ABSZTRAKT ALGEBRA HÁZI FELADATOK

2013 tavaszi félév, levelező tagozat

Általános algebra

1. feladat Melyek izomorfak egymással az alábbi grupoidok közül?

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & a & b & a \\ c & a & c & c \end{array}, \quad \mathbb{B} = \begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & a & a & c \\ c & a & a & b \end{array}, \quad \mathbb{C} = \begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & b & b & a \\ c & b & b & c \end{array}$$

$$\mathbb{D} = \begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & a & b \\ b & a & b & c \\ c & a & a & c \end{array}, \quad \mathbb{E} = \begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & a & b & c \\ c & b & c & c \end{array}, \quad \mathbb{F} = \begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & b & b & c \\ c & a & b & c \end{array}$$

2. feladat Adjon meg egy $\varphi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ izomorfizmust. (A két grupoid valóban izomorf, ezt a tényt elfogadhatjuk bizonyítás nélkül.)

$$\mathbb{G} = \begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & b & c & a \\ c & a & b & c & d \\ d & a & d & c & d \end{array}, \quad \mathbb{H} = \begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & a & b & c & d \\ c & a & b & c & c \\ d & d & b & a & d \end{array}$$

3. feladat Határozza meg az 1. feladatban szereplő grupoidok összes részalgebráját, és rajzolja fel a részalgebrahálóikat.

4. feladat Számítsa ki az alábbi grupoidokban az egy- és kételemű halmazok generátumait. Van-e egy-, illetve kételemű generátorrendszer? Rajzolja fel a $\mathrm{Sub}\,(\mathbb{I})$ és $\mathrm{Sub}\,(\mathbb{J})$ hálókat.

$$\mathbb{I} = \begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & c & d & a & b \\ c & a & b & c & d \\ d & c & d & a & b \end{array}, \quad \mathbb{J} = \begin{array}{c|cccc} * & u & v & w & z \\ \hline u & u & v & w & z \\ v & u & w & v & z \\ w & u & w & v & z \\ z & u & v & w & z \end{array}$$

5. feladat Határozza meg az $\mathbb{A}$ algebrában a B részhalmaz által generált részalgebrát.

$\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N})\,;\cup)\,,\quad B = \{\text{háromelemű halmazok}\}$

$\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N})\,;\cap)\,,\quad B = \{\text{háromelemű halmazok}\}$

$\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N})\,;\Delta)\,,\quad B = \{\text{háromelemű halmazok}\}$

$\mathbb{A} = (\mathbb{N};+)\,,\quad B = \{2,3\}$

$\mathbb{A} = (\mathbb{N};\cdot)\,,\quad B = \{2,3\}$

$\mathbb{A} = (\mathbb{N};+)\,,\quad B = \{3,5\}$

$\mathbb{A} = (\mathbb{N};\cdot)\,,\quad B = \{3,5\}$

$\mathbb{A} = (\mathbb{C};+)\,,\quad B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

$\mathbb{A} = (\mathbb{C};\cdot)\,,\quad B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

$\mathbb{A} = (\mathbb{C};+)\,,\quad B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$

$\mathbb{A} = (\mathbb{C};\cdot)\,,\quad B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$

$\mathbb{A} = (\mathbb{C};+)\,,\quad B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z = 0\}$

$\mathbb{A} = (\mathbb{C};\cdot)\,,\quad B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z = 0\}$

6. feladat Vizsgálja meg, hogy kompatibilis osztályozásosok-e az alábbiak a 4. feladatban szereplő $\mathbb{I}$ grupoidon. Amelyik igen, ahhoz írja fel a megfelelő faktorgrupoid művelettáblázatát. Amelyik nem kompatibilis, ott is írja fel az ekvivalenciaosztályok művelettáblázatát, ?-et írva a nem jóldefiniált szorzatokhoz.

$$\mathcal{C}_1 = \{\, \{a, c\},\, \{b\},\, \{d\} \,\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{\, \{a, c\},\, \{b, d\} \,\}, \quad \mathcal{C}_3 = \{\, \{a, b\},\, \{c\},\, \{d\} \,\}$$

$$\mathcal{C}_4 = \{\, \{a\},\, \{c\},\, \{b, d\} \,\}, \quad \mathcal{C}_5 = \{\, \{a\},\, \{b, c, d\} \,\}, \quad \mathcal{C}_6 = \{\, \{a,\, b, c, d\} \,\}$$

7. feladat Tekintsük a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ halmazon a

$$\mathcal{C} = \{\, \{\text{véges halmazok}\}\, , \{\text{végtelen halmazok}\} \,\}$$

osztályozást. Kompatibilis-e ez az osztályozás az egyesítés, a metszés, illetve a szimmetrikus differencia műveletével? Készítse el a megfelelő „faktoralgebrák" művelettáblázatait. Az előző feladathoz hasonlóan, akkor is készítsen művelettáblázatot, ha az osztályozás nem kompatibilis; a nem definiált értékek helyére írjon kérdőjelet.

