Csoportok II

2013 április 26-27.

1. Mellékosztályok, Lagrange tétele
2. Normálosztó, faktorcsoport
3. Homomorfiatétel, izomorfiatételek
4. Permutációcsoportok
5. Direkt szorzat

1. Mellékosztályok, Lagrange tétele

2. Normálosztó, faktorcsoport

3. Homomorfiatétel, izomorfiatételek

4. Permutációcsoportok

5. Direkt szorzat

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] XII/3 és [F] II/2,3,7 fejezetekben található.

Definíció

A G csoport nemüres részhalmazait **komplexusoknak** nevezzük.
Komplexusok szorzata és inverze:

$$KL = \{ab\colon a \in K, b \in L\}, \qquad K^{-1} = \left\{a^{-1}\colon a \in K\right\}.$$

Definíció

A G csoport nemüres részhalmazait **komplexusoknak** nevezzük.
Komplexusok szorzata és inverze:

$$KL = \{ab\colon a \in K, b \in L\}, \qquad K^{-1} = \left\{a^{-1}\colon a \in K\right\}.$$

Jelölés

$$aK := \{a\} K, \qquad Ka := K \{a\}$$

Definíció

A G csoport nemüres részhalmazait **komplexusoknak** nevezzük.
Komplexusok szorzata és inverze:

$$KL = \{ab\colon a \in K, b \in L\}, \qquad K^{-1} = \left\{a^{-1}\colon a \in K\right\}.$$

Jelölés

$$aK := \{a\} K, \qquad Ka := K\{a\}$$

Állítás

A komplexusok szorzása asszociatív művelet.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás.

Definíció

A G csoport nemüres részhalmazait **komplexusoknak** nevezzük.
Komplexusok szorzata és inverze:

$$KL = \{ab\colon a \in K, b \in L\}, \qquad K^{-1} = \left\{a^{-1}\colon a \in K\right\}.$$

Jelölés

$$aK := \{a\} K, \qquad Ka := K \{a\}$$

Állítás

A komplexusok szorzása asszociatív művelet.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás. □

Tétel

Egy $H \subseteq G$ komplexus akkor és csak akkor részcsoport, ha

$$1 \in H, \quad HH \subseteq H, \quad H^{-1} \subseteq H.$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.4. Tétel.

Definíció

A G csoport nemüres részhalmazait **komplexusoknak** nevezzük. Komplexusok szorzata és inverze:

$$KL = \{ab \colon a \in K, b \in L\}\,, \qquad K^{-1} = \left\{a^{-1} \colon a \in K\right\}.$$

Jelölés

$$aK := \{a\}\,K\,, \qquad Ka := K\,\{a\}$$

Állítás

A komplexusok szorzása asszociatív művelet.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás. □

Tétel

Egy $H \subseteq G$ komplexus akkor és csak akkor részcsoport, ha

$$1 \in H, \quad HH \subseteq H, \quad H^{-1} \subseteq H.$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.4. Tétel. □

Megjegyzés

Tetszőleges H részcsoportra $HH \subseteq H = \{1\}\,H \subseteq HH$, tehát $HH = H$, és hasonlóan $H^{-1} = H$ is teljesül.

Tétel

Legyen $H \leq G$, és definiáljunk a G halmazon egy $\sim$ relációt:

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció, és egy $a \in G$ elem ekvivalenciaosztálya

$$aH = \{ah \colon h \in H\}.$$

Tétel

Legyen $H \leq G$, és definiáljunk a G halmazon egy $\sim$ relációt:

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció, és egy $a \in G$ elem ekvivalenciaosztálya

$$aH = \{ah \colon h \in H\}.$$

Biz.

- reflexivitás: $\forall a \in G: \ a^{-1}a \in H$

Tétel

Legyen $H \leq G$, és definiáljunk a G halmazon egy $\sim$ relációt:

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció, és egy $a \in G$ elem ekvivalenciaosztálya

$$aH = \{ah\colon h \in H\}.$$

Biz.

- reflexivitás: $\forall a \in G: \; a^{-1}a \in H$
- szimmetria: $\forall a, b \in G: \; a^{-1}b \in H \implies b^{-1}a \in H$

Tétel

Legyen $H \leq G$, és definiáljunk a G halmazon egy $\sim$ relációt:

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció, és egy $a \in G$ elem ekvivalenciaosztálya

$$aH = \{ah \colon h \in H\}.$$

Biz.

- reflexivitás: $\forall a \in G: \; a^{-1}a \in H$
- szimmetria: $\forall a, b \in G: \; a^{-1}b \in H \implies b^{-1}a \in H$
- tranzitivitás: $\forall a, b, c \in G: \; a^{-1}b \in H$ és $b^{-1}c \in H \implies a^{-1}c \in H$

Tétel

Legyen $H \leq G$, és definiáljunk a G halmazon egy $\sim$ relációt:

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció, és egy $a \in G$ elem ekvivalenciaosztálya

$$aH = \{ah \colon h \in H\}.$$

Biz.

- reflexivitás: $\forall a \in G: \ a^{-1}a \in H$
- szimmetria: $\forall a, b \in G: \ a^{-1}b \in H \implies b^{-1}a \in H$
- tranzitivitás: $\forall a, b, c \in G: \ a^{-1}b \in H$ és $b^{-1}c \in H \implies a^{-1}c \in H$

Egy $b \in G$ elem akkor és csak akkor van benne az $a \in G$ elem $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályában, ha

$$a \sim b$$

Tétel

Legyen $H \leq G$, és definiáljunk a G halmazon egy $\sim$ relációt:

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció, és egy $a \in G$ elem ekvivalenciaosztálya

$$aH = \{ah \colon h \in H\}.$$

Biz.

- reflexivitás: $\forall a \in G: \ a^{-1}a \in H$
- szimmetria: $\forall a, b \in G: \ a^{-1}b \in H \implies b^{-1}a \in H$
- tranzitivitás: $\forall a, b, c \in G: \ a^{-1}b \in H$ és $b^{-1}c \in H \implies a^{-1}c \in H$

Egy $b \in G$ elem akkor és csak akkor van benne az $a \in G$ elem $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályában, ha

$$a \sim b \quad \iff \quad a^{-1}b \in H$$

Tétel

Legyen $H \leq G$, és definiáljunk a G halmazon egy $\sim$ relációt:

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció, és egy $a \in G$ elem ekvivalenciaosztálya

$$aH = \{ah \colon h \in H\}.$$

Biz.

- reflexivitás: $\forall a \in G: \; a^{-1}a \in H$
- szimmetria: $\forall a, b \in G: \; a^{-1}b \in H \implies b^{-1}a \in H$
- tranzitivitás: $\forall a, b, c \in G: \; a^{-1}b \in H$ és $b^{-1}c \in H \implies a^{-1}c \in H$

Egy $b \in G$ elem akkor és csak akkor van benne az $a \in G$ elem $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályában, ha

$$\begin{aligned} a \sim b \quad &\iff \quad a^{-1}b \in H \\ &\iff \quad \exists h \in H : a^{-1}b = h \end{aligned}$$

Tétel

Legyen $H \leq G$, és definiáljunk a G halmazon egy $\sim$ relációt:

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció, és egy $a \in G$ elem ekvivalenciaosztálya

$$aH = \{ah \colon h \in H\}.$$

Biz.

- reflexivitás: $\forall a \in G: \ a^{-1}a \in H$
- szimmetria: $\forall a, b \in G: \ a^{-1}b \in H \implies b^{-1}a \in H$
- tranzitivitás: $\forall a, b, c \in G: \ a^{-1}b \in H$ és $b^{-1}c \in H \implies a^{-1}c \in H$

Egy $b \in G$ elem akkor és csak akkor van benne az $a \in G$ elem $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályában, ha

$$\begin{aligned} a \sim b \quad &\iff \quad a^{-1}b \in H \\ &\iff \quad \exists h \in H : a^{-1}b = h \\ &\iff \quad \exists h \in H : b = ah. \quad \square \end{aligned}$$

Definíció

Az aH halmazt az a elem H szerinti **baloldali mellékosztályának** nevezzük.

Definíció

Az aH halmazt az a elem H szerinti **baloldali mellékosztályának** nevezzük.

Tétel

Egy $H \leq G$ részcsoport szerinti baloldali mellékosztályok a G csoport egy osztályozását alkotják.

Definíció

Az aH halmazt az a elem H szerinti **baloldali mellékosztályának** nevezzük.

Tétel

Egy $H \leq G$ részcsoport szerinti baloldali mellékosztályok a G csoport egy osztályozását alkotják.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.7. Tétel.

Nincs mit bizonyítani, bármely ekvivalenciareláció esetén az ekvivalenciaosztályok osztályozást alkotnak.

Definíció

Az aH halmazt az a elem H szerinti **baloldali mellékosztályának** nevezzük.

Tétel

Egy $H \leq G$ részcsoport szerinti baloldali mellékosztályok a G csoport egy osztályozását alkotják.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.7. Tétel.

Nincs mit bizonyítani, bármely ekvivalenciareláció esetén az ekvivalenciaosztályok osztályozást alkotnak. $\square$

Megjegyzés

Hasonló módon definiálhatóak a Ha **jobboldali mellékosztályok**, amelyek szintén osztályozást alkotnak.

Definíció

Az aH halmazt az a elem H szerinti **baloldali mellékosztályának** nevezzük.

Tétel

Egy $H \leq G$ részcsoport szerinti baloldali mellékosztályok a G csoport egy osztályozását alkotják.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.7. Tétel.

Nincs mit bizonyítani, bármely ekvivalenciareláció esetén az ekvivalenciaosztályok osztályozást alkotnak. $\square$

Megjegyzés

Hasonló módon definiálhatóak a Ha **jobboldali mellékosztályok**, amelyek szintén osztályozást alkotnak.

Megjegyzés

Abel-csoportok esetén a baloldali és jobboldali mellékosztályok megegyeznek ($aH = Ha$). Nemkommutatív esetben is előfordulhat, hogy megegyeznek a baloldali és jobboldali mellékosztályok, de nem mindig van így.

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6,\ H = [\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}\}$:

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6, \ H = [\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}\}$:

  $\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6,\ H = \left[\overline{3}\right] = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\}$:

  $\overline{0} + H = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\},\ \overline{1} + H = \left\{\overline{1}, \overline{4}\right\}$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6, \; H = [\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}\}$:

  $$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}, \; \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}, \; \overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6,\ H = \left[\overline{3}\right] = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\}$:

$$\overline{0} + H = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\},\ \overline{1} + H = \left\{\overline{1}, \overline{4}\right\},\ \overline{2} + H = \left\{\overline{2}, \overline{5}\right\}$$
$$\overline{3} + H = \left\{\overline{3}, \overline{0}\right\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6,\ H = \left[\overline{3}\right] = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\}$:

$$\overline{0} + H = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\},\ \overline{1} + H = \left\{\overline{1}, \overline{4}\right\},\ \overline{2} + H = \left\{\overline{2}, \overline{5}\right\}$$
$$\overline{3} + H = \left\{\overline{3}, \overline{0}\right\},\ \overline{4} + H = \left\{\overline{4}, \overline{1}\right\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6,\ H = [\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}\}$:

$$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\},\ \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\},\ \overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$
$$\overline{3} + H = \{\overline{3}, \overline{0}\},\ \overline{4} + H = \{\overline{4}, \overline{1}\},\ \overline{5} + H = \{\overline{5}, \overline{2}\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6,\ H = \left[\overline{3}\right] = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\}$:

$$\overline{0} + H = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\},\ \overline{1} + H = \left\{\overline{1}, \overline{4}\right\},\ \overline{2} + H = \left\{\overline{2}, \overline{5}\right\}$$
$$\overline{3} + H = \left\{\overline{3}, \overline{0}\right\},\ \overline{4} + H = \left\{\overline{4}, \overline{1}\right\},\ \overline{5} + H = \left\{\overline{5}, \overline{2}\right\}$$

$$\overline{0} + H = \overline{3} + H = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\}$$
$$\overline{1} + H = \overline{4} + H = \left\{\overline{1}, \overline{4}\right\}$$
$$\overline{2} + H = \overline{5} + H = \left\{\overline{2}, \overline{5}\right\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6,\ H = [\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}\}$:

$$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\},\ \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\},\ \overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$
$$\overline{3} + H = \{\overline{3}, \overline{0}\},\ \overline{4} + H = \{\overline{4}, \overline{1}\},\ \overline{5} + H = \{\overline{5}, \overline{2}\}$$

$$\overline{0} + H = \overline{3} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$$
$$\overline{1} + H = \overline{4} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$$
$$\overline{2} + H = \overline{5} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$

A mellékosztályozás: $\left\{\{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\}\right\}$.

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6,\ H = [\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}\}$:

  $$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\},\ \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\},\ \overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$
  $$\overline{3} + H = \{\overline{3}, \overline{0}\},\ \overline{4} + H = \{\overline{4}, \overline{1}\},\ \overline{5} + H = \{\overline{5}, \overline{2}\}$$

  $$\overline{0} + H = \overline{3} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$$
  $$\overline{1} + H = \overline{4} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$$
  $$\overline{2} + H = \overline{5} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$

  A mellékosztályozás: $\{\{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_6,\ H = [\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$:

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6,\; H = [\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}\}$:

  $$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\},\; \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\},\; \overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$
  $$\overline{3} + H = \{\overline{3}, \overline{0}\},\; \overline{4} + H = \{\overline{4}, \overline{1}\},\; \overline{5} + H = \{\overline{5}, \overline{2}\}$$

  $$\overline{0} + H = \overline{3} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$$
  $$\overline{1} + H = \overline{4} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$$
  $$\overline{2} + H = \overline{5} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$

  A mellékosztályozás: $\{\{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_6,\; H = [\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$:

  $$\overline{0} + H =$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6, \; H = \left[\overline{3}\right] = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\}$:

  $$\overline{0} + H = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\}, \; \overline{1} + H = \left\{\overline{1}, \overline{4}\right\}, \; \overline{2} + H = \left\{\overline{2}, \overline{5}\right\}$$
  $$\overline{3} + H = \left\{\overline{3}, \overline{0}\right\}, \; \overline{4} + H = \left\{\overline{4}, \overline{1}\right\}, \; \overline{5} + H = \left\{\overline{5}, \overline{2}\right\}$$

  $$\overline{0} + H = \overline{3} + H = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\}$$
  $$\overline{1} + H = \overline{4} + H = \left\{\overline{1}, \overline{4}\right\}$$
  $$\overline{2} + H = \overline{5} + H = \left\{\overline{2}, \overline{5}\right\}$$

  A mellékosztályozás: $\left\{\left\{\overline{0}, \overline{3}\right\}, \left\{\overline{1}, \overline{4}\right\}, \left\{\overline{2}, \overline{5}\right\}\right\}$.

