ugyanazok, mint az előadáson.)

$$x\cdot tf^3=f,\qquad f^4t\cdot x=tf^9,\qquad tf^7\cdot x\cdot f^2t=f^{23}t.$$

5. feladat Számítsa ki S_9-ben az alábbi permutációkat. A végeredményt adja meg idegen ciklusok szorzataként és 2×9-es mátrixként is (minden elem alá a képét írva).

$$(1356)(2463)(342),\ (4732)^{-1}(15423),\ \pi\rho,\ \rho^2\pi,\ ((123)\pi)^{-1},\ (123)^{-1}\pi^{-1},\ \pi^2,\ \pi^3,\ \pi^4,\ \pi^5,\ \pi^{123},$$

ahol

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&4&5&9&8&1&6&2&7\end{pmatrix},\qquad \rho=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&3&8&1&6&9&7&5&4\end{pmatrix}.$$

6. feladat Oldja meg az S_9 csoportban az alábbi egyenleteket. A végeredményt adja meg idegen ciklusok szorzataként és 2×9-es mátrixként is (minden elem alá a képét írva).

$$x\cdot(134)(246)=(12),\qquad (234)^{-1}\cdot x=(1452)(359),\qquad (25)(234)\cdot x\cdot(678)(789)=(4276)(934).$$

7. feladat Határozza meg a G csoportban a B részhalmaz által generált részcsoportot.

$G = \mathbb{Q}, \quad B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$ $\qquad$ $G = \mathbb{Q}^*, \quad B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

$G = \mathbb{C}, \quad B = \left\{1, \sqrt{2}\right\}$ $\qquad$ $G = \mathbb{C}^*, \quad B = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$

$G = \mathbb{Z}, \quad B = \{30, 42, 105\}$ $\qquad$ $G = \mathbb{Z}_{30}, \quad B = \left\{\overline{6}, \overline{10}\right\}$

$G = \mathbb{Z}_8, \quad B = \left\{\overline{5}\right\}$ $\qquad$ $G = \mathbb{Z}_8^*, \quad B = \left\{\overline{5}\right\}$

$G = D_{12}, \quad B = \{f^3, tf^2\}$ $\qquad$ $G = D_{12}, \quad B = \{f^5, tf^2\}$

$G = D_{12}, \quad B = \{f^5\}$ $\qquad$ $G = S_4, \quad B = \{(1234), (13)\}$

8. feladat Határozza meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

$a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad G = \mathbb{C}^*$ $\qquad$ $a = \overline{9}, \quad G = \mathbb{Z}_{12}$

$a = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad G = \mathbb{C}^*$ $\qquad$ $a = \overline{10}, \quad G = \mathbb{Z}_{12}$

$a = \sqrt{3} - i, \quad G = \mathbb{C}^*$ $\qquad$ $a = \overline{11}, \quad G = \mathbb{Z}_{12}$

$a = \cos\frac{10\pi}{7} + i\sin\frac{10\pi}{7}, \quad G = \mathbb{C}^*$ $\qquad$ $a = \overline{2}, \quad G = \mathbb{Z}_5^*$

$a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad G = \mathbb{C}^*$ $\qquad$ $a = \overline{2}, \quad G = \mathbb{Z}_7^*$

$a = (123)(234), \quad G = S_9$ $\qquad$ $a = \overline{2}, \quad G = \mathbb{Z}_{31}^*$

$a = (12)(427), \quad G = S_9$ $\qquad$ $a = f^9, \quad G = D_{24}$

$a = (342)(25763)(37), \quad G = S_9$ $\qquad$ $a = tf^9, \quad G = D_{24}$

$a = (123)(456789), \quad G = S_9$ $\qquad$ $a = tf^9t, \quad G = D_{24}$

9. feladat Hány másodrendű elem van az alábbi csoportokban? És hány hatodrendű elem van?

$$\mathbb{C}, \quad \mathbb{C}^*, \quad \mathbb{Z}_{10}, \quad \mathbb{Z}_{10}^*, \quad \mathbb{Z}_{12}, \quad \mathbb{Z}_{12}^*, \quad S_6, \quad D_{10}, \quad D_{11}$$

10. feladat Határozza meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó bal-, illetve jobboldali mellékosztályokat.