8. feladat Tekintsük a komplex számok halmazán a

$$\mathcal{C} = \{\, \{\text{algebrai számok}\}\, , \{\text{transzcendens számok}\} \,\}$$

osztályozást. Kompatibilis-e ez az osztályozás az összeadás, illetve a szorzás műveletével? Készítse el a megfelelő „faktoralgebrák" művelettáblázatait. Az előző feladatokhoz hasonlóan, akkor is készítsen művelettáblázatot, ha az osztályozás nem kompatibilis; a nem definiált értékek helyére írjon kérdőjelet.

9. feladat Tekintsük a természetes számok halmazán a

$$\mathcal{C} = \{\, \{\text{3-mal osztható számok}\}\, , \{\text{3-mal nem osztható számok}\} \,\}$$

osztályozást. Kompatibilis-e ez az osztályozás az összeadás, illetve a szorzás műveletével? Készítse el a megfelelő „faktoralgebrák" művelettáblázatait. Az előző feladatokhoz hasonlóan, akkor is készítsen műveletáblázatot, ha az osztályozás nem kompatibilis; a nem definiált értékek helyére írjon kérdőjelet.

10. feladat Milyen betűket kell írni a kérdőjelek helyére, hogy $\mathbb{I} \to \mathbb{J}$ homomorfizmusokat kapjunk? (A műveletáblázatokat lásd a 4. feladatnál.)

$$a\upsilon = u, \quad b\upsilon = v, \quad c\upsilon = ?, \quad d\upsilon = ?$$

$$a\varphi = z, \quad b\varphi = ?, \quad c\varphi = ?, \quad d\varphi = w$$

$$a\chi = ?, \quad b\chi = z, \quad c\chi = u, \quad d\chi = ?$$

$$a\psi = ?, \quad b\psi = ?, \quad c\psi = u, \quad d\psi = w$$

$$a\omega = z, \quad b\omega = v \quad c\omega = ?, \quad d\omega = ?$$

11. feladat Gondoltam egy $\varphi\colon (\mathbb{N};+) \to (\mathbb{N};+)$ homomorfizmust. Annyit elárulok, hogy $2\varphi = 16$ és $5\varphi = 40$, Mi lehet ez a homomorfizmus? Hány lehetőség van? Oldja meg a feladatot $(\mathbb{N};+) \to (\mathbb{N};\cdot)$, $(\mathbb{N};\cdot) \to (\mathbb{N};+)$, illetve $(\mathbb{N};\cdot) \to (\mathbb{N};\cdot)$ homomorfizmusra is.

12. feladat Oldja meg az előző feladatot a $2\varphi = 4$, $5\varphi = 32$ adatokkal is.

Csoportok

13. feladat Vizsgálja meg, hogy grupoidot, félcsoportot, monoidot, csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok az összeadás, illetve a szorzás műveletével.

$\left\{\frac{a}{2^k} : a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}_0\right\}$	$\left\{\frac{a}{2^k} : a \in \mathbb{N}_0,\ k \in \mathbb{N}_0\right\}$	$\{\varepsilon \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} : z^n = 1\}$
$\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \setminus \{0\}$	$\left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A^T = A\right\}$
$\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\right\}$	$\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}^-$
$\mathbb{Z}_{100}$	$\mathbb{Z}_{100} \setminus \{0\}$	$\mathbb{Z}_{100}^*$
$\mathbb{Z}_{101}$	$\mathbb{Z}_{101} \setminus \{0\}$	$\mathbb{Z}_{101}^*$

14. feladat Vizsgálja meg, hogy grupoidot, félcsoportot, monoidot, csoportot, Abel-csoportot alkot-e az A halmaz a $*$ művelettel.