- $G = \mathbb{Z}_6, \; H = \left[\overline{2}\right] = \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\}$:

  $$\overline{0} + H = \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6,\ H = [\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}\}$:

$$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\},\ \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\},\ \overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$
$$\overline{3} + H = \{\overline{3}, \overline{0}\},\ \overline{4} + H = \{\overline{4}, \overline{1}\},\ \overline{5} + H = \{\overline{5}, \overline{2}\}$$

$$\overline{0} + H = \overline{3} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$$
$$\overline{1} + H = \overline{4} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$$
$$\overline{2} + H = \overline{5} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$

A mellékosztályozás: $\{\{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_6,\ H = [\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$:

$$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \overline{2} + H = \overline{4} + H$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6, \; H = [\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}\}$:

  $$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}, \; \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}, \; \overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$
  $$\overline{3} + H = \{\overline{3}, \overline{0}\}, \; \overline{4} + H = \{\overline{4}, \overline{1}\}, \; \overline{5} + H = \{\overline{5}, \overline{2}\}$$

  $$\overline{0} + H = \overline{3} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$$
  $$\overline{1} + H = \overline{4} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$$
  $$\overline{2} + H = \overline{5} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$

  A mellékosztályozás: $\{\{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_6, \; H = [\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$:

  $$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \overline{2} + H = \overline{4} + H$$
  $$\overline{1} + H =$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6,\ H = [\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}\}$:

  $$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\},\ \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\},\ \overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$
  $$\overline{3} + H = \{\overline{3}, \overline{0}\},\ \overline{4} + H = \{\overline{4}, \overline{1}\},\ \overline{5} + H = \{\overline{5}, \overline{2}\}$$

  $$\overline{0} + H = \overline{3} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$$
  $$\overline{1} + H = \overline{4} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$$
  $$\overline{2} + H = \overline{5} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$

  A mellékosztályozás: $\{\{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_6,\ H = [\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$:

  $$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \overline{2} + H = \overline{4} + H$$
  $$\overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6, \;\; H = [\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}\}$:

$$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}, \;\; \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}, \;\; \overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$
$$\overline{3} + H = \{\overline{3}, \overline{0}\}, \;\; \overline{4} + H = \{\overline{4}, \overline{1}\}, \;\; \overline{5} + H = \{\overline{5}, \overline{2}\}$$

$$\overline{0} + H = \overline{3} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$$
$$\overline{1} + H = \overline{4} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$$
$$\overline{2} + H = \overline{5} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$

A mellékosztályozás: $\{\{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_6, \;\; H = [\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$:

$$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \overline{2} + H = \overline{4} + H$$
$$\overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} = \overline{3} + H = \overline{5} + H$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6,\ H = [\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}\}$:

  $$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\},\ \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\},\ \overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$
  $$\overline{3} + H = \{\overline{3}, \overline{0}\},\ \overline{4} + H = \{\overline{4}, \overline{1}\},\ \overline{5} + H = \{\overline{5}, \overline{2}\}$$

  $$\overline{0} + H = \overline{3} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$$
  $$\overline{1} + H = \overline{4} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$$
  $$\overline{2} + H = \overline{5} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$

  A mellékosztályozás: $\{\{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_6,\ H = [\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$:

  $$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \overline{2} + H = \overline{4} + H$$
  $$\overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} = \overline{3} + H = \overline{5} + H$$

  A mellékosztályozás: $\{\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}\}$.

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = \left[\overline{5}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{5}\right\}$:

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = \left[\overline{5}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{5}\right\}$:

  $\overline{1} \cdot H =$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}\}$:

  $\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}\}$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}\}$:

  $\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}\} = \overline{5} \cdot H$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = \left[\overline{5}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{5}\right\}$:

$$\overline{1} \cdot H = \left\{\overline{1}, \overline{5}\right\} = \overline{5} \cdot H$$

$$\overline{7} \cdot H =$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}\}$:

$$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}\} = \overline{5} \cdot H$$
$$\overline{7} \cdot H = \{\overline{7}, \overline{11}\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^{*},\ H = \left[\overline{5}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{5}\right\}$:

$$\overline{1} \cdot H = \left\{\overline{1}, \overline{5}\right\} = \overline{5} \cdot H$$
$$\overline{7} \cdot H = \left\{\overline{7}, \overline{11}\right\} = \overline{11} \cdot H$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}\}$:

$$\overline{1} \cdot H = \left\{\overline{1}, \overline{5}\right\} = \overline{5} \cdot H$$
$$\overline{7} \cdot H = \left\{\overline{7}, \overline{11}\right\} = \overline{11} \cdot H$$

A mellékosztályozás: $\left\{\left\{\overline{1}, \overline{5}\right\}, \left\{\overline{7}, \overline{11}\right\}\right\}$.

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*, \ H = \left[\overline{5}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{5}\right\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \left\{\overline{1}, \overline{5}\right\} = \overline{5} \cdot H$$
  $$\overline{7} \cdot H = \left\{\overline{7}, \overline{11}\right\} = \overline{11} \cdot H$$

  A mellékosztályozás: $\left\{\left\{\overline{1}, \overline{5}\right\}, \left\{\overline{7}, \overline{11}\right\}\right\}$.

- $G = \mathbb{Z}_{13}^*, \ H = \left[\overline{5}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\right\}$:

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}\} = \overline{5} \cdot H$$
  $$\overline{7} \cdot H = \{\overline{7}, \overline{11}\} = \overline{11} \cdot H$$

  A mellékosztályozás: $\{\{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_{13}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H =$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}\} = \overline{5} \cdot H$$
  $$\overline{7} \cdot H = \{\overline{7}, \overline{11}\} = \overline{11} \cdot H$$

  A mellékosztályozás: $\{\{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_{13}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*, \ H = \left[\overline{5}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{5}\right\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \ \left\{\overline{1}, \overline{5}\right\} \ = \overline{5} \cdot H$$
  $$\overline{7} \cdot H = \ \left\{\overline{7}, \overline{11}\right\} \ = \overline{11} \cdot H$$

  A mellékosztályozás: $\left\{\left\{\overline{1}, \overline{5}\right\}, \left\{\overline{7}, \overline{11}\right\}\right\}$.

- $G = \mathbb{Z}_{13}^*, \ H = \left[\overline{5}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\right\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \ \left\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\right\} \ = \overline{5} \cdot H = \overline{8} \cdot H = \overline{12} \cdot H$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}\} = \overline{5} \cdot H$$
  $$\overline{7} \cdot H = \{\overline{7}, \overline{11}\} = \overline{11} \cdot H$$

  A mellékosztályozás: $\{\{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_{13}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \overline{5} \cdot H = \overline{8} \cdot H = \overline{12} \cdot H$$
  $$\overline{2} \cdot H =$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}\} = \overline{5} \cdot H$$
  $$\overline{7} \cdot H = \{\overline{7}, \overline{11}\} = \overline{11} \cdot H$$

  A mellékosztályozás: $\{\{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_{13}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \overline{5} \cdot H = \overline{8} \cdot H = \overline{12} \cdot H$$
  $$\overline{2} \cdot H = \{\overline{2}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{11}\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}\} = \overline{5} \cdot H$$
  $$\overline{7} \cdot H = \{\overline{7}, \overline{11}\} = \overline{11} \cdot H$$

  A mellékosztályozás: $\{\{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_{13}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \overline{5} \cdot H = \overline{8} \cdot H = \overline{12} \cdot H$$
  $$\overline{2} \cdot H = \{\overline{2}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{11}\} = \overline{10} \cdot H = \overline{3} \cdot H = \overline{11} \cdot H$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*, \; H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}\} = \overline{5} \cdot H$$
  $$\overline{7} \cdot H = \{\overline{7}, \overline{11}\} = \overline{11} \cdot H$$

  A mellékosztályozás: $\{\{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_{13}^*, \; H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \overline{5} \cdot H = \overline{8} \cdot H = \overline{12} \cdot H$$
  $$\overline{2} \cdot H = \{\overline{2}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{11}\} = \overline{10} \cdot H = \overline{3} \cdot H = \overline{11} \cdot H$$
  $$\overline{4} \cdot H =$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}\} = \overline{5} \cdot H$$
  $$\overline{7} \cdot H = \{\overline{7}, \overline{11}\} = \overline{11} \cdot H$$

  A mellékosztályozás: $\left\{\{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\}\right\}$.

- $G = \mathbb{Z}_{13}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \overline{5} \cdot H = \overline{8} \cdot H = \overline{12} \cdot H$$
  $$\overline{2} \cdot H = \{\overline{2}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{11}\} = \overline{10} \cdot H = \overline{3} \cdot H = \overline{11} \cdot H$$
  $$\overline{4} \cdot H = \{\overline{4}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{9}\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}\} = \overline{5} \cdot H$$
  $$\overline{7} \cdot H = \{\overline{7}, \overline{11}\} = \overline{11} \cdot H$$

  A mellékosztályozás: $\{\{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_{13}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \overline{5} \cdot H = \overline{8} \cdot H = \overline{12} \cdot H$$
  $$\overline{2} \cdot H = \{\overline{2}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{11}\} = \overline{10} \cdot H = \overline{3} \cdot H = \overline{11} \cdot H$$
  $$\overline{4} \cdot H = \{\overline{4}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{9}\} = \overline{7} \cdot H = \overline{6} \cdot H = \overline{9} \cdot H$$

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}\} = \overline{5} \cdot H$$
  $$\overline{7} \cdot H = \{\overline{7}, \overline{11}\} = \overline{11} \cdot H$$

  A mellékosztályozás: $\{\{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_{13}^*,\ H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}$:

  $$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \overline{5} \cdot H = \overline{8} \cdot H = \overline{12} \cdot H$$
  $$\overline{2} \cdot H = \{\overline{2}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{11}\} = \overline{10} \cdot H = \overline{3} \cdot H = \overline{11} \cdot H$$
  $$\overline{4} \cdot H = \{\overline{4}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{9}\} = \overline{7} \cdot H = \overline{6} \cdot H = \overline{9} \cdot H$$

  A mellékosztályozás: $\{\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}, \{\overline{2}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{11}\}, \{\overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{9}\}\}$.

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H =$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$
  $$(13) \cdot H =$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$
  $$(13) \cdot H = \{(13), (123)\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\text{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\text{id} \cdot H = \{\text{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$
  $$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$
  $$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$$
  $$(12) \cdot H =$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{id} \cdot H &= \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H, \\
(13) \cdot H &= \{(13), (123)\} = (123) \cdot H \\
(12) \cdot H &= \{(12), (132)\}
\end{aligned}
$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$\begin{aligned}
\mathrm{id} \cdot H &= \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H, \\
(13) \cdot H &= \{(13), (123)\} = (123) \cdot H \\
(12) \cdot H &= \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.
\end{aligned}$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$
$$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$$
$$(12) \cdot H = \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.$$

A baloldali mellékosztályozás:
$\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}.$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$
  $$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$$
  $$(12) \cdot H = \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$
  $$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$$
  $$(12) \cdot H = \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} =$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\begin{aligned}\mathrm{id} \cdot H &= \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H, \\ (13) \cdot H &= \{(13), (123)\} = (123) \cdot H \\ (12) \cdot H &= \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.\end{aligned}$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, (23)\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\begin{aligned} \mathrm{id} \cdot H &= \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H, \\ (13) \cdot H &= \{(13), (123)\} = (123) \cdot H \\ (12) \cdot H &= \{(12), (132)\} = (132) \cdot H. \end{aligned}$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, (23)\} = H \cdot (23),$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$
  $$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$$
  $$(12) \cdot H = \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, (23)\} = H \cdot (23),$$
  $$H \cdot (13) =$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$
$$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$$
$$(12) \cdot H = \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

$$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, (23)\} = H \cdot (23),$$
$$H \cdot (13) = \{(13), (132)\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$
$$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$$
$$(12) \cdot H = \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.$$

A baloldali mellékosztályozás:
$\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

$$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, (23)\} = H \cdot (23),$$
$$H \cdot (13) = \{(13), (132)\} = H \cdot (132)$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$
  $$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$$
  $$(12) \cdot H = \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, (23)\} = H \cdot (23),$$
  $$H \cdot (13) = \{(13), (132)\} = H \cdot (132)$$
  $$H \cdot (12) =$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$
  $$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$$
  $$(12) \cdot H = \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, (23)\} = H \cdot (23),$$
  $$H \cdot (13) = \{(13), (132)\} = H \cdot (132)$$
  $$H \cdot (12) = \{(12), (123)\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$\begin{aligned}
\mathrm{id} \cdot H &= \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H, \\
(13) \cdot H &= \{(13), (123)\} = (123) \cdot H \\
(12) \cdot H &= \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.
\end{aligned}$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

$$\begin{aligned}
H \cdot \mathrm{id} &= \{\mathrm{id}, (23)\} = H \cdot (23), \\
H \cdot (13) &= \{(13), (132)\} = H \cdot (132) \\
H \cdot (12) &= \{(12), (123)\} = H \cdot (123),
\end{aligned}$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$
$$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$$
$$(12) \cdot H = \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.$$

A baloldali mellékosztályozás:
$\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

$$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, (23)\} = H \cdot (23),$$
$$H \cdot (13) = \{(13), (132)\} = H \cdot (132)$$
$$H \cdot (12) = \{(12), (123)\} = H \cdot (123),$$

A jobboldali mellékosztályozás:
$\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (132)\}, \{(12), (123)\}\}$.

Példa

Határozzuk meg a $V \leq S_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat, ahol V a **Klein-csoport**:

$$V = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Példa

Határozzuk meg a $V \leq S_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat, ahol V a **Klein-csoport**:

$$V = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

A baloldali és jobboldali mellékosztályok ebben az esetben egybeesnek:

$\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,

$\{(12), (34), (1324), (1423)\}$,

$\{(13), (24), (1234), (1432)\}$,

$\{(14), (23), (1243), (1342)\}$,

$\{(123), (134), (142), (243)\}$,

$\{(132), (143), (124), (234)\}$.

HF utánaszámolni.

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H =$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\}$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H$,

  $f \cdot H =$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$

  $f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\}$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$$
  $$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$
  $f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$
  $f^2 \cdot H =$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$
  $f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$
  $f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\}$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\text{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$\text{id} \cdot H = \{\text{id}, t\} = t \cdot H,$$
$$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
$$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$

  $f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$

  $f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$

  $f^3 \cdot H =$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\begin{aligned}
  \mathrm{id} \cdot H &= \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H, \\
  f \cdot H &= \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H \\
  f^2 \cdot H &= \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H \\
  f^3 \cdot H &= \left\{f^3, tf\right\}
  \end{aligned}$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$$
$$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
$$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$
$$f^3 \cdot H = \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$$
  $$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
  $$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$
  $$f^3 \cdot H = \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}.$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$$
  $$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
  $$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$
  $$f^3 \cdot H = \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$$
  $$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
  $$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$
  $$f^3 \cdot H = \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} =$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$$
  $$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
  $$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$
  $$f^3 \cdot H = \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, t\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$$
  $$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
  $$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$
  $$f^3 \cdot H = \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, t\} = H \cdot t,$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$$
  $$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
  $$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$
  $$f^3 \cdot H = \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, t\} = H \cdot t,$$
  $$H \cdot f =$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$$
  $$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
  $$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$
  $$f^3 \cdot H = \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, t\} = H \cdot t,$$
  $$H \cdot f = \{f, tf\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$$
  $$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
  $$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$
  $$f^3 \cdot H = \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, t\} = H \cdot t,$$
  $$H \cdot f = \{f, tf\} = H \cdot tf$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$$
  $$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
  $$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$
  $$f^3 \cdot H = \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, t\} = H \cdot t,$$
  $$H \cdot f = \{f, tf\} = H \cdot tf$$
  $$H \cdot f^2 =$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$$
  $$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
  $$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$
  $$f^3 \cdot H = \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, t\} = H \cdot t,$$
  $$H \cdot f = \{f, tf\} = H \cdot tf$$
  $$H \cdot f^2 = \left\{f^2, tf^2\right\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$$
  $$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
  $$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$
  $$f^3 \cdot H = \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, t\} = H \cdot t,$$
  $$H \cdot f = \{f, tf\} = H \cdot tf$$
  $$H \cdot f^2 = \left\{f^2, tf^2\right\} = H \cdot tf^2$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$$
  $$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
  $$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$
  $$f^3 \cdot H = \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, t\} = H \cdot t,$$
  $$H \cdot f = \{f, tf\} = H \cdot tf$$
  $$H \cdot f^2 = \left\{f^2, tf^2\right\} = H \cdot tf^2$$
  $$H \cdot f^3 =$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H,$$
  $$f \cdot H = \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H$$
  $$f^2 \cdot H = \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H$$
  $$f^3 \cdot H = \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, t\} = H \cdot t,$$
  $$H \cdot f = \{f, tf\} = H \cdot tf$$
  $$H \cdot f^2 = \left\{f^2, tf^2\right\} = H \cdot tf^2$$
  $$H \cdot f^3 = \left\{f^3, tf^3\right\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$\begin{aligned}
\mathrm{id} \cdot H &= \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H, \\
f \cdot H &= \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H \\
f^2 \cdot H &= \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H \\
f^3 \cdot H &= \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.
\end{aligned}$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

$$\begin{aligned}
H \cdot \mathrm{id} &= \{\mathrm{id}, t\} = H \cdot t, \\
H \cdot f &= \{f, tf\} = H \cdot tf \\
H \cdot f^2 &= \left\{f^2, tf^2\right\} = H \cdot tf^2 \\
H \cdot f^3 &= \left\{f^3, tf^3\right\} = H \cdot tf^3.
\end{aligned}$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\begin{aligned}
  \mathrm{id} \cdot H &= \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H, \\
  f \cdot H &= \left\{f, tf^3\right\} = tf^3 \cdot H \\
  f^2 \cdot H &= \left\{f^2, tf^2\right\} = tf^2 \cdot H \\
  f^3 \cdot H &= \left\{f^3, tf\right\} = tf \cdot H.
  \end{aligned}$$

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \left\{f, tf^3\right\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf\right\}\right\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$\begin{aligned}
  H \cdot \mathrm{id} &= \{\mathrm{id}, t\} = H \cdot t, \\
  H \cdot f &= \{f, tf\} = H \cdot tf \\
  H \cdot f^2 &= \left\{f^2, tf^2\right\} = H \cdot tf^2 \\
  H \cdot f^3 &= \left\{f^3, tf^3\right\} = H \cdot tf^3.
  \end{aligned}$$

  A jobboldali mellékosztályozás:
  $\left\{\{\mathrm{id}, t\}, \{f, tf\}, \left\{f^2, tf^2\right\}, \left\{f^3, tf^3\right\}\right\}$.