$G = \mathbb{Z}_{12}, \quad H = \left[\overline{3}\right]$ $\qquad$ $G = \mathbb{Z}_{12}, \quad H = \left[\overline{4}\right]$

$G = \mathbb{Z}_{21}^*, \quad H = \left\{\overline{1}, \overline{8}, \overline{13}, \overline{20}\right\}$ $\qquad$ $G = \mathbb{Z}_{21}^*, \quad H = \left[\overline{4}\right]$

$G = \mathbb{C}, \quad H = \mathbb{R}$ $\qquad$ $G = \mathbb{R}^*, \quad H = \mathbb{R}^+$

$G = D_4, \quad H = [f^2]$ $\qquad$ $G = D_4, \quad H = [tf^2]$

$G = D_4, \quad H = [f^2, tf]$ $\qquad$ $G = S_4, \quad H = [(1234), (13)]$

11. feladat Döntse el a 10. feladatbeli $H \leq G$ részcsoportokról, hogy normálosztók-e a G csoportban. Ha igen, akkor határozza meg a G/H faktorcsoportot (írja fel a művelettáblázatát és/vagy állapítsa meg, hogy melyik ismert csoporttal izomorf a faktorcsoport). Ha H nem normálosztó, akkor számítsa ki az általa generált N normálosztót, és határozza meg a G/N faktorcsoportot.

12. feladat Számítsa ki az alábbi csoportokban az egyes elemek generátumait (azaz a ciklikus részcsoportokat), majd határozza meg az összes részcsoportot, végül rajzolja fel a részcsoportháló Hasse-diagramját.

$$\mathbb{Z}_{18}, \quad \mathbb{Z}_{42}, \quad \mathbb{Z}_{15}^*, \quad \mathbb{Z}_{49}^*, \quad \mathbb{Z}_{54}^*, \quad D_3, \quad S_3, \quad V, \quad Q$$

13. feladat Határozza meg a D_6 és a D_7 diédercsoportokban a konjugáltosztályokat. Ennek segítségével keresse meg az összes normálosztójukat, majd rajzolja fel a normálosztóhálót.

14. feladat Homomorfizmusok-e az alábbi leképezések? Amelyik igen, annak határozza meg a magját és az értékkészletét, majd írja fel a homomorfiatételből adódó izomorfizmust a mag szerinti faktorcsoport és a homomorf kép között.

$$\begin{array}{llll}
\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*, & z \mapsto |z| & \qquad \mathbb{Z}_{12} \to D_8, & \overline{k} \mapsto t^k \\[2ex]
\mathbb{C} \to \mathbb{R}, & z \mapsto \operatorname{Im} z & \qquad \mathbb{Z}_{12} \to D_8, & \overline{k} \mapsto f^{6k} \\[2ex]
\mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{10}, & \overline{k} \mapsto \overline{k+2} & \qquad Q \to Q, & x \mapsto x^2 \\[2ex]
\mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{15}, & \overline{k} \mapsto \widehat{6k} & \qquad \mathbb{Z}_{20}^* \to \mathbb{Z}_{20}^*, & x \mapsto x^2
\end{array}$$

15. feladat Létezik-e injektív/szürjektív/nemtriviális homomorfizmus a $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_9$, D_4, Q csoportokból a V, Q, D_6, S_4 csoportokba? (Ez összesen 48 feladat!)

16. feladat Írja fel a V Klein-csoport és a D_3 diédercsoport Cayley-féle ábrázolását. A csoport minden g elemére adja meg a ρ_g permutációt mátrixos formában és idegen ciklusok szorzataként is.

17. feladat Határozza meg az alábbi S_9-beli permutációk paritását:

$$a = (143)\,(79)\,(86)\,, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & 9 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad c = (25)\,(38)\,(167)\,(49)\,,$$

$$d = a^{2013}, \quad e = b^{2014}, \quad f = c^{2013}.$$

18. feladat Sorolja fel (izomorfia erejéig) az összes 896, 897, 898, 899 és 900 elemű Abel-csoportot.