$A = \mathbb{R},\quad x * y = x + y + 23$	$A = \mathbb{Z},\quad x * y = x - y$
$A = \mathbb{Q},\quad x * y = x + 2y - 3$	$A = \mathcal{P}(\emptyset),\quad x * y = x \Delta y$
$A = \mathbb{Z},\quad x * y = y + 2$	$A = \mathcal{P}(\{1,2\}),\quad x * y = x \cup y$
$A = \mathbb{Z},\quad x * y = \begin{cases} x + y, & \text{ha } x \text{ páros;} \\ x - y, & \text{ha } x \text{ páratlan.} \end{cases}$	$A = \mathbb{R},\quad x * y = -9x - 9y + 5xy + 18.$

15. feladat Számítsa ki D_{15}-ben az alábbi elemeket. A végeredményt f^k vagy tf^k $(k = 0, \ldots, 14)$ alakban adja meg. (A jelölések ugyanazok, mint az előadáson.)

$$f^{12} \cdot tf^7, \quad tf^7 \cdot f^{12}, \quad tf^8 \cdot tf^{10}, \quad tf^{10} \cdot tf^8, \quad f^{2013}, \quad f^{-2013}, \quad \left(tf^6\right)^{2013}, \quad \left(tf^6\right)^{-2013}.$$

16. feladat Oldja meg a D_{15} csoportban az alábbi egyenleteket. A végeredményt f^k vagy tf^k $(k = 0, \ldots, 14)$ alakban adja meg. (A jelölések ugyanazok, mint az előadáson.)

$$x \cdot tf^3 = f, \qquad f^4t \cdot x = tf^9, \qquad tf^7 \cdot x \cdot f^2t = f^{23}t.$$

17. feladat Számítsa ki S_9-ben az alábbi permutációkat. A végeredményt adja meg idegen ciklusok szorzataként és 2×9-es mátrixként is (minden elem alá a képét írva).

$$(1356)(2463)(342)\,,\ (4732)^{-1}(15423)\,,\ \pi\rho,\ \rho^2\pi,\ ((123)\,\pi)^{-1}\,,\ (123)^{-1}\pi^{-1},\ \pi^2,\ \pi^3,\ \pi^4,\ \pi^5,\ \pi^{123},$$

ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 8 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 9 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

18. feladat Oldja meg az S_9 csoportban az alábbi egyenleteket. A végeredményt adja meg idegen ciklusok szorzataként és 2×9-es mátrixként is (minden elem alá a képét írva).

$$x \cdot (134)(246) = (12)\,, \qquad (234)^{-1} \cdot x = (1452)(359)\,, \qquad (25)(234) \cdot x \cdot (678)(789) = (4276)(934)\,.$$

19. feladat Határozza meg a G csoportban a B részhalmaz által generált részcsoportot.

$G = D_{12},\quad B = \{f^3, tf^2\}$	$G = \mathbb{Q},\quad B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$	$G = \mathbb{C},\quad B = \left\{1, \sqrt{2}\right\}$
$G = D_{12},\quad B = \{f^5, tf^2\}$	$G = \mathbb{Q}^*,\quad B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$	$G = \mathbb{C}^*,\quad B = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$
$G = D_{12},\quad B = \{f^5\}$	$G = \mathbb{Z}_8,\quad B = \left\{\overline{5}\right\}$	$G = \mathbb{Z},\quad B = \{30, 42, 105\}$
$G = \mathbb{Z}_{30},\quad B = \left\{\overline{6}, \overline{10}\right\}$	$G = \mathbb{Z}_8^*,\quad B = \left\{\overline{5}\right\}$	$G = S_4,\quad B = \{(1234)\,, (13)\}$

20. feladat Határozza meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

$$
\begin{array}{llll}
a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, & G = \mathbb{C}^* & a = \overline{9}, & G = \mathbb{Z}_{12} \\
a = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, & G = \mathbb{C}^* & a = \overline{10}, & G = \mathbb{Z}_{12} \\
a = \sqrt{3} - i, & G = \mathbb{C}^* & a = \overline{11}, & G = \mathbb{Z}_{12} \\
a = \cos \frac{10\pi}{7} + i \sin \frac{10\pi}{7}, & G = \mathbb{C}^* & a = \overline{2}, & G = \mathbb{Z}_5^* \\
a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, & G = \mathbb{C}^* & a = \overline{2}, & G = \mathbb{Z}_7^* \\
a = (123)(234), & G = S_9 & a = \overline{2}, & G = \mathbb{Z}_{31}^* \\
a = (12)(427), & G = S_9 & a = f^9, & G = D_{24} \\
a = (342)(25763)(37), & G = S_9 & a = tf^9, & G = D_{24} \\
a = (123)(456789), & G = S_9 & a = tf^9 t, & G = D_{24}
\end{array}
$$