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \left\{\text{id}, f, f^2, f^3\right\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\text{id} \cdot H =$

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\}$

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \le D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$

  $t \cdot H =$

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$

  $t \cdot H = \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$$

$$t \cdot H = \{t, tf, tf^2, tf^3\} = tf \cdot H = tf^2 \cdot H = tf^3 \cdot H.$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$

  $t \cdot H = \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\} = tf \cdot H = tf^2 \cdot H = tf^3 \cdot H.$

  A baloldali mellékosztályozás: $\left\{\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\}, \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\}\right\}.$

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$$

  $$t \cdot H = \{t, tf, tf^2, tf^3\} = tf \cdot H = tf^2 \cdot H = tf^3 \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás: $\{\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\}, \{t, tf, tf^2, tf^3\}\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \left\{\text{id}, f, f^2, f^3\right\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\text{id} \cdot H = \left\{\text{id}, f, f^2, f^3\right\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$$
  $$t \cdot H = \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\} = tf \cdot H = tf^2 \cdot H = tf^3 \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás: $\left\{\left\{\text{id}, f, f^2, f^3\right\}, \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\}\right\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \text{id} =$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id}\cdot H = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$$

  $$t \cdot H = \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\} = tf \cdot H = tf^2 \cdot H = tf^3 \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás: $\left\{\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\}, \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\}\right\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$$
  $$t \cdot H = \{t, tf, tf^2, tf^3\} = tf \cdot H = tf^2 \cdot H = tf^3 \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás: $\{\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\}, \{t, tf, tf^2, tf^3\}\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} = H \cdot f = H \cdot f^2 = H \cdot f^3,$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$

  $t \cdot H = \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\} = tf \cdot H = tf^2 \cdot H = tf^3 \cdot H.$

  A baloldali mellékosztályozás: $\left\{\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\}, \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\}\right\}.$

- Jobboldali mellékosztályok:

  $H \cdot \mathrm{id} = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = H \cdot f = H \cdot f^2 = H \cdot f^3,$

  $H \cdot t =$

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$$

  $$t \cdot H = \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\} = tf \cdot H = tf^2 \cdot H = tf^3 \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás: $\left\{\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\}, \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\}\right\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = H \cdot f = H \cdot f^2 = H \cdot f^3,$$

  $$H \cdot t = \left\{t, tf^3, tf^2, tf\right\}$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$$

  $$t \cdot H = \{t, tf, tf^2, tf^3\} = tf \cdot H = tf^2 \cdot H = tf^3 \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás: $\{\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\}, \{t, tf, tf^2, tf^3\}\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} = H \cdot f = H \cdot f^2 = H \cdot f^3,$$

  $$H \cdot t = \{t, tf^3, tf^2, tf\} = H \cdot tf = H \cdot tf^2 = H \cdot tf^3.$$

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$\mathrm{id} \cdot H = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H,$$
  $$t \cdot H = \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\} = tf \cdot H = tf^2 \cdot H = tf^3 \cdot H.$$

  A baloldali mellékosztályozás: $\left\{\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\}, \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\}\right\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$H \cdot \mathrm{id} = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = H \cdot f = H \cdot f^2 = H \cdot f^3,$$
  $$H \cdot t = \left\{t, tf^3, tf^2, tf\right\} = H \cdot tf = H \cdot tf^2 = H \cdot tf^3.$$

  A jobboldali mellékosztályozás: $\left\{\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\}, \left\{t, tf, tf^2, tf^3\right\}\right\}$.

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \leq \mathbb{C}^*$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \leq \mathbb{C}^*$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$z \sim w \iff$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \leq \mathbb{C}^*$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$z \sim w \iff \frac{z}{w} \in \mathbb{R}^+ \iff$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \leq \mathbb{C}^*$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$z \sim w \iff \frac{z}{w} \in \mathbb{R}^+ \iff z$ és w argumentuma megegyezik.

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \leq \mathbb{C}^*$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$z \sim w \iff \frac{z}{w} \in \mathbb{R}^+ \iff z$ és w argumentuma megegyezik.

$z \in \mathbb{C}$ mellékosztálya:

$$z \cdot \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ \cdot z = \{w \in \mathbb{C}^* \colon \arg w = \arg z\}.$$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \leq \mathbb{C}^*$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$z \sim w \iff \frac{z}{w} \in \mathbb{R}^+ \iff z$ és w argumentuma megegyezik.

$z \in \mathbb{C}$ mellékosztálya:

$$z \cdot \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ \cdot z = \{w \in \mathbb{C}^* : \arg w = \arg z\}.$$

A mellékosztályok kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a $[0, 2\pi)$ intervallum elemeinek.

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \leq \mathbb{C}^*$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$z \sim w \iff \frac{z}{w} \in \mathbb{R}^+ \iff z$ és w argumentuma megegyezik.

$z \in \mathbb{C}$ mellékosztálya:

$$z \cdot \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ \cdot z = \{w \in \mathbb{C}^* \colon \arg w = \arg z\}.$$

A mellékosztályok kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a $[0, 2\pi)$ intervallum elemeinek.

A mellékosztályozás: $\{F_\alpha \colon \alpha \in [0, 2\pi)\}$, ahol F_α az az origóból kiinduló nyílt félegyenes, amely α szöget zár be a valós tengely pozitív felével.

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$x \in \mathbb{R}$ mellékosztálya:

$$x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} + x = \{\ldots, x-2,\ x-1,\ x,\ x+1,\ x+2,\ x+3, \ldots\}.$$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$x \in \mathbb{R}$ mellékosztálya:

$$x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} + x = \{\ldots, x-2,\ x-1,\ x,\ x+1,\ x+2,\ x+3, \ldots\}\,.$$

$x \sim y \iff$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$x \in \mathbb{R}$ mellékosztálya:

$$x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} + x = \{\ldots, x-2,\ x-1,\ x,\ x+1,\ x+2,\ x+3, \ldots\}\,.$$

$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z} \iff$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$x \in \mathbb{R}$ mellékosztálya:

$$x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} + x = \{\ldots, x-2,\ x-1,\ x,\ x+1,\ x+2,\ x+3, \ldots\}\,.$$

$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z} \iff x$ és y törtrésze megegyezik.

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$x \in \mathbb{R}$ mellékosztálya:

$$x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} + x = \{\ldots, x-2,\ x-1,\ x,\ x+1,\ x+2,\ x+3, \ldots\}.$$

$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z} \iff x$ és y törtrésze megegyezik.

A mellékosztályok kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a $[0,1)$ intervallum elemeinek.

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$x \in \mathbb{R}$ mellékosztálya:

$$x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} + x = \{\dots, x-2,\ x-1,\ x,\ x+1,\ x+2,\ x+3, \dots\}.$$

$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z} \iff x$ és y törtrésze megegyezik.

A mellékosztályok kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a $[0,1)$ intervallum elemeinek.

A mellékosztályozás: $\{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$.

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $A \sim B \iff$

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$A \sim B \iff \det\left(A^{-1}B\right) = 1 \iff$$

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$A \sim B \iff \det\left(A^{-1}B\right) = 1 \iff \det(A) = \det(B),$$

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$A \sim B \iff \det\left(A^{-1}B\right) = 1 \iff \det(A) = \det(B),$$

$$A \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \det(A)\}.$$

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$A \sim B \iff \det\left(A^{-1}B\right) = 1 \iff \det(A) = \det(B),$$

$$A \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \det(A)\}.$$

Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}^*$ esetén legyen
$D_\lambda = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \lambda\}$.

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$A \sim B \iff \det\left(A^{-1}B\right) = 1 \iff \det(A) = \det(B)\,,$$

$$A \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) :\ \det(B) = \det(A)\}\,.$$

Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}^*$ esetén legyen
$D_\lambda = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) :\ \det(B) = \lambda\}$.

A baloldali mellékosztályozás: $\{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\}\,.$

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$A \sim B \iff \det\left(A^{-1}B\right) = 1 \iff \det(A) = \det(B),$$

  $$A \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \det(A)\}.$$

  Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}^*$ esetén legyen
  $D_\lambda = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \lambda\}$.

  A baloldali mellékosztályozás: $\{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$A \sim B \iff \det\left(A^{-1}B\right) = 1 \iff \det(A) = \det(B),$$

  $$A \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \det(A)\}.$$

  Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}^*$ esetén legyen
  $D_\lambda = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \lambda\}$.

  A baloldali mellékosztályozás: $\{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$A \sim B \iff$$

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$A \sim B \iff \det\left(A^{-1}B\right) = 1 \iff \det(A) = \det(B),$$

  $$A \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \det(A)\}.$$

  Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}^*$ esetén legyen
  $D_\lambda = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \lambda\}$.

  A baloldali mellékosztályozás: $\{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$A \sim B \iff \det\left(AB^{-1}\right) = 1 \iff$$

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$A \sim B \iff \det\left(A^{-1}B\right) = 1 \iff \det(A) = \det(B),$$

  $$A \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \det(A)\}.$$

  Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}^*$ esetén legyen
  $D_\lambda = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \lambda\}$.

  A baloldali mellékosztályozás: $\{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$A \sim B \iff \det\left(AB^{-1}\right) = 1 \iff \det(A) = \det(B).$$

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$A \sim B \iff \det\left(A^{-1}B\right) = 1 \iff \det(A) = \det(B),$$

  $$A \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \det(A)\}.$$

  Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}^*$ esetén legyen
  $D_\lambda = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \lambda\}$.

  A baloldali mellékosztályozás: $\{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$A \sim B \iff \det\left(AB^{-1}\right) = 1 \iff \det(A) = \det(B).$$

  Tehát a jobboldali mellékosztályozás megegyezik a baloldalival.

Példa

Az $\{1\} \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályok egyeleműek:

$$a\{1\} = \{1\}a = \{a\} \text{ minden } a \in G \text{ esetén.}$$

Példa

Az $\{1\} \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályok egyeleműek:

$$a\{1\} = \{1\}a = \{a\} \text{ minden } a \in G \text{ esetén.}$$

A mellékosztályozás: $\{\{a\} : a \in G\}$.

Példa

Az $\{1\} \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályok egyeleműek:

$$a\,\{1\} = \{1\}\,a = \{a\}\,\text{minden } a \in G \text{ esetén.}$$

A mellékosztályozás: $\{\{a\} : a \in G\}$.

Példa

A $G \leq G$ részcsoporthoz egyetlen mellékosztály tartozik:

$$aG = Ga = G \text{ minden } a \in G \text{ esetén.}$$

Példa

Az $\{1\} \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályok egyeleműek:

$$a\,\{1\} = \{1\}\,a = \{a\} \text{ minden } a \in G \text{ esetén.}$$

A mellékosztályozás: $\{\{a\} : a \in G\}$.

Példa

A $G \leq G$ részcsoporthoz egyetlen mellékosztály tartozik:

$$aG = Ga = G \text{ minden } a \in G \text{ esetén.}$$

A mellékosztályozás: $\{G\}$.

Definíció

A G véges csoport H részcsoportja szerinti baloldali (jobboldali) mellékosztályok számát H **indexének** nevezzük. Jelölése: $[G : H]$.

Definíció

A G véges csoport H részcsoportja szerinti baloldali (jobboldali) mellékosztályok számát H **indexének** nevezzük. Jelölése: $[G : H]$.

Tétel (Lagrange tétele)

Tetszőleges G véges csoport és $H \leq G$ részcsoport esetén

$$|G| = |H| \cdot [G : H] .$$

Definíció

A G véges csoport H részcsoportja szerinti baloldali (jobboldali) mellékosztályok számát H **indexének** nevezzük. Jelölése: $[G : H]$.

Tétel (Lagrange tétele)

Tetszőleges G véges csoport és $H \leq G$ részcsoport esetén

$$|G| = |H| \cdot [G : H] \, .$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.7. és 3.11. Tétel.

Bármely $a \in G$ esetén

$$\lambda_a \colon H \to aH, \, x \mapsto ax$$

bijekció (miért?)

Definíció

A G véges csoport H részcsoportja szerinti baloldali (jobboldali) mellékosztályok számát H **indexének** nevezzük. Jelölése: $[G : H]$.

Tétel (Lagrange tétele)

Tetszőleges G véges csoport és $H \leq G$ részcsoport esetén

$$|G| = |H| \cdot [G : H] \, .$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.7. és 3.11. Tétel.

Bármely $a \in G$ esetén

$$\lambda_a \colon H \to aH, \, x \mapsto ax$$

bijekció (miért?), tehát $|aH| = |H|$.

Definíció

A G véges csoport H részcsoportja szerinti baloldali (jobboldali) mellékosztályok számát H **indexének** nevezzük. Jelölése: $[G : H]$.

Tétel (Lagrange tétele)

Tetszőleges G véges csoport és $H \leq G$ részcsoport esetén

$$|G| = |H| \cdot [G : H] .$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.7. és 3.11. Tétel.

Bármely $a \in G$ esetén

$$\lambda_a \colon H \to aH,\ x \mapsto ax$$

bijekció (miért?), tehát $|aH| = |H|$.

A H szerinti baloldali mellékosztályozás a G halmazt $[G : H]$ darab $|H|$-elemű osztályra osztja

Definíció

A G véges csoport H részcsoportja szerinti baloldali (jobboldali) mellékosztályok számát H **indexének** nevezzük. Jelölése: $[G : H]$.

Tétel (Lagrange tétele)

Tetszőleges G véges csoport és $H \leq G$ részcsoport esetén

$$|G| = |H| \cdot [G : H] \, .$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.7. és 3.11. Tétel.

Bármely $a \in G$ esetén

$$\lambda_a \colon H \to aH, \, x \mapsto ax$$

bijekció (miért?), tehát $|aH| = |H|$.

A H szerinti baloldali mellékosztályozás a G halmazt $[G : H]$ darab $|H|$-elemű osztályra osztja, így $|G| = |H| \cdot [G : H]$. $\square$

Következmény

Véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztja a csoport rendjét.

Következmény

Véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.12. Következmény.

Következmény

Véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.12. Következmény. $\square$

Következmény

Véges csoport bármely elemének rendje osztja a csoport rendjét.

Következmény

Véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.12. Következmény. □

Következmény

Véges csoport bármely elemének rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.13. Következmény.
Csak azt kell észrevenni, hogy $o(a) = |[a]|$.