19. feladat Melyek izomorfak egymással az alábbi csoportok közül?

$$\mathbb{Z}_{300}, \quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{15}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{75}, \quad \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}, \quad \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{60}, \quad \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{30},$$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{75}, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{20}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{25}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{30}$$

20. feladat Melyek izomorfak egymással az alábbi csoportok közül?

$$\mathbb{Z}_6, \quad \mathbb{Z}_5^*, \quad \mathbb{Z}_9^*, \quad \mathbb{Z}_{12}^*, \quad \mathbb{Z}_{15}^*, \quad \mathbb{Z}_{30}^*, \quad \mathbb{Z}_{24}/\left[\overline{6}\right], \quad \mathbb{Z}_{13}^*/\left[\overline{8}\right], \quad \mathbb{Z}_{15}^*/\left[\overline{14}\right], \quad \mathbb{Z}_{21}^*/\left[\overline{5}\right],$$

$$Q, \quad D_4, \quad D_4/\left[f^2\right], \quad D_4/\left[f^2, t\right], \quad D_6/\left[f^2\right], \quad D_6/\left[f^3\right], \quad D_9/\left[f^3, t\right]$$

21. feladat Melyek testek az alábbi faktorgyűrűk közül?

$$\mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x^2+1), \quad \mathbb{Q}[x]/(x^4+4x^2+4), \quad \mathbb{Q}[x]/(x^4+x^3-3x^2+2x-1), \quad \mathbb{R}[x]/(x^2-3x+2),$$

$$\mathbb{Z}_3[x]/(x^3+x^2+1), \quad \mathbb{Q}[x]/(x^4+4x^2+6), \quad \mathbb{Q}[x]/(x^3+4x^2+5x+2), \quad \mathbb{R}[x]/(x^2+3x-2),$$

$$\mathbb{Z}_5[x]/(x^3+x^2+1), \quad \mathbb{R}[x]/(x^4+4x^2+6), \quad \mathbb{R}[x]/(x^3+4x^2+5x+2), \quad \mathbb{C}[x]/(x^2+x+2)$$

22. feladat Hány eleműek az alábbi testek?

$$\mathbb{Z}_2[x]/\big(x^7+x^4+1\big), \quad \mathbb{Z}_3[x]/\big(x^4+2x+2\big), \quad \mathbb{Z}_5[x]/\big(x^2+x+2\big), \quad \mathbb{Z}_7[x]/\big(x^3+2\big)$$

23. feladat Határozza meg a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ és a $\sqrt[3]{5+\sqrt{3}}$ számok minimálpolinomját a racionális számok teste felett.

24. feladat Számítsa ki az $1-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ és a $4+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ számok reciprokát a $\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{2}\big)$ testben. (A végeredményt $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ $(a,b,c\in\mathbb{Q})$ alakban kell megadni.)

25. feladat Számítsa ki az $\alpha^2-\alpha-3$ és az $\alpha^2+\alpha-1$ számok reciprokát a $\mathbb{Q}(\alpha)$ testben, ahol α gyöke az x^3-x+1 polinomnak. (A végeredményt $a\alpha^2+b\alpha+c$ $(a,b,c\in\mathbb{Q})$ alakban kell megadni.)

26. feladat Számítsa ki az α^2-1 és az $\alpha^3+\alpha^2-2\alpha+1$ elemek multiplikatív inverzét a $\mathbb{Z}_5(\alpha)$ testben, ahol α gyöke az $x^4+3\in\mathbb{Z}_5[x]$ polinomnak. (A végeredményt $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d$ $(a,b,c,d\in\{0,1,2,3,4\})$ alakban kell megadni.)

27. feladat Határozza meg az alábbi testbővítések fokszámát.

$$\big[\mathbb{R}\big(1+\sqrt[3]{2}\big):\mathbb{R}\big] \qquad \big[\mathbb{R}\big(1+i\sqrt[3]{2}\big):\mathbb{R}\big] \qquad \big[\mathbb{R}\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}i\big):\mathbb{R}\big]$$

$$\big[\mathbb{Q}\big(1+\sqrt[3]{2}\big):\mathbb{Q}\big] \qquad \big[\mathbb{Q}\big(1+i\sqrt[3]{2}\big):\mathbb{Q}\big] \qquad \big[\mathbb{Q}\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}i\big):\mathbb{Q}\big]$$