21. feladat Hány másodrendű elem van az alábbi csoportokban? És hány hatodrendű elem van?

$$\mathbb{C}, \quad \mathbb{C}^*, \quad \mathbb{Z}_{10}, \quad \mathbb{Z}_{10}^*, \quad \mathbb{Z}_{12}, \quad \mathbb{Z}_{12}^*, \quad S_6, \quad D_{10}, \quad D_{11}$$

22. feladat Határozza meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó bal-, illetve jobboldali mellékosztályokat.

$$
\begin{array}{ll}
G = \mathbb{Z}_{12}, \quad H = \left[\overline{3}\right] & G = \mathbb{Z}_{12}, \quad H = \left[\overline{4}\right] \\
G = \mathbb{Z}_{21}^*, \quad H = \left\{\overline{1}, \overline{8}, \overline{13}, \overline{20}\right\} & G = \mathbb{Z}_{21}^*, \quad H = \left[\overline{4}\right] \\
G = \mathbb{C}, \quad H = \mathbb{R} & G = \mathbb{R}^*, \quad H = \mathbb{R}^+ \\
G = D_4, \quad H = [f^2] & G = D_4, \quad H = [tf^2] \\
G = D_4, \quad H = [f^2, tf] & G = S_4, \quad H = [(1234), (13)]
\end{array}
$$

23. feladat Döntse el a 22. feladatbeli $H \leq G$ részcsoportokról, hogy normálosztók-e a G csoportban. Ha igen, akkor határozza meg a G/H faktorcsoportot (írja fel a művelettáblázatát és/vagy állapítsa meg, hogy melyik ismert csoporttal izomorf a faktorcsoport). Ha H nem normálosztó, akkor számítsa ki az általa generált N normálosztót, és határozza meg a G/N faktorcsoportot.

24. feladat Létezik-e injektív homomorfizmus a $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_8$, V, D_4, A_3 csoportokból a Q kvaterniócsoportba? (Másképpen fogalmazva: van-e a kvaterniócsoportnak az adott csoportokkal izomorf részcsoportja?) Oldja meg a feladatot a kvaterniócsoport helyett a D_4, illetve az S_4 csoportra is.

25. feladat Létezik-e szürjektív homomorfizmus a Q kvaterniócsoportról a $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, V, D_3, S_3 csoportokra? (Másképpen fogalmazva: van-e a kvaterniócsoportnak az adott csoportokkal izomorf faktorcsoportja?) Oldja meg a feladatot a kvaterniócsoport helyett a D_6, illetve a $\mathbb{Z}_8$ csoportra is.

26. feladat Válasszon két nem túl nagy véges csoportot, és határozza meg az összes homomorfizmust az egyikből a másikba.

27. feladat Számítsa ki az alábbi csoportokban az egyes elemek generátumait (azaz a ciklikus részcsoportokat), majd határozza meg az összes részcsoportot, végül rajzolja fel a részcsoportháló Hasse-diagramját.

$$\mathbb{Z}_{18}, \quad \mathbb{Z}_{42}, \quad \mathbb{Z}_{15}^*, \quad \mathbb{Z}_{49}^*, \quad \mathbb{Z}_{54}^*, \quad D_3, \quad S_3, \quad V, \quad Q$$

28. feladat Határozza meg a D_6 és a D_7 diédercsoportokban a konjugáltosztályokat. Ennek segítségével keresse meg az összes normálosztójukat, majd rajzolja fel a normálosztóhálót.

29. feladat Írja fel a V Klein-csoport és a D_3 diédercsoport Cayley-féle ábrázolását. A csoport minden g elemére adja meg a ρ_g permutációt mátrixos formában és idegen ciklusok szorzataként is.

30. feladat Határozza meg az alábbi S_9-beli permutációk paritását:

$$a = (143)\,(79)\,(86)\,, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & 9 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad c = (25)\,(38)\,(167)\,(49)\,,$$

$$d = a^{2013}, \quad e = b^{2014}, \quad f = c^{2013}.$$

31. feladat Sorolja fel (izomorfia erejéig) az összes 896, 897, 898, 899 és 900 elemű Abel-csoportot.