Következmény

Véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.12. Következmény. $\square$

Következmény

Véges csoport bármely elemének rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.13. Következmény.
Csak azt kell észrevenni, hogy $o(a) = |[a]|$. $\square$

Következmény

Ha G egy n-elemű csoport, akkor minden $a \in G$ elemre $a^n = 1$.

Következmény

Véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.12. Következmény. □

Következmény

Véges csoport bármely elemének rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.13. Következmény.
Csak azt kell észrevenni, hogy $o(a) = |[a]|$. □

Következmény

Ha G egy n-elemű csoport, akkor minden $a \in G$ elemre $a^n = 1$.

Biz.

Legyen $|G| = n = o(a) \cdot \ell$ (itt ℓ nem más, mint a $[a]$ részcsoport indexe).

Következmény

Véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.12. Következmény. $\square$

Következmény

Véges csoport bármely elemének rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.13. Következmény.
Csak azt kell észrevenni, hogy $o(a) = |[a]|$. $\square$

Következmény

Ha G egy n-elemű csoport, akkor minden $a \in G$ elemre $a^n = 1$.

Biz.

Legyen $|G| = n = o(a) \cdot \ell$ (itt ℓ nem más, mint a $[a]$ részcsoport indexe).
Ekkor $a^n = a^{o(a)\cdot\ell}$

Következmény

Véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.12. Következmény. $\square$

Következmény

Véges csoport bármely elemének rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.13. Következmény.
Csak azt kell észrevenni, hogy $o(a) = |[a]|$. $\square$

Következmény

Ha G egy n-elemű csoport, akkor minden $a \in G$ elemre $a^n = 1$.

Biz.

Legyen $|G| = n = o(a) \cdot \ell$ (itt ℓ nem más, mint a $[a]$ részcsoport indexe).
Ekkor $a^n = a^{o(a)\cdot\ell} = \left(a^{o(a)}\right)^{\ell}$

Következmény

Véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.12. Következmény. □

Következmény

Véges csoport bármely elemének rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.13. Következmény.
Csak azt kell észrevenni, hogy $o(a) = |[a]|$. □

Következmény

Ha G egy n-elemű csoport, akkor minden $a \in G$ elemre $a^n = 1$.

Biz.

Legyen $|G| = n = o(a) \cdot \ell$ (itt ℓ nem más, mint a $[a]$ részcsoport indexe).
Ekkor $a^n = a^{o(a)\cdot\ell} = \left(a^{o(a)}\right)^{\ell} = 1^{\ell} = 1$.

Következmény

Véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.12. Következmény. $\square$

Következmény

Véges csoport bármely elemének rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.13. Következmény.
Csak azt kell észrevenni, hogy $o(a) = |[a]|$. $\square$

Következmény

Ha G egy n-elemű csoport, akkor minden $a \in G$ elemre $a^n = 1$.

Biz.

Legyen $|G| = n = o(a) \cdot \ell$ (itt ℓ nem más, mint a $[a]$ részcsoport indexe).
Ekkor $a^n = a^{o(a)\cdot\ell} = \left(a^{o(a)}\right)^{\ell} = 1^{\ell} = 1$. $\square$

Következmény

Ha G egy n-elemű csoport, akkor minden $a \in G$ elemre $a^{-1} = a^{n-1}$.

Következmény

Minden prímrendű csoport ciklikus.

Következmény

Minden prímrendű csoport ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha $|G| = p$ prímszám, akkor minden $a \in G$ elemre $o(a) \in \{1, p\}$.

Következmény

Minden prímrendű csoport ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha $|G| = p$ prímszám, akkor minden $a \in G$ elemre $o(a) \in \{1, p\}$.

Ha $a \neq 1$, akkor $o(a) = p$

Következmény

Minden prímrendű csoport ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha $|G| = p$ prímszám, akkor minden $a \in G$ elemre $o(a) \in \{1, p\}$.

Ha $a \neq 1$, akkor $o(a) = p$, és így $[a] = G$. $\square$

Következmény

Minden prímrendű csoport ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha $|G| = p$ prímszám, akkor minden $a \in G$ elemre $o\,(a) \in \{1, p\}$.
Ha $a \neq 1$, akkor $o\,(a) = p$, és így $[a] = G$. $\square$

A kis elemszámú csoportok (izomorfia erejéig) a következők:

1. egyelemű: $\{1\}$

Következmény

Minden prímrendű csoport ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha $|G| = p$ prímszám, akkor minden $a \in G$ elemre $o\,(a) \in \{1, p\}$.
Ha $a \neq 1$, akkor $o\,(a) = p$, és így $[a] = G$. $\square$

A kis elemszámú csoportok (izomorfia erejéig) a következők:

1. egyelemű: $\{1\}$;
2. kételemű: $\mathbb{Z}_2$

Következmény

Minden prímrendű csoport ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha $|G| = p$ prímszám, akkor minden $a \in G$ elemre $o\,(a) \in \{1, p\}$.
Ha $a \neq 1$, akkor $o\,(a) = p$, és így $[a] = G$. $\square$

A kis elemszámú csoportok (izomorfia erejéig) a következők:

1. egyelemű: $\{1\}$;
2. kételemű: $\mathbb{Z}_2$;
3. háromelemű: $\mathbb{Z}_3$

Következmény

Minden prímrendű csoport ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha $|G| = p$ prímszám, akkor minden $a \in G$ elemre $o(a) \in \{1, p\}$.
Ha $a \neq 1$, akkor $o(a) = p$, és így $[a] = G$. $\square$

A kis elemszámú csoportok (izomorfia erejéig) a következők:

1. egyelemű: $\{1\}$;
2. kételemű: $\mathbb{Z}_2$;
3. háromelemű: $\mathbb{Z}_3$;
4. négyelemű: $\mathbb{Z}_4$

Következmény

Minden prímrendű csoport ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha $|G| = p$ prímszám, akkor minden $a \in G$ elemre $o\,(a) \in \{1, p\}$.
Ha $a \neq 1$, akkor $o\,(a) = p$, és így $[a] = G$. $\square$

A kis elemszámú csoportok (izomorfia erejéig) a következők:

1. egyelemű: $\{1\}$;
2. kételemű: $\mathbb{Z}_2$;
3. háromelemű: $\mathbb{Z}_3$;
4. négyelemű: $\mathbb{Z}_4,\ V$

Következmény

Minden prímrendű csoport ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha $|G| = p$ prímszám, akkor minden $a \in G$ elemre $o(a) \in \{1, p\}$.
Ha $a \neq 1$, akkor $o(a) = p$, és így $[a] = G$. $\square$

A kis elemszámú csoportok (izomorfia erejéig) a következők:

1. egyelemű: $\{1\}$;
2. kételemű: $\mathbb{Z}_2$;
3. háromelemű: $\mathbb{Z}_3$;
4. négyelemű: $\mathbb{Z}_4$, V;
5. ötelemű: $\mathbb{Z}_5$

Következmény

Minden prímrendű csoport ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha $|G| = p$ prímszám, akkor minden $a \in G$ elemre $o\,(a) \in \{1, p\}$.
Ha $a \neq 1$, akkor $o\,(a) = p$, és így $[a] = G$. $\square$

A kis elemszámú csoportok (izomorfia erejéig) a következők:

1. egyelemű: $\{1\}$;
2. kételemű: $\mathbb{Z}_2$;
3. háromelemű: $\mathbb{Z}_3$;
4. négyelemű: $\mathbb{Z}_4,\ V$;
5. ötelemű: $\mathbb{Z}_5$;
6. hatelemű: $\mathbb{Z}_6$

Következmény

Minden prímrendű csoport ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha $|G| = p$ prímszám, akkor minden $a \in G$ elemre $o\,(a) \in \{1, p\}$.
Ha $a \neq 1$, akkor $o\,(a) = p$, és így $[a] = G$. $\square$

A kis elemszámú csoportok (izomorfia erejéig) a következők:

1. egyelemű: $\{1\}$;
2. kételemű: $\mathbb{Z}_2$;
3. háromelemű: $\mathbb{Z}_3$;
4. négyelemű: $\mathbb{Z}_4$, V;
5. ötelemű: $\mathbb{Z}_5$;
6. hatelemű: $\mathbb{Z}_6$; $D_3 \cong S_3$;

Következmény

Minden prímrendű csoport ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha $|G| = p$ prímszám, akkor minden $a \in G$ elemre $o\,(a) \in \{1, p\}$.
Ha $a \neq 1$, akkor $o\,(a) = p$, és így $[a] = G$. $\square$

A kis elemszámú csoportok (izomorfia erejéig) a következők:

1. egyelemű: $\{1\}$;
2. kételemű: $\mathbb{Z}_2$;
3. háromelemű: $\mathbb{Z}_3$;
4. négyelemű: $\mathbb{Z}_4$, V;
5. ötelemű: $\mathbb{Z}_5$;
6. hatelemű: $\mathbb{Z}_6$; $D_3 \cong S_3$;
7. hételemű: $\mathbb{Z}_7$.

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{7}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{7}] = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{9}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{5}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{7}] = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{9}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{5}\}$
- $[\overline{8}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{7}] = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{9}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{5}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{0}, \overline{8}, \overline{4}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{7}] = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{9}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{5}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{0}, \overline{8}, \overline{4}\}$
- $[\overline{9}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{7}] = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{9}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{5}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{0}, \overline{8}, \overline{4}\}$
- $[\overline{9}] = \{\overline{0}, \overline{9}, \overline{6}, \overline{3}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{7}] = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{9}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{5}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{0}, \overline{8}, \overline{4}\}$
- $[\overline{9}] = \{\overline{0}, \overline{9}, \overline{6}, \overline{3}\}$
- $[\overline{10}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{7}] = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{9}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{5}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{0}, \overline{8}, \overline{4}\}$
- $[\overline{9}] = \{\overline{0}, \overline{9}, \overline{6}, \overline{3}\}$
- $[\overline{10}] = \{\overline{0}, \overline{10}, \overline{8}, \overline{6}, \overline{4}, \overline{2}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{7}] = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{9}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{5}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{0}, \overline{8}, \overline{4}\}$
- $[\overline{9}] = \{\overline{0}, \overline{9}, \overline{6}, \overline{3}\}$
- $[\overline{10}] = \{\overline{0}, \overline{10}, \overline{8}, \overline{6}, \overline{4}, \overline{2}\}$
- $[\overline{11}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{7}] = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{9}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{5}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{0}, \overline{8}, \overline{4}\}$
- $[\overline{9}] = \{\overline{0}, \overline{9}, \overline{6}, \overline{3}\}$
- $[\overline{10}] = \{\overline{0}, \overline{10}, \overline{8}, \overline{6}, \overline{4}, \overline{2}\}$
- $[\overline{11}] = \{\overline{0}, \overline{11}, \overline{10}, \overline{9}, \overline{8}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{7}] = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{9}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{5}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{0}, \overline{8}, \overline{4}\}$
- $[\overline{9}] = \{\overline{0}, \overline{9}, \overline{6}, \overline{3}\}$
- $[\overline{10}] = \{\overline{0}, \overline{10}, \overline{8}, \overline{6}, \overline{4}, \overline{2}\}$
- $[\overline{11}] = \{\overline{0}, \overline{11}, \overline{10}, \overline{9}, \overline{8}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1}\}$
- $[\overline{0}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{7}] = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{9}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{5}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{0}, \overline{8}, \overline{4}\}$
- $[\overline{9}] = \{\overline{0}, \overline{9}, \overline{6}, \overline{3}\}$
- $[\overline{10}] = \{\overline{0}, \overline{10}, \overline{8}, \overline{6}, \overline{4}, \overline{2}\}$
- $[\overline{11}] = \{\overline{0}, \overline{11}, \overline{10}, \overline{9}, \overline{8}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1}\}$
- $[\overline{0}] = \{\overline{0}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

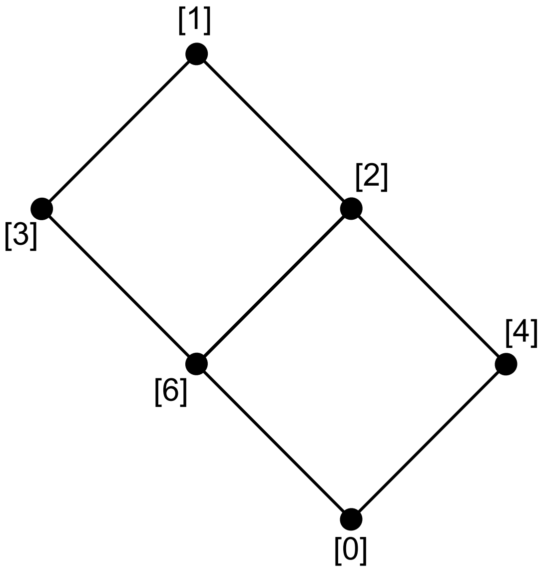
Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\} = [\overline{5}] = [\overline{7}] = [\overline{11}]$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} = [\overline{10}]$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\} = [\overline{9}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\} = [\overline{8}]$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{0}] = \{\overline{0}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

A részcsoportháló:



Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{ \mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3 \right\}$

A ciklikus részcsoportok:

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{ \mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3 \right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] =$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] =$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] =$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] =$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] =$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $[f] =$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\text{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\text{id}] = \{\text{id}\}$
- $[t] = \{\text{id}, t\}$
- $[tf] = \{\text{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\text{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\text{id}, tf^3\right\}$
- $[f] = \left\{\text{id}, f, f^2, f^3\right\} =$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$
- $\left[f^2\right] =$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$
- $\left[f^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\}$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $\left[f^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\text{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\text{id}] = \{\text{id}\}$
- $[t] = \{\text{id}, t\}$
- $[tf] = \{\text{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\text{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\text{id}, tf^3\right\}$
- $\left[f^2\right] = \left\{\text{id}, f^2\right\}$
- $[f] = \left\{\text{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$

További részcsoportok:

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $\left[f^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$

További részcsoportok:

- $\left[f^2, t\right] =$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $\left[f^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$

További részcsoportok:

- $\left[f^2, t\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} =$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $\left[f^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$

További részcsoportok:

- $\left[f^2, t\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} = \left[f^2, tf^2\right] = \left[t, tf^2\right] \cong$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $\left[f^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$

További részcsoportok:

- $\left[f^2, t\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} = \left[f^2, tf^2\right] = \left[t, tf^2\right] \cong V$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $\left[f^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$

További részcsoportok:

- $\left[f^2, t\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} = \left[f^2, tf^2\right] = \left[t, tf^2\right] \cong V$
- $\left[f^2, tf\right] =$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $\left[f^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$

További részcsoportok:

- $\left[f^2, t\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} = \left[f^2, tf^2\right] = \left[t, tf^2\right] \cong V$
- $\left[f^2, tf\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} =$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $\left[f^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$

További részcsoportok:

- $\left[f^2, t\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} = \left[f^2, tf^2\right] = \left[t, tf^2\right] \cong V$
- $\left[f^2, tf\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} = \left[f^2, tf^3\right] = \left[tf, tf^3\right] \cong$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $\left[f^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$

További részcsoportok:

- $\left[f^2, t\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} = \left[f^2, tf^2\right] = \left[t, tf^2\right] \cong V$
- $\left[f^2, tf\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} = \left[f^2, tf^3\right] = \left[tf, tf^3\right] \cong V$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $\left[f^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$

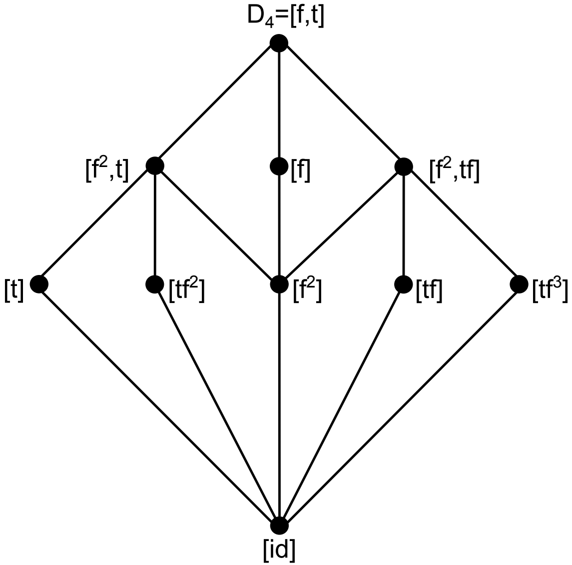
További részcsoportok:

- $\left[f^2, t\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} = \left[f^2, tf^2\right] = \left[t, tf^2\right] \cong V$
- $\left[f^2, tf\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} = \left[f^2, tf^3\right] = \left[tf, tf^3\right] \cong V$
- $[f, t] = D_4$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

A részcsoportháló:



Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \left\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\right\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^{*}$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^{*} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^{*}$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^{*} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\} = [\overline{16}]$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\} = [\overline{16}]$
- $[\overline{5}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\} = [\overline{16}]$
- $[\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{20}, \overline{16}, \overline{17}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\} = [\overline{16}]$
- $[\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{20}, \overline{16}, \overline{17}\} = [\overline{17}]$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\} = [\overline{16}]$
- $[\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{20}, \overline{16}, \overline{17}\} = [\overline{17}]$
- $[\overline{8}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\} = [\overline{16}]$
- $[\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{20}, \overline{16}, \overline{17}\} = [\overline{17}]$
- $[\overline{8}] = \{\overline{1}, \overline{8}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\} = [\overline{16}]$
- $[\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{20}, \overline{16}, \overline{17}\} = [\overline{17}]$
- $[\overline{8}] = \{\overline{1}, \overline{8}\}$
- $[\overline{10}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\} = [\overline{16}]$
- $[\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{20}, \overline{16}, \overline{17}\} = [\overline{17}]$
- $[\overline{8}] = \{\overline{1}, \overline{8}\}$
- $[\overline{10}] = \{\overline{1}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{13}, \overline{4}, \overline{19}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\} = [\overline{16}]$
- $[\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{20}, \overline{16}, \overline{17}\} = [\overline{17}]$
- $[\overline{8}] = \{\overline{1}, \overline{8}\}$
- $[\overline{10}] = \{\overline{1}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{13}, \overline{4}, \overline{19}\} = [\overline{19}]$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\} = [\overline{16}]$
- $[\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{20}, \overline{16}, \overline{17}\} = [\overline{17}]$
- $[\overline{8}] = \{\overline{1}, \overline{8}\}$
- $[\overline{10}] = \{\overline{1}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{13}, \overline{4}, \overline{19}\} = [\overline{19}]$
- $[\overline{13}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\} = [\overline{16}]$
- $[\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{20}, \overline{16}, \overline{17}\} = [\overline{17}]$
- $[\overline{8}] = \{\overline{1}, \overline{8}\}$
- $[\overline{10}] = \{\overline{1}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{13}, \overline{4}, \overline{19}\} = [\overline{19}]$
- $[\overline{13}] = \{\overline{1}, \overline{13}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\} = [\overline{16}]$
- $[\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{20}, \overline{16}, \overline{17}\} = [\overline{17}]$
- $[\overline{8}] = \{\overline{1}, \overline{8}\}$
- $[\overline{10}] = \{\overline{1}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{13}, \overline{4}, \overline{19}\} = [\overline{19}]$
- $[\overline{13}] = \{\overline{1}, \overline{13}\}$
- $[\overline{20}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\} = [\overline{11}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\} = [\overline{16}]$
- $[\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{20}, \overline{16}, \overline{17}\} = [\overline{17}]$
- $[\overline{8}] = \{\overline{1}, \overline{8}\}$
- $[\overline{10}] = \{\overline{1}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{13}, \overline{4}, \overline{19}\} = [\overline{19}]$
- $[\overline{13}] = \{\overline{1}, \overline{13}\}$
- $[\overline{20}] = \{\overline{1}, \overline{20}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[-\overline{1}] = \{\overline{1}, -\overline{1}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{1}, \overline{8}\}$
- $[-\overline{8}] = \{\overline{1}, -\overline{8}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, -\overline{5}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, \overline{8}, -\overline{10}\}$
- $[-\overline{2}] = \{\overline{1}, -\overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, -\overline{8}, \overline{10}\}$
- $[-\overline{4}] = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{4}, -\overline{4}, \overline{5}, -\overline{5}\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[-\overline{1}] = \{\overline{1}, -\overline{1}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{1}, \overline{8}\}$
- $[-\overline{8}] = \{\overline{1}, -\overline{8}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, -\overline{5}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, \overline{8}, -\overline{10}\}$
- $[-\overline{2}] = \{\overline{1}, -\overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, -\overline{8}, \overline{10}\}$
- $[-\overline{4}] = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{4}, -\overline{4}, \overline{5}, -\overline{5}\}$

További részcsoportok:

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[-\overline{1}] = \{\overline{1}, -\overline{1}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{1}, \overline{8}\}$
- $[-\overline{8}] = \{\overline{1}, -\overline{8}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, -\overline{5}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, \overline{8}, -\overline{10}\}$
- $[-\overline{2}] = \{\overline{1}, -\overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, -\overline{8}, \overline{10}\}$
- $[-\overline{4}] = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{4}, -\overline{4}, \overline{5}, -\overline{5}\}$

További részcsoportok:

- $[-\overline{1}, \overline{8}] =$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[-\overline{1}] = \{\overline{1}, -\overline{1}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{1}, \overline{8}\}$
- $[-\overline{8}] = \{\overline{1}, -\overline{8}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, -\overline{5}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, \overline{8}, -\overline{10}\}$
- $[-\overline{2}] = \{\overline{1}, -\overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, -\overline{8}, \overline{10}\}$
- $[-\overline{4}] = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{4}, -\overline{4}, \overline{5}, -\overline{5}\}$

További részcsoportok:

- $[-\overline{1}, \overline{8}] = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{8}, -\overline{8}\} \cong$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[-\overline{1}] = \{\overline{1}, -\overline{1}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{1}, \overline{8}\}$
- $[-\overline{8}] = \{\overline{1}, -\overline{8}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, -\overline{5}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, \overline{8}, -\overline{10}\}$
- $[-\overline{2}] = \{\overline{1}, -\overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, -\overline{8}, \overline{10}\}$
- $[-\overline{4}] = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{4}, -\overline{4}, \overline{5}, -\overline{5}\}$

További részcsoportok:

- $[-\overline{1}, \overline{8}] = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{8}, -\overline{8}\} \cong V$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\overline{1}] = \{\overline{1}\}$
- $[-\overline{1}] = \{\overline{1}, -\overline{1}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{1}, \overline{8}\}$
- $[-\overline{8}] = \{\overline{1}, -\overline{8}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{1}, \overline{4}, -\overline{5}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, \overline{8}, -\overline{10}\}$
- $[-\overline{2}] = \{\overline{1}, -\overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, -\overline{8}, \overline{10}\}$
- $[-\overline{4}] = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{4}, -\overline{4}, \overline{5}, -\overline{5}\}$

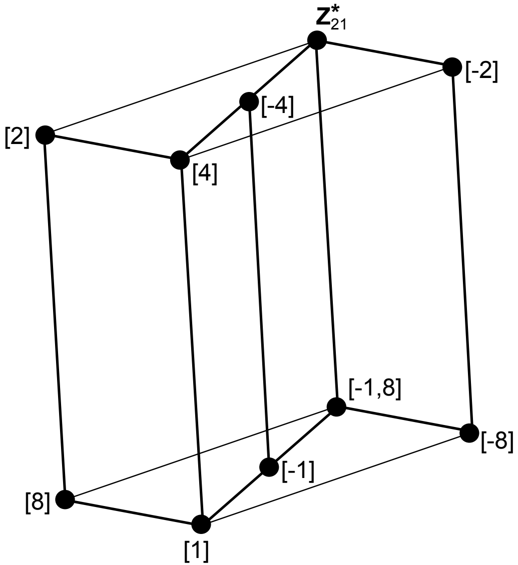
További részcsoportok:

- $[-\overline{1}, \overline{8}] = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{8}, -\overline{8}\} \cong V$
- $\mathbb{Z}_{21}^*$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

A részcsoportháló:



1. Mellékosztályok, Lagrange tétele

2. Normálosztó, faktorcsoport

3. Homomorfiatétel, izomorfiatételek

4. Permutációcsoportok

5. Direkt szorzat

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] XII/4 és [F] II/8,9 fejezetekben található.

Tétel

Tetszőleges $H \leq G$ részcsoportra az alábbiak ekvivalensek:

(1) *a H szerinti baloldali mellékosztályozás megegyezik a H szerinti jobboldali mellékosztályozással;*

(2) *$Hg = gH$ minden $g \in G$ elemre;*

(3) *$g^{-1}Hg = H$ minden $g \in G$ elemre;*

(4) *$g^{-1}Hg \subseteq H$ minden $g \in G$ elemre.*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás.

Tétel

Tetszőleges $H \leq G$ részcsoportra az alábbiak ekvivalensek:

(1) *a H szerinti baloldali mellékosztályozás megegyezik a H szerinti jobboldali mellékosztályozással;*

(2) *$Hg = gH$ minden $g \in G$ elemre;*

(3) *$g^{-1}Hg = H$ minden $g \in G$ elemre;*

(4) *$g^{-1}Hg \subseteq H$ minden $g \in G$ elemre.*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás. $\square$

Definíció

A fenti ekvivalens feltételeket kielégítő részcsoportokat **normáloszóknak** nevezzük. Jelölés: $H \triangleleft G$.

Tétel

Tetszőleges $H \leq G$ részcsoportra az alábbiak ekvivalensek:

(1) *a H szerinti baloldali mellékosztályozás megegyezik a H szerinti jobboldali mellékosztályozással;*

(2) *$Hg = gH$ minden $g \in G$ elemre;*

(3) *$g^{-1}Hg = H$ minden $g \in G$ elemre;*

(4) *$g^{-1}Hg \subseteq H$ minden $g \in G$ elemre.*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás. $\square$

Definíció

A fenti ekvivalens feltételeket kielégítő részcsoportokat **normáloszóknak** nevezzük. Jelölés: $H \lhd G$.

Példa

- Minden G csoportra $\{1\} \lhd G$ és $G \lhd G$.

Tétel

Tetszőleges $H \leq G$ részcsoportra az alábbiak ekvivalensek:

(1) *a H szerinti baloldali mellékosztályozás megegyezik a H szerinti jobboldali mellékosztályozással;*

(2) $Hg = gH$ *minden* $g \in G$ *elemre;*

(3) $g^{-1}Hg = H$ *minden* $g \in G$ *elemre;*

(4) $g^{-1}Hg \subseteq H$ *minden* $g \in G$ *elemre.*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás. $\square$

Definíció

A fenti ekvivalens feltételeket kielégítő részcsoportokat **normáloszóknak** nevezzük. Jelölés: $H \triangleleft G$.

Példa

- Minden G csoportra $\{1\} \triangleleft G$ és $G \triangleleft G$. Ha nincs más normálosztó, akkor azt mondjuk, hogy G **egyszerű** csoport.

Tétel

Tetszőleges $H \leq G$ részcsoportra az alábbiak ekvivalensek:

(1) *a H szerinti baloldali mellékosztályozás megegyezik a H szerinti jobboldali mellékosztályozással;*

(2) *$Hg = gH$ minden $g \in G$ elemre;*

(3) *$g^{-1}Hg = H$ minden $g \in G$ elemre;*

(4) *$g^{-1}Hg \subseteq H$ minden $g \in G$ elemre.*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás. $\square$

Definíció

A fenti ekvivalens feltételeket kielégítő részcsoportokat **normálosztóknak** nevezzük. Jelölés: $H \triangleleft G$.

Példa

- Minden G csoportra $\{1\} \triangleleft G$ és $G \triangleleft G$. Ha nincs más normálosztó, akkor azt mondjuk, hogy G **egyszerű** csoport.
- Abel-csoportban minden részcsoport normálosztó.

Tétel

Tetszőleges $H \leq G$ részcsoportra az alábbiak ekvivalensek:

(1) *a H szerinti baloldali mellékosztályozás megegyezik a H szerinti jobboldali mellékosztályozással;*

(2) $Hg = gH$ *minden* $g \in G$ *elemre;*

(3) $g^{-1}Hg = H$ *minden* $g \in G$ *elemre;*

(4) $g^{-1}Hg \subseteq H$ *minden* $g \in G$ *elemre.*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás. $\square$

Definíció

A fenti ekvivalens feltételeket kielégítő részcsoportokat **normálosztóknak** nevezzük. Jelölés: $H \lhd G$.

Példa

- Minden G csoportra $\{1\} \lhd G$ és $G \lhd G$. Ha nincs más normálosztó, akkor azt mondjuk, hogy G **egyszerű** csoport.
- Abel-csoportban minden részcsoport normálosztó.
- Lásd a korábbi példákat.

Tétel

Tetszőleges $H \leq G$ részcsoportra az alábbiak ekvivalensek:

(1) *a H szerinti baloldali mellékosztályozás megegyezik a H szerinti jobboldali mellékosztályozással;*

(2) *$Hg = gH$ minden $g \in G$ elemre;*

(3) *$g^{-1}Hg = H$ minden $g \in G$ elemre;*

(4) *$g^{-1}Hg \subseteq H$ minden $g \in G$ elemre.*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás. □

Definíció

A fenti ekvivalens feltételeket kielégítő részcsoportokat **normálosztóknak** nevezzük. Jelölés: $H \triangleleft G$.

Példa

- Minden G csoportra $\{1\} \triangleleft G$ és $G \triangleleft G$. Ha nincs más normálosztó, akkor azt mondjuk, hogy G **egyszerű** csoport.
- Abel-csoportban minden részcsoport normálosztó.
- Lásd a korábbi példákat.
- Minden 2 indexű részcsoport normálosztó.

Tétel

Ha $N \lhd G$, akkor az N szerinti mellékosztályozás kompatibilis osztályozása G-nek (és így a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}\right)$ algebrának is).

Tétel

Ha $N \triangleleft G$, akkor az N szerinti mellékosztályozás kompatibilis osztályozása G-nek (és így a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}\right)$ algebrának is).

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(1) Tétel.
Igaz-e, hogy tetszőleges aN,bN mellékosztályokhoz létezik egy cN mellékosztály, amelyre $aN \cdot bN \subseteq cN$?

Tétel

Ha $N \triangleleft G$, akkor az N szerinti mellékosztályozás kompatibilis osztályozása G-nek (és így a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}\right)$ algebrának is).

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(1) Tétel.
Igaz-e, hogy tetszőleges aN,bN mellékosztályokhoz létezik egy cN mellékosztály, amelyre $aN \cdot bN \subseteq cN$? Igen, éspedig $c = ab$ jó lesz:

Tétel

Ha $N \lhd G$, akkor az N szerinti mellékosztályozás kompatibilis osztályozása G-nek (és így a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}\right)$ algebrának is).

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(1) Tétel.
Igaz-e, hogy tetszőleges aN,bN mellékosztályokhoz létezik egy cN mellékosztály, amelyre $aN \cdot bN \subseteq cN$? Igen, éspedig $c = ab$ jó lesz:

$$aNbN = abNN$$

Tétel

Ha $N \lhd G$, akkor az N szerinti mellékosztályozás kompatibilis osztályozása G-nek (és így a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}\right)$ algebrának is).

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(1) Tétel.
Igaz-e, hogy tetszőleges aN,bN mellékosztályokhoz létezik egy cN mellékosztály, amelyre $aN \cdot bN \subseteq cN$? Igen, éspedig $c = ab$ jó lesz:

$$aNbN = abNN \subseteq abN$$

Tétel

Ha $N \triangleleft G$, akkor az N szerinti mellékosztályozás kompatibilis osztályozása G-nek (és így a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}\right)$ algebrának is).

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(1) Tétel.
Igaz-e, hogy tetszőleges aN,bN mellékosztályokhoz létezik egy cN mellékosztály, amelyre $aN \cdot bN \subseteq cN$? Igen, éspedig $c = ab$ jó lesz:

$$aNbN = abNN \subseteq abN = cN. \qquad \square$$

Tétel

Ha $N \lhd G$, akkor az N szerinti mellékosztályozás kompatibilis osztályozása G-nek (és így a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}\right)$ algebrának is).

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(1) Tétel.
Igaz-e, hogy tetszőleges aN,bN mellékosztályokhoz létezik egy cN mellékosztály, amelyre $aN \cdot bN \subseteq cN$? Igen, éspedig $c = ab$ jó lesz:

$$aNbN = abNN \subseteq abN = cN. \qquad \square$$

Definíció

Az N normálosztó szerinti mellékosztályozáshoz tartozó faktoralgebrát G/N-nel jelöljük, és **a G csoport N normálosztója szerinti faktorcsoportjának** nevezzük.

Tétel

Ha $N \triangleleft G$, akkor az N szerinti mellékosztályozás kompatibilis osztályozása G-nek (és így a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}\right)$ algebrának is).

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(1) Tétel.
Igaz-e, hogy tetszőleges aN,bN mellékosztályokhoz létezik egy cN mellékosztály, amelyre $aN \cdot bN \subseteq cN$? Igen, éspedig $c = ab$ jó lesz:

$$aNbN = abNN \subseteq abN = cN. \qquad \square$$

Definíció

Az N normálosztó szerinti mellékosztályozáshoz tartozó faktoralgebrát G/N-nel jelöljük, és **a G csoport N normálosztója szerinti faktorcsoportjának** nevezzük.

Megjegyzés

Mivel $NN = N$, valójában nem csak $aNbN \subseteq abN$, hanem $aNbN = abN$ is teljesül, így a faktorcsoportbeli szorzás megegyezik a komplexus-szorzással.

Tétel

Ha $N \lhd G$, akkor az N szerinti mellékosztályozás kompatibilis osztályozása G-nek (és így a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}\right)$ algebrának is).

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(1) Tétel.
Igaz-e, hogy tetszőleges aN,bN mellékosztályokhoz létezik egy cN mellékosztály, amelyre $aN \cdot bN \subseteq cN$? Igen, éspedig $c = ab$ jó lesz:

$$aNbN = abNN \subseteq abN = cN. \qquad \square$$

Definíció

Az N normálosztó szerinti mellékosztályozáshoz tartozó faktoralgebrát G/N-nel jelöljük, és **a G csoport N normálosztója szerinti faktorcsoportjának** nevezzük.

Megjegyzés

Mivel $NN = N$, valójában nem csak $aNbN \subseteq abN$, hanem $aNbN = abN$ is teljesül, így a faktorcsoportbeli szorzás megegyezik a komplexus-szorzással. (Grupoidokra általában ez nem igaz, lásd ⚠ .)

Tétel

Ha $\sim$ *kongruenciája a* G *csoportnak, akkor* $N := \{a \in G\colon a \sim 1\} \lhd G$*, és a* $\sim$ *kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az* N *normálosztó szerinti mellékosztályozás.*

Tétel

Ha $\sim$ kongruenciája a G csoportnak, akkor $N := \{a \in G : a \sim 1\} \lhd G$, és a $\sim$ kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az N normálosztó szerinti mellékosztályozás.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:

Tétel

Ha $\sim$ *kongruenciája a* G *csoportnak, akkor* $N := \{a \in G\colon a \sim 1\} \lhd G$, *és a* $\sim$ *kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az* N *normálosztó szerinti mellékosztályozás.*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1$

Tétel

Ha $\sim$ *kongruenciája a* G *csoportnak, akkor* $N := \{a \in G : a \sim 1\} \triangleleft G$*, és a* $\sim$ *kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az* N *normálosztó szerinti mellékosztályozás.*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1$

Tétel

Ha $\sim$ *kongruenciája a* G *csoportnak, akkor* $N := \{a \in G \colon a \sim 1\} \lhd G$, *és a* $\sim$ *kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az* N *normálosztó szerinti mellékosztályozás.*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$

Tétel

Ha $\sim$ kongruenciája a G csoportnak, akkor $N := \{a \in G : a \sim 1\} \lhd G$, és a $\sim$ kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az N normálosztó szerinti mellékosztályozás.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$
- N tartalmazza az egységelemet:

Tétel

Ha $\sim$ kongruenciája a G csoportnak, akkor $N := \{a \in G : a \sim 1\} \triangleleft G$, és a $\sim$ kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az N normálosztó szerinti mellékosztályozás.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$
- N tartalmazza az egységelemet: $1 \sim 1 \implies 1 \in N$

Tétel

Ha $\sim$ kongruenciája a G csoportnak, akkor $N := \{a \in G : a \sim 1\} \lhd G$, és a $\sim$ kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az N normálosztó szerinti mellékosztályozás.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$
- N tartalmazza az egységelemet: $1 \sim 1 \implies 1 \in N$
- N zárt az inverzképzésre:

Tétel

Ha $\sim$ kongruenciája a G csoportnak, akkor $N := \{a \in G\colon a \sim 1\} \lhd G$, és a $\sim$ kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az N normálosztó szerinti mellékosztályozás.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$
- N tartalmazza az egységelemet: $1 \sim 1 \implies 1 \in N$
- N zárt az inverzképzésre:
  $a \in N \implies a \sim 1$

Tétel

Ha $\sim$ *kongruenciája a* G *csoportnak, akkor* $N := \{a \in G \colon a \sim 1\} \lhd G$*, és a* $\sim$ *kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az* N *normálosztó szerinti mellékosztályozás.*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$
- N tartalmazza az egységelemet: $1 \sim 1 \implies 1 \in N$
- N zárt az inverzképzésre:
  $a \in N \implies a \sim 1 \implies a^{-1} \sim 1^{-1} = 1$

Tétel

Ha $\sim$ *kongruenciája a* G *csoportnak, akkor* $N := \{a \in G : a \sim 1\} \triangleleft G$*, és a* $\sim$ *kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az* N *normálosztó szerinti mellékosztályozás.*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$
- N tartalmazza az egységelemet: $1 \sim 1 \implies 1 \in N$
- N zárt az inverzképzésre:
  $a \in N \implies a \sim 1 \implies a^{-1} \sim 1^{-1} = 1 \implies a^{-1} \in N$

Tétel

Ha $\sim$ *kongruenciája a* G *csoportnak, akkor* $N := \{a \in G\colon a \sim 1\} \lhd G$, *és a* $\sim$ *kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az* N *normálosztó szerinti mellékosztályozás.*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$
- N tartalmazza az egységelemet: $1 \sim 1 \implies 1 \in N$
- N zárt az inverzképzésre:
  $a \in N \implies a \sim 1 \implies a^{-1} \sim 1^{-1} = 1 \implies a^{-1} \in N$
- N normálosztó: ha $g \in G$ és $n \in N$, akkor

$$\left.\begin{array}{r} g^{-1} \sim g^{-1} \\ n \sim 1 \\ g \sim g \end{array}\right\}$$

Tétel

Ha $\sim$ kongruenciája a G csoportnak, akkor $N := \{a \in G\colon a \sim 1\} \lhd G$, és a $\sim$ kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az N normálosztó szerinti mellékosztályozás.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$
- N tartalmazza az egységelemet: $1 \sim 1 \implies 1 \in N$
- N zárt az inverzképzésre:
  $a \in N \implies a \sim 1 \implies a^{-1} \sim 1^{-1} = 1 \implies a^{-1} \in N$
- N normálosztó: ha $g \in G$ és $n \in N$, akkor

$$\left.\begin{array}{r} g^{-1} \sim g^{-1} \\ n \sim 1 \\ g \sim g \end{array}\right\} \implies g^{-1}ng \sim g^{-1}1g = g^{-1}g = 1$$

Tétel

Ha $\sim$ kongruenciája a G csoportnak, akkor $N := \{a \in G \colon a \sim 1\} \lhd G$, és a $\sim$ kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az N normálosztó szerinti mellékosztályozás.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$
- N tartalmazza az egységelemet: $1 \sim 1 \implies 1 \in N$
- N zárt az inverzképzésre:
  $a \in N \implies a \sim 1 \implies a^{-1} \sim 1^{-1} = 1 \implies a^{-1} \in N$
- N normálosztó: ha $g \in G$ és $n \in N$, akkor

$$\left.\begin{array}{c} g^{-1} \sim g^{-1} \\ n \sim 1 \\ g \sim g \end{array}\right\} \implies g^{-1}ng \sim g^{-1}1g = g^{-1}g = 1 \implies g^{-1}ng \in N$$

Tétel

Ha $\sim$ kongruenciája a G csoportnak, akkor $N := \{a \in G \colon a \sim 1\} \lhd G$, és a $\sim$ kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az N normálosztó szerinti mellékosztályozás.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$
- N tartalmazza az egységelemet: $1 \sim 1 \implies 1 \in N$
- N zárt az inverzképzésre:
  $a \in N \implies a \sim 1 \implies a^{-1} \sim 1^{-1} = 1 \implies a^{-1} \in N$
- N normálosztó: ha $g \in G$ és $n \in N$, akkor
  $$\left.\begin{array}{c} g^{-1} \sim g^{-1} \\ n \sim 1 \\ g \sim g \end{array}\right\} \implies g^{-1}ng \sim g^{-1}1g = g^{-1}g = 1 \implies g^{-1}ng \in N$$
- osztályozások megegyezése:
  $a \sim b \iff ab^{-1} \sim 1$

Tétel

Ha $\sim$ kongruenciája a G csoportnak, akkor $N := \{a \in G \colon a \sim 1\} \triangleleft G$, és a $\sim$ kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az N normálosztó szerinti mellékosztályozás.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$
- N tartalmazza az egységelemet: $1 \sim 1 \implies 1 \in N$
- N zárt az inverzképzésre:
  $a \in N \implies a \sim 1 \implies a^{-1} \sim 1^{-1} = 1 \implies a^{-1} \in N$
- N normálosztó: ha $g \in G$ és $n \in N$, akkor

$$\left.\begin{array}{r} g^{-1} \sim g^{-1} \\ n \sim 1 \\ g \sim g \end{array}\right\} \implies g^{-1}ng \sim g^{-1}1g = g^{-1}g = 1 \implies g^{-1}ng \in N$$

- osztályozások megegyezése:
  $a \sim b \iff ab^{-1} \sim 1 \iff ab^{-1} \in N$

Tétel

Ha $\sim$ kongruenciája a G csoportnak, akkor $N := \{a \in G\colon a \sim 1\} \lhd G$, és a $\sim$ kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az N normálosztó szerinti mellékosztályozás.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$
- N tartalmazza az egységelemet: $1 \sim 1 \implies 1 \in N$
- N zárt az inverzképzésre:
  $a \in N \implies a \sim 1 \implies a^{-1} \sim 1^{-1} = 1 \implies a^{-1} \in N$
- N normálosztó: ha $g \in G$ és $n \in N$, akkor
  $$\left.\begin{array}{r} g^{-1} \sim g^{-1} \\ n \sim 1 \\ g \sim g \end{array}\right\} \implies g^{-1}ng \sim g^{-1}1g = g^{-1}g = 1 \implies g^{-1}ng \in N$$
- osztályozások megegyezése:
  $a \sim b \iff ab^{-1} \sim 1 \iff ab^{-1} \in N \iff aN = bN.$ $\square$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{0}, \overline{3}\} \triangleleft \mathbb{Z}_6$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{0}, \overline{3}\} \lhd \mathbb{Z}_6$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\}\}$$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{0}, \overline{3}\} \triangleleft \mathbb{Z}_6$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\}\}$$

$$\mathbb{Z}_6/N = \begin{array}{c|ccc} + & \{\overline{0}, \overline{3}\} & \{\overline{1}, \overline{4}\} & \{\overline{2}, \overline{5}\} \\ \hline \{\overline{0}, \overline{3}\} & \{\overline{0}, \overline{3}\} & \{\overline{1}, \overline{4}\} & \{\overline{2}, \overline{5}\} \\ \{\overline{1}, \overline{4}\} & \{\overline{1}, \overline{4}\} & \{\overline{2}, \overline{5}\} & \{\overline{0}, \overline{3}\} \\ \{\overline{2}, \overline{5}\} & \{\overline{2}, \overline{5}\} & \{\overline{0}, \overline{3}\} & \{\overline{1}, \overline{4}\} \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{0}, \overline{3}\} \triangleleft \mathbb{Z}_6$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \left\{ \{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\} \right\}$$

$$\mathbb{Z}_6/N = \begin{array}{c|ccc} + & \{\overline{0}, \overline{3}\} & \{\overline{1}, \overline{4}\} & \{\overline{2}, \overline{5}\} \\ \hline \{\overline{0}, \overline{3}\} & \{\overline{0}, \overline{3}\} & \{\overline{1}, \overline{4}\} & \{\overline{2}, \overline{5}\} \\ \{\overline{1}, \overline{4}\} & \{\overline{1}, \overline{4}\} & \{\overline{2}, \overline{5}\} & \{\overline{0}, \overline{3}\} \\ \{\overline{2}, \overline{5}\} & \{\overline{2}, \overline{5}\} & \{\overline{0}, \overline{3}\} & \{\overline{1}, \overline{4}\} \end{array} \cong \begin{array}{c|ccc} + & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{2} & \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{array} = \mathbb{Z}_3$$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{0}, \overline{3}\} \lhd \mathbb{Z}_6$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \left\{ \{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\} \right\}$$

$$\mathbb{Z}_6/N = \begin{array}{c|ccc} + & \{\overline{0},\overline{3}\} & \{\overline{1},\overline{4}\} & \{\overline{2},\overline{5}\} \\ \hline \{\overline{0},\overline{3}\} & \{\overline{0},\overline{3}\} & \{\overline{1},\overline{4}\} & \{\overline{2},\overline{5}\} \\ \{\overline{1},\overline{4}\} & \{\overline{1},\overline{4}\} & \{\overline{2},\overline{5}\} & \{\overline{0},\overline{3}\} \\ \{\overline{2},\overline{5}\} & \{\overline{2},\overline{5}\} & \{\overline{0},\overline{3}\} & \{\overline{1},\overline{4}\} \end{array} \cong \begin{array}{c|ccc} + & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{2} & \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{array} = \mathbb{Z}_3$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon \mathbb{Z}_6/N \to \mathbb{Z}_3, \quad \{\overline{0}, \overline{3}\} \mapsto \widehat{0},\ \{\overline{1}, \overline{4}\} \mapsto \widehat{1},\ \{\overline{2}, \overline{5}\} \mapsto \widehat{2}$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \triangleleft \mathbb{Z}_6$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \lhd \mathbb{Z}_6$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \left\{ \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} \right\}$$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \lhd \mathbb{Z}_6$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}\}$$

$$\mathbb{Z}_6/N \; = \; \begin{array}{c|cc} + & \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} & \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} \\ \hline \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} & \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} & \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} \\ \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} & \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} & \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \lhd \mathbb{Z}_6$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}\}$$

$$\mathbb{Z}_6/N \;=\; \begin{array}{c|cc} + & \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} & \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} \\ \hline \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} & \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} & \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} \\ \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} & \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} & \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \end{array} \;\cong\; \begin{array}{c|cc} + & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{0} \end{array} \;=\; \mathbb{Z}_2$$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \lhd \mathbb{Z}_6$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \left\{ \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} \right\}$$

$$\mathbb{Z}_6/N = \begin{array}{c|cc} + & \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} & \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} \\ \hline \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} & \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} & \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} \\ \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} & \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} & \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \end{array} \cong \begin{array}{c|cc} + & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{0} \end{array} = \mathbb{Z}_2$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon \mathbb{Z}_6/N \to \mathbb{Z}_2, \quad \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \mapsto \widehat{0},\ \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} \mapsto \widehat{1}$

Példa

Határozzuk meg az $N = \left\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\right\} \lhd \mathbb{Z}_{13}^{*}$ részcsoporthoz tartozó faktorcsoportot.

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} \triangleleft \mathbb{Z}_{13}^*$ részcsoporthoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_{13}^*/N = \left\{ \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}, \{\overline{2}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{11}\}, \{\overline{4}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{9}\} \right\} = \{\overline{1} \cdot N, \overline{2} \cdot N, \overline{4} \cdot N\}$$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} \triangleleft \mathbb{Z}_{13}^*$ részcsoporthoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_{13}^*/N = \left\{\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}, \{\overline{2}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{11}\}, \{\overline{4}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{9}\}\right\} = \{\overline{1} \cdot N, \overline{2} \cdot N, \overline{4} \cdot N\}$$

$$\mathbb{Z}_{13}^*/N \;=\; \begin{array}{c|ccc} \cdot & \overline{1} \cdot N & \overline{2} \cdot N & \overline{4} \cdot N \\ \hline \overline{1} \cdot N & \overline{1} \cdot N & \overline{2} \cdot N & \overline{4} \cdot N \\ \overline{2} \cdot N & \overline{2} \cdot N & \overline{4} \cdot N & \overline{1} \cdot N \\ \overline{4} \cdot N & \overline{4} \cdot N & \overline{1} \cdot N & \overline{2} \cdot N \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} \triangleleft \mathbb{Z}_{13}^*$ részcsoporthoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_{13}^*/N = \left\{\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}, \{\overline{2}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{11}\}, \{\overline{4}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{9}\}\right\} = \{\overline{1} \cdot N, \overline{2} \cdot N, \overline{4} \cdot N\}$$

$$\mathbb{Z}_{13}^*/N = \begin{array}{c|ccc} \cdot & \overline{1} \cdot N & \overline{2} \cdot N & \overline{4} \cdot N \\ \hline \overline{1} \cdot N & \overline{1} \cdot N & \overline{2} \cdot N & \overline{4} \cdot N \\ \overline{2} \cdot N & \overline{2} \cdot N & \overline{4} \cdot N & \overline{1} \cdot N \\ \overline{4} \cdot N & \overline{4} \cdot N & \overline{1} \cdot N & \overline{2} \cdot N \end{array} \cong \begin{array}{c|ccc} + & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{2} & \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{array} = \mathbb{Z}_3$$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} \lhd \mathbb{Z}_{13}^*$ részcsoporthoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_{13}^*/N = \left\{ \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}, \{\overline{2}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{11}\}, \{\overline{4}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{9}\} \right\} = \{\overline{1}\cdot N, \overline{2}\cdot N, \overline{4}\cdot N\}$$

$$\mathbb{Z}_{13}^*/N = \begin{array}{c|ccc} \cdot & \overline{1}\cdot N & \overline{2}\cdot N & \overline{4}\cdot N \\ \hline \overline{1}\cdot N & \overline{1}\cdot N & \overline{2}\cdot N & \overline{4}\cdot N \\ \overline{2}\cdot N & \overline{2}\cdot N & \overline{4}\cdot N & \overline{1}\cdot N \\ \overline{4}\cdot N & \overline{4}\cdot N & \overline{1}\cdot N & \overline{2}\cdot N \end{array} \cong \begin{array}{c|ccc} + & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{2} & \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{array} = \mathbb{Z}_3$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon \mathbb{Z}_{13}^*/N \to \mathbb{Z}_3, \quad \overline{1}\cdot N \mapsto \widehat{0},\ \overline{2}\cdot N \mapsto \widehat{1},\ \overline{4}\cdot N \mapsto \widehat{2}$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{1}, \overline{5}\} \lhd \mathbb{Z}_{12}^{*}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{1}, \overline{5}\} \triangleleft \mathbb{Z}_{12}^{*}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\}\} = \{\overline{1} \cdot N, \overline{7} \cdot N\}$$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{1}, \overline{5}\} \lhd \mathbb{Z}_{12}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\}\} = \{\overline{1} \cdot N, \overline{7} \cdot N\}$$

$$\mathbb{Z}_{12}^*/N = \begin{array}{c|cc} \cdot & \overline{1} \cdot N & \overline{7} \cdot N \\ \hline \overline{1} \cdot N & \overline{1} \cdot N & \overline{7} \cdot N \\ \overline{7} \cdot N & \overline{7} \cdot N & \overline{1} \cdot N \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{1}, \overline{5}\} \lhd \mathbb{Z}_{12}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\}\} = \{\overline{1} \cdot N, \overline{7} \cdot N\}$$

$$\mathbb{Z}_{12}^*/N \;=\; \begin{array}{c|cc} \cdot & \overline{1} \cdot N & \overline{7} \cdot N \\ \hline \overline{1} \cdot N & \overline{1} \cdot N & \overline{7} \cdot N \\ \overline{7} \cdot N & \overline{7} \cdot N & \overline{1} \cdot N \end{array} \;\cong\; \begin{array}{c|cc} + & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{0} \end{array} \;=\; \mathbb{Z}_2$$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{1}, \overline{5}\} \lhd \mathbb{Z}_{12}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \left\{ \{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\} \right\} = \left\{ \overline{1} \cdot N, \overline{7} \cdot N \right\}$$

$$\mathbb{Z}_{12}^*/N \;=\; \begin{array}{c|cc} \cdot & \overline{1} \cdot N & \overline{7} \cdot N \\ \hline \overline{1} \cdot N & \overline{1} \cdot N & \overline{7} \cdot N \\ \overline{7} \cdot N & \overline{7} \cdot N & \overline{1} \cdot N \end{array} \;\cong\; \begin{array}{c|cc} + & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{0} \end{array} \;=\; \mathbb{Z}_2$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon \mathbb{Z}_{12}^*/N \to \mathbb{Z}_2, \quad \overline{1} \cdot N \mapsto \widehat{0},\ \overline{7} \cdot N \mapsto \widehat{1}$

Példa

Határozzuk meg a $V \triangleleft S_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

Példa

Határozzuk meg a $V \lhd S_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$S_4/V \cong \ ?$$

Példa

Határozzuk meg a $V \triangleleft S_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$S_4/V \cong \ ?$$

$|S_4/V| = 6 \implies$

Példa

Határozzuk meg a $V \lhd S_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$S_4/V \cong \ ?$$

$|S_4/V| = 6 \implies S_4/V \cong \mathbb{Z}_6$ vagy $S_4/V \cong S_3$

Példa

Határozzuk meg a $V \triangleleft S_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$S_4/V \cong \ ?$$

$|S_4/V| = 6 \implies S_4/V \cong \mathbb{Z}_6$ vagy $S_4/V \cong S_3$

A két esetet megkülönbözteti a

Példa

Határozzuk meg a $V \triangleleft S_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$S_4/V \cong \ ?$$

$|S_4/V| = 6 \implies S_4/V \cong \mathbb{Z}_6$ vagy $S_4/V \cong S_3$

A két esetet megkülönbözteti a kommutativitás.

Példa

Határozzuk meg a $V \triangleleft S_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$S_4/V \cong \ ?$$

$|S_4/V| = 6 \implies S_4/V \cong \mathbb{Z}_6$ vagy $S_4/V \cong S_3$

A két esetet megkülönbözteti a kommutativitás.

$(12)\,V \cdot (13)\,V = (123)\,V, \qquad (13)\,V \cdot (12)\,V = (132)\,V$

Példa

Határozzuk meg a $V \lhd S_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$S_4/V \cong \ ?$$

$|S_4/V| = 6 \implies S_4/V \cong \mathbb{Z}_6$ vagy $S_4/V \cong S_3$

A két esetet megkülönbözteti a kommutativitás.

$(12)\,V \cdot (13)\,V = (123)\,V, \qquad (13)\,V \cdot (12)\,V = (132)\,V$ és

$(123)\,(132)^{-1} = (132) \notin V \implies (123)\,V \neq (132)\,V,$

Példa

Határozzuk meg a $V \triangleleft S_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$S_4/V \cong \ ?$$

$|S_4/V| = 6 \implies S_4/V \cong \mathbb{Z}_6$ vagy $S_4/V \cong S_3$

A két esetet megkülönbözteti a kommutativitás.

$(12)\,V \cdot (13)\,V = (123)\,V, \qquad (13)\,V \cdot (12)\,V = (132)\,V$ és

$(123)\,(132)^{-1} = (132) \notin V \implies (123)\,V \neq (132)\,V,$

tehát S_4/V nem kommutatív, így $S_4/V \cong S_3$.

(Később látunk majd egy „tanulságosabb" megoldást is.)

Példa

Határozzuk meg az $N = [f] \lhd D_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

Példa

Határozzuk meg az $N = [f] \triangleleft D_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$D_4/N = \{\{\text{forgatások}\}, \{\text{tükrözések}\}\}$$

Példa

Határozzuk meg az $N = [f] \lhd D_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$D_4/N = \{\{\text{forgatások}\}, \{\text{tükrözések}\}\}$$

$$D_4/N \;=\; \begin{array}{c|cc} \cdot & \{\text{forg.}\} & \{\text{tükr.}\} \\ \hline \{\text{forg.}\} & \{\text{forg.}\} & \{\text{tükr.}\} \\ \{\text{tükr.}\} & \{\text{tükr.}\} & \{\text{forg.}\} \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az $N = [f] \triangleleft D_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$D_4/N = \{\{\text{forgatások}\}, \{\text{tükrözések}\}\}$$

$$D_4/N \;=\; \begin{array}{c|cc} \cdot & \{\text{forg.}\} & \{\text{tükr.}\} \\ \hline \{\text{forg.}\} & \{\text{forg.}\} & \{\text{tükr.}\} \\ \{\text{tükr.}\} & \{\text{tükr.}\} & \{\text{forg.}\} \end{array} \;\cong\; \begin{array}{r|rr} \cdot & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \;\cong\; \mathbb{Z}_2$$

Példa

Határozzuk meg az $N = [f] \triangleleft D_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$D_4/N = \{\{\text{forgatások}\}, \{\text{tükrözések}\}\}$$

$$D_4/N \;=\; \begin{array}{c|cc} \cdot & \{\text{forg.}\} & \{\text{tükr.}\} \\ \hline \{\text{forg.}\} & \{\text{forg.}\} & \{\text{tükr.}\} \\ \{\text{tükr.}\} & \{\text{tükr.}\} & \{\text{forg.}\} \end{array} \;\cong\; \begin{array}{r|rr} \cdot & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \;\cong\; \mathbb{Z}_2$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon D_4/N \to \{\pm 1\}, \quad \{\text{forg.}\} \mapsto 1,\ \{\text{tükr.}\} \mapsto -1$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta =$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$,

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \triangleleft \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi); \oplus)$,
ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi)\,; \oplus)$,
ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi)\,; \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)\,, \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi)\,; \oplus)$,
ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi)\,; \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)\,, \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \triangleleft \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi)\,; \oplus)$,
ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi)\,; \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)\,, \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi) ; \oplus)$, ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi) ; \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)\,, \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi = F_{\alpha\oplus\beta}$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi)\,; \oplus)$,
ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi)\,; \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)\,, \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi = F_{\alpha\oplus\beta} = F_{\alpha+\beta}$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi)\,; \oplus)$,
ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi)\,; \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)\,, \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi = F_{\alpha\oplus\beta} = F_{\alpha+\beta} = F_\alpha \cdot F_\beta$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi)\,; \oplus)$,
ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi)\,; \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)\,, \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi = F_{\alpha\oplus\beta} = F_{\alpha+\beta} = F_\alpha \cdot F_\beta = \alpha\varphi \cdot \beta\varphi$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi)\,; \oplus)$,
ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi)\,; \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)\,, \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi = F_{\alpha\oplus\beta} = F_{\alpha+\beta} = F_\alpha \cdot F_\beta = \alpha\varphi \cdot \beta\varphi$

Másik megoldás: legyen $T = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi); \oplus)$,
ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi); \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot), \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi = F_{\alpha\oplus\beta} = F_{\alpha+\beta} = F_\alpha \cdot F_\beta = \alpha\varphi \cdot \beta\varphi$

Másik megoldás: legyen $T = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$;
ekkor $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong (T; \cdot)$.

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi)\,; \oplus)$,
ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi)\,; \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)\,, \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi = F_{\alpha\oplus\beta} = F_{\alpha+\beta} = F_\alpha \cdot F_\beta = \alpha\varphi \cdot \beta\varphi$

Másik megoldás: legyen $T = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$;
ekkor $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong (T; \cdot)$.

Izomorfizmus: $\psi\colon\ (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \to (T; \cdot)\,, \quad F_\alpha \mapsto$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi) ; \oplus)$,
ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi) ; \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)\,, \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi = F_{\alpha\oplus\beta} = F_{\alpha+\beta} = F_\alpha \cdot F_\beta = \alpha\varphi \cdot \beta\varphi$

Másik megoldás: legyen $T = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$;
ekkor $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong (T; \cdot)$.

Izomorfizmus: $\psi\colon\ (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \to (T; \cdot)\,, \quad F_\alpha \mapsto \operatorname{cis}(\alpha)$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi); \oplus)$,
ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi); \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)\,, \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi = F_{\alpha\oplus\beta} = F_{\alpha+\beta} = F_\alpha \cdot F_\beta = \alpha\varphi \cdot \beta\varphi$

Másik megoldás: legyen $T = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$;
ekkor $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong (T; \cdot)$.

Izomorfizmus: $\psi\colon\ (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \to (T; \cdot)\,, \quad F_\alpha \mapsto \operatorname{cis}(\alpha)$

- bijektivitás: világos

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi) ; \oplus)$, ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi) ; \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)\,, \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi = F_{\alpha\oplus\beta} = F_{\alpha+\beta} = F_\alpha \cdot F_\beta = \alpha\varphi \cdot \beta\varphi$

Másik megoldás: legyen $T = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$; ekkor $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong (T; \cdot)$.

Izomorfizmus: $\psi\colon\ (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \to (T; \cdot)\,, \quad F_\alpha \mapsto \operatorname{cis}(\alpha)$

- bijektivitás: világos
- homomorfia:
  $(F_\alpha \cdot F_\beta)\,\psi$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi)\,; \oplus)$, ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi)\,; \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)\,, \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi = F_{\alpha\oplus\beta} = F_{\alpha+\beta} = F_\alpha \cdot F_\beta = \alpha\varphi \cdot \beta\varphi$

Másik megoldás: legyen $T = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$; ekkor $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong (T; \cdot)$.

Izomorfizmus: $\psi\colon\ (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \to (T; \cdot)\,, \quad F_\alpha \mapsto \operatorname{cis}(\alpha)$

- bijektivitás: világos
- homomorfia:
  $(F_\alpha \cdot F_\beta)\,\psi = F_{\alpha+\beta}\psi$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi); \oplus)$, ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi); \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot), \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi = F_{\alpha\oplus\beta} = F_{\alpha+\beta} = F_\alpha \cdot F_\beta = \alpha\varphi \cdot \beta\varphi$

Másik megoldás: legyen $T = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$; ekkor $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong (T; \cdot)$.

Izomorfizmus: $\psi\colon\ (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \to (T; \cdot), \quad F_\alpha \mapsto \operatorname{cis}(\alpha)$

- bijektivitás: világos
- homomorfia:
  $(F_\alpha \cdot F_\beta)\,\psi = F_{\alpha+\beta}\psi = \operatorname{cis}(\alpha + \beta)$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \triangleleft \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi)\,; \oplus)$, ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi)\,; \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)\,, \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi = F_{\alpha\oplus\beta} = F_{\alpha+\beta} = F_\alpha \cdot F_\beta = \alpha\varphi \cdot \beta\varphi$

Másik megoldás: legyen $T = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$; ekkor $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong (T; \cdot)$.

Izomorfizmus: $\psi\colon\ (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \to (T; \cdot)\,, \quad F_\alpha \mapsto \operatorname{cis}(\alpha)$

- bijektivitás: világos
- homomorfia:
  $(F_\alpha \cdot F_\beta)\,\psi = F_{\alpha+\beta}\psi = \operatorname{cis}(\alpha+\beta) = \operatorname{cis}(\alpha) \cdot \operatorname{cis}(\beta)$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi); \oplus)$,
ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ ([0, 2\pi); \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)\,, \quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi = F_{\alpha\oplus\beta} = F_{\alpha+\beta} = F_\alpha \cdot F_\beta = \alpha\varphi \cdot \beta\varphi$

Másik megoldás: legyen $T = \{z \in \mathbb{C} \colon\ |z| = 1\}$;
ekkor $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong (T; \cdot)$.

Izomorfizmus: $\psi\colon\ (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \to (T; \cdot)\,, \quad F_\alpha \mapsto \operatorname{cis}(\alpha)$

- bijektivitás: világos
- homomorfia:
  $(F_\alpha \cdot F_\beta)\,\psi = F_{\alpha+\beta}\psi = \operatorname{cis}(\alpha+\beta) = \operatorname{cis}(\alpha) \cdot \operatorname{cis}(\beta) = F_\alpha\psi \cdot F_\beta\psi$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0, 1)\}$$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0, 1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong ([0, 1)\,; \oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong ([0,1)\,; \oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong ([0,1)\,; \oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Másik megoldás: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong (T; \cdot)$.

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong ([0,1)\,; \oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Másik megoldás: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong (T; \cdot)$.
Izomorfizmus: $\varphi\colon\ (\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \to (T; \cdot)\,, \quad x + \mathbb{Z} \mapsto$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong ([0,1)\,; \oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Másik megoldás: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong (T; \cdot)$.
Izomorfizmus: $\varphi \colon (\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \to (T; \cdot)\,, \quad x + \mathbb{Z} \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong ([0,1)\,; \oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Másik megoldás: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong (T; \cdot)$.
Izomorfizmus: $\varphi \colon (\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \to (T; \cdot)\,, \quad x + \mathbb{Z} \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$

- jóldefiniáltság és bijektivitás:
  $(x + \mathbb{Z})\,\varphi = (y + \mathbb{Z})\,\varphi$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong ([0,1)\,; \oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Másik megoldás: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong (T; \cdot)$.
Izomorfizmus: $\varphi\colon\ (\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \to (T; \cdot)\,, \quad x + \mathbb{Z} \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$

- jóldefiniáltság és bijektivitás:
  $(x + \mathbb{Z})\,\varphi = (y + \mathbb{Z})\,\varphi \iff \operatorname{cis}(2\pi x) = \operatorname{cis}(2\pi y)$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong ([0,1)\,; \oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Másik megoldás: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong (T; \cdot)$.
Izomorfizmus: $\varphi \colon\ (\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \to (T; \cdot)\,, \quad x + \mathbb{Z} \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$

- jóldefiniáltság és bijektivitás:

$$\begin{aligned}(x+\mathbb{Z})\,\varphi = (y+\mathbb{Z})\,\varphi \quad &\iff \operatorname{cis}(2\pi x) = \operatorname{cis}(2\pi y)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : 2\pi y = 2\pi x + 2\pi k\end{aligned}$$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong ([0,1)\,; \oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Másik megoldás: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong (T; \cdot)$.
Izomorfizmus: $\varphi \colon (\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \to (T; \cdot)\,, \quad x + \mathbb{Z} \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$

- jóldefiniáltság és bijektivitás:

$$\begin{aligned}(x+\mathbb{Z})\,\varphi = (y+\mathbb{Z})\,\varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{cis}(2\pi x) = \operatorname{cis}(2\pi y)\\ &\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : 2\pi y = 2\pi x + 2\pi k\\ &\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : y = x + k\end{aligned}$$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z};+) \cong ([0,1)\,;\oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Másik megoldás: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z};+) \cong (T;\cdot)$.
Izomorfizmus: $\varphi\colon\ (\mathbb{R}/\mathbb{Z};+) \to (T;\cdot)\,, \quad x + \mathbb{Z} \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$

- jóldefiniáltság és bijektivitás:

$$\begin{aligned}(x+\mathbb{Z})\,\varphi = (y+\mathbb{Z})\,\varphi \quad &\iff \operatorname{cis}(2\pi x) = \operatorname{cis}(2\pi y)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : 2\pi y = 2\pi x + 2\pi k\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = x + k\\ &\iff x + \mathbb{Z} = y + \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z};+) \cong ([0,1)\,;\oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Másik megoldás: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z};+) \cong (T;\cdot)$.
Izomorfizmus: $\varphi\colon\ (\mathbb{R}/\mathbb{Z};+) \to (T;\cdot)\,,\quad x + \mathbb{Z} \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$

- jóldefiniáltság és bijektivitás:

$$\begin{aligned}(x+\mathbb{Z})\,\varphi = (y+\mathbb{Z})\,\varphi &\iff \operatorname{cis}(2\pi x) = \operatorname{cis}(2\pi y)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : 2\pi y = 2\pi x + 2\pi k\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = x + k\\ &\iff x + \mathbb{Z} = y + \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- homomorfia:

$$\big((x+\mathbb{Z}) + (y+\mathbb{Z})\big)\varphi$$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong ([0,1)\,; \oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Másik megoldás: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong (T; \cdot)$.
Izomorfizmus: $\varphi\colon\ (\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \to (T; \cdot)\,, \quad x + \mathbb{Z} \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$

- jóldefiniáltság és bijektivitás:
$$\begin{aligned}(x+\mathbb{Z})\,\varphi = (y+\mathbb{Z})\,\varphi \quad &\iff \operatorname{cis}(2\pi x) = \operatorname{cis}(2\pi y)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : 2\pi y = 2\pi x + 2\pi k\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = x + k\\ &\iff x + \mathbb{Z} = y + \mathbb{Z}\end{aligned}$$
- homomorfia:
$$\big((x+\mathbb{Z}) + (y+\mathbb{Z})\big)\varphi \ = (x+y+\mathbb{Z})\,\varphi$$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong ([0,1)\,; \oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Másik megoldás: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong (T; \cdot)$.
Izomorfizmus: $\varphi\colon\ (\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \to (T; \cdot)\,, \quad x + \mathbb{Z} \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$

- jóldefiniáltság és bijektivitás:

$$\begin{aligned}(x+\mathbb{Z})\,\varphi = (y+\mathbb{Z})\,\varphi \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{cis}(2\pi x) = \operatorname{cis}(2\pi y)\\ &\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : 2\pi y = 2\pi x + 2\pi k\\ &\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : y = x + k\\ &\Longleftrightarrow \quad x + \mathbb{Z} = y + \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- homomorfia:

$$\begin{aligned}\big((x+\mathbb{Z}) + (y+\mathbb{Z})\big)\varphi &= (x + y + \mathbb{Z})\,\varphi\\ &= \operatorname{cis}(2\pi\,(x+y))\end{aligned}$$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong ([0,1)\,; \oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Másik megoldás: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong (T; \cdot)$.
Izomorfizmus: $\varphi\colon\ (\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \to (T; \cdot)\,, \quad x + \mathbb{Z} \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$

- jóldefiniáltság és bijektivitás:
$$\begin{aligned}(x+\mathbb{Z})\,\varphi = (y+\mathbb{Z})\,\varphi \quad &\iff \operatorname{cis}(2\pi x) = \operatorname{cis}(2\pi y)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : 2\pi y = 2\pi x + 2\pi k\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = x + k\\ &\iff x + \mathbb{Z} = y + \mathbb{Z}\end{aligned}$$
- homomorfia:
$$\begin{aligned}\big((x+\mathbb{Z}) + (y+\mathbb{Z})\big)\varphi &= (x+y+\mathbb{Z})\,\varphi\\ &= \operatorname{cis}(2\pi\,(x+y))\\ &= \operatorname{cis}(2\pi x + 2\pi y)\end{aligned}$$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z};+) \cong ([0,1)\,;\oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Másik megoldás: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z};+) \cong (T;\cdot)$.
Izomorfizmus: $\varphi\colon\ (\mathbb{R}/\mathbb{Z};+) \to (T;\cdot)\,, \quad x + \mathbb{Z} \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$

- jóldefiniáltság és bijektivitás:
$$\begin{aligned}(x+\mathbb{Z})\,\varphi = (y+\mathbb{Z})\,\varphi \quad &\iff \operatorname{cis}(2\pi x) = \operatorname{cis}(2\pi y)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : 2\pi y = 2\pi x + 2\pi k\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = x + k\\ &\iff x + \mathbb{Z} = y + \mathbb{Z}\end{aligned}$$
- homomorfia:
$$\begin{aligned}\big((x+\mathbb{Z}) + (y+\mathbb{Z})\big)\varphi &= (x+y+\mathbb{Z})\,\varphi\\ &= \operatorname{cis}(2\pi\,(x+y))\\ &= \operatorname{cis}(2\pi x + 2\pi y)\\ &= \operatorname{cis}(2\pi x)\cdot\operatorname{cis}(2\pi y)\end{aligned}$$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong ([0,1)\,; \oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Másik megoldás: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong (T; \cdot)$.
Izomorfizmus: $\varphi\colon\ (\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \to (T; \cdot)\,,\quad x + \mathbb{Z} \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$

- jóldefiniáltság és bijektivitás:

$$\begin{aligned}(x+\mathbb{Z})\,\varphi = (y+\mathbb{Z})\,\varphi \quad &\Longleftrightarrow \operatorname{cis}(2\pi x) = \operatorname{cis}(2\pi y)\\ &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2\pi y = 2\pi x + 2\pi k\\ &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = x + k\\ &\Longleftrightarrow x + \mathbb{Z} = y + \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- homomorfia:

$$\begin{aligned}\big((x+\mathbb{Z}) + (y+\mathbb{Z})\big)\varphi &= (x+y+\mathbb{Z})\,\varphi\\ &= \operatorname{cis}(2\pi\,(x+y))\\ &= \operatorname{cis}(2\pi x + 2\pi y)\\ &= \operatorname{cis}(2\pi x)\cdot\operatorname{cis}(2\pi y)\\ &= (x+\mathbb{Z})\,\varphi\cdot(y+\mathbb{Z})\,\varphi\end{aligned}$$

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

Példa

Határozzuk meg az $\mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) \lhd \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}) / \mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) = \{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cong \mathbb{R}^*$$

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \lhd \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cong \mathbb{R}^*$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*, \quad D_\lambda \mapsto \lambda$

Példa

Határozzuk meg az $\mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) = \{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cong \mathbb{R}^*$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ \mathsf{GL}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*, \quad D_\lambda \mapsto \lambda$

- bijektivitás: világos

Példa

Határozzuk meg az $\mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) \lhd \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) = \{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cong \mathbb{R}^*$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ \mathsf{GL}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*, \quad D_\lambda \mapsto \lambda$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(D_\lambda \cdot D_\mu)\,\varphi$

Példa

Határozzuk meg az $\mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}) / \mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) = \{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cong \mathbb{R}^*$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ \mathsf{GL}_n(\mathbb{R}) / \mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*, \quad D_\lambda \mapsto \lambda$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(D_\lambda \cdot D_\mu)\,\varphi = D_{\lambda\cdot\mu}\varphi$

Példa

Határozzuk meg az $\mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) = \{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cong \mathbb{R}^*$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ \mathsf{GL}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*, \quad D_\lambda \mapsto \lambda$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(D_\lambda \cdot D_\mu)\,\varphi = D_{\lambda\cdot\mu}\varphi = \lambda \cdot \mu$

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cong \mathbb{R}^*$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*, \quad D_\lambda \mapsto \lambda$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(D_\lambda \cdot D_\mu)\,\varphi = D_{\lambda\cdot\mu}\varphi = \lambda \cdot \mu = D_\lambda\varphi \cdot D_\mu\varphi$

Példa

Határozzuk meg az $\{1\} \triangleleft G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

Példa

Határozzuk meg az $\{1\} \triangleleft G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/\{1\} = \{\{a\} : a \in G\} \cong G$$

Példa

Határozzuk meg az $\{1\} \lhd G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/\{1\} = \{\{a\} : a \in G\} \cong G$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon G/\{1\} \to G, \quad \{a\} \mapsto a$

Példa

Határozzuk meg az $\{1\} \triangleleft G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/\{1\} = \{\{a\} : a \in G\} \cong G$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon G/\{1\} \to G, \quad \{a\} \mapsto a$

- bijektivitás: világos

Példa

Határozzuk meg az $\{1\} \triangleleft G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/\{1\} = \{\{a\} : a \in G\} \cong G$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon G/\{1\} \to G, \quad \{a\} \mapsto a$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\{a\} \cdot \{b\})\,\varphi$

Példa

Határozzuk meg az $\{1\} \triangleleft G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/\{1\} = \{\{a\} : a \in G\} \cong G$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon G/\{1\} \to G, \quad \{a\} \mapsto a$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\{a\} \cdot \{b\})\,\varphi = \{a \cdot b\}\,\varphi$

Példa

Határozzuk meg az $\{1\} \triangleleft G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/\{1\} = \{\{a\} : a \in G\} \cong G$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon G/\{1\} \to G, \quad \{a\} \mapsto a$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\{a\} \cdot \{b\})\,\varphi = \{a \cdot b\}\,\varphi = a \cdot b$

Példa

Határozzuk meg az $\{1\} \triangleleft G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/\{1\} = \{\{a\} : a \in G\} \cong G$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon G/\{1\} \to G, \quad \{a\} \mapsto a$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\{a\} \cdot \{b\})\,\varphi = \{a \cdot b\}\,\varphi = a \cdot b = \{a\}\,\varphi \cdot \{b\}\,\varphi$

Példa

Határozzuk meg az $\{1\} \triangleleft G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/\{1\} = \{\{a\} : a \in G\} \cong G$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon G/\{1\} \to G, \quad \{a\} \mapsto a$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\{a\} \cdot \{b\})\,\varphi = \{a \cdot b\}\,\varphi = a \cdot b = \{a\}\,\varphi \cdot \{b\}\,\varphi$

Példa

Határozzuk meg a $G \triangleleft G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

Példa

Határozzuk meg az $\{1\} \lhd G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/\{1\} = \{\{a\} : a \in G\} \cong G$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon G/\{1\} \to G, \quad \{a\} \mapsto a$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\{a\} \cdot \{b\})\,\varphi = \{a \cdot b\}\,\varphi = a \cdot b = \{a\}\,\varphi \cdot \{b\}\,\varphi$

Példa

Határozzuk meg a $G \lhd G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/G = \{G\} \cong \{1\}$$

Definíció

Az $a \in G$ elem g-vel való **konjugáltján** a $g^{-1}ag$ elemet értjük.

Definíció

Az $a \in G$ elem g-vel való **konjugáltján** a $g^{-1}ag$ elemet értjük. Az $\alpha_g \colon G \to G$, $x \mapsto g^{-1}xg$ leképezést g-vel való **konjugálásnak** nevezzük.

Definíció

Az $a \in G$ elem g-vel való **konjugáltján** a $g^{-1}ag$ elemet értjük. Az $\alpha_g \colon G \to G$, $x \mapsto g^{-1}xg$ leképezést g-vel való **konjugálásnak** nevezzük. Azt mondjuk, hogy a és b **konjugáltak**, ha létezik olyan $g \in G$ elem, amelyre $b = g^{-1}ag$.

Definíció

Az $a \in G$ elem g-vel való **konjugáltján** a $g^{-1}ag$ elemet értjük. Az $\alpha_g \colon G \to G$, $x \mapsto g^{-1}xg$ leképezést g-vel való **konjugálásnak** nevezzük. Azt mondjuk, hogy a és b **konjugáltak**, ha létezik olyan $g \in G$ elem, amelyre $b = g^{-1}ag$.

Állítás

Minden $g \in G$-re α_g automorfizmusa G-nek; ezeket nevezzük **belső automorfizmusoknak**.

Biz.

[F] II/8. fejezet.

Definíció

Az $a \in G$ elem g-vel való **konjugáltján** a $g^{-1}ag$ elemet értjük. Az $\alpha_g : G \to G$, $x