32. feladat Melyek direkt felbonthatóak az alábbi csoportok közül? (Egy csoportot akkor nevezünk direkt felbonthatónak, ha előáll nemtriviális normálosztóinak direkt szorzataként.) Amelyik felbontható, annak adja is meg egy felbontását.

$$S_5,\ A_5,\ \mathbb{Z}_{14},\ \mathbb{Z}_{15},\ \mathbb{Z}_{16},\ \mathbb{Z}_{14}^*,\ \mathbb{Z}_{15}^*,\ \mathbb{Z}_{16}^*,\ D_{10},\ D_{12}$$

33. feladat Melyek izomorfak egymással az alábbi csoportok közül?

$$\mathbb{Z}_{300}, \quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{15}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{75}, \quad \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}, \quad \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{60}, \quad \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{30},$$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{75}, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{20}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{25}, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{30}$$

34. feladat Melyek izomorfak egymással az alábbi csoportok közül?

$$\mathbb{Z}_6, \quad \mathbb{Z}_5^*, \quad \mathbb{Z}_9^*, \quad \mathbb{Z}_{12}^*, \quad \mathbb{Z}_{15}^*, \quad \mathbb{Z}_{30}^*, \quad \mathbb{Z}_{24}/\left[\overline{6}\right], \quad \mathbb{Z}_{13}^*/\left[\overline{8}\right], \quad \mathbb{Z}_{15}^*/\left[\overline{14}\right], \quad \mathbb{Z}_{21}^*/\left[\overline{5}\right],$$

$$Q, \quad D_4, \quad D_4/\left[f^2\right], \quad D_4/\left[f^2, t\right], \quad D_6/\left[f^2\right], \quad D_6/\left[f^3\right], \quad D_9/\left[f^3, t\right]$$

Testek

35. feladat Melyek testek az alábbi faktorgyűrűk közül?

$$\mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x^2+1), \quad \mathbb{Q}[x]/(x^4+4x^2+4), \quad \mathbb{Q}[x]/(x^4+x^3-3x^2+2x-1), \quad \mathbb{R}[x]/(x^2-3x+2),$$

$$\mathbb{Z}_3[x]/(x^3+x^2+1), \quad \mathbb{Q}[x]/(x^4+4x^2+6), \quad \mathbb{Q}[x]/(x^3+4x^2+5x+2), \quad \mathbb{R}[x]/(x^2+3x-2),$$

$$\mathbb{Z}_5[x]/(x^3+x^2+1), \quad \mathbb{R}[x]/(x^4+4x^2+6), \quad \mathbb{R}[x]/(x^3+4x^2+5x+2), \quad \mathbb{C}[x]/(x^2+x+2)$$

36. feladat Hány eleműek az alábbi testek?

$$\mathbb{Z}_2[x]/\left(x^7+x^4+1\right), \quad \mathbb{Z}_3[x]/\left(x^4+2x+2\right), \quad \mathbb{Z}_5[x]/\left(x^2+x+2\right), \quad \mathbb{Z}_7[x]/\left(x^3+2\right)$$

37. feladat Határozza meg a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ és a $\sqrt[3]{5+\sqrt{3}}$ számok minimálpolinomját a racionális számok teste felett.

38. feladat Számítsa ki az $1-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ és a $4+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ számok reciprokát a $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ testben. (A végeredményt $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ $(a,b,c\in\mathbb{Q})$ alakban kell megadni.)

39. feladat Számítsa ki az $\alpha^2-\alpha-3$ és az $\alpha^2+\alpha-1$ számok reciprokát a $\mathbb{Q}(\alpha)$ testben, ahol α gyöke az x^3-x+1 polinomnak. (A végeredményt $a\alpha^2+b\alpha+c$ $(a,b,c\in\mathbb{Q})$ alakban kell megadni.)

40. feladat Számítsa ki az α^2-1 és az $\alpha^3+\alpha^2-2\alpha+1$ elemek multiplikatív inverzét a $\mathbb{Z}_5(\alpha)$ testben, ahol α gyöke az $x^4+3\in\mathbb{Z}_5[x]$ polinomnak. (A végeredményt $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d$ $(a,b,c\in\{0,1,2,3,4\})$ alakban kell megadni.)

41. feladat Határozza meg az alábbi testbővítések fokszámát.

$$\left[\mathbb{R}\left(1+\sqrt[3]{2}\right):\mathbb{R}\right] \qquad \left[\mathbb{R}\left(1+i\sqrt[3]{2}\right):\mathbb{R}\right] \qquad \left[\mathbb{R}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}i\right):\mathbb{R}\right]$$

$$\left[\mathbb{Q}\left(1+\sqrt[3]{2}\right):\mathbb{Q}\right] \qquad \left[\mathbb{Q}\left(1+i\sqrt[3]{2}\right):\mathbb{Q}\right] \qquad \left[\mathbb{Q}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}i\right):\mathbb{Q}\right]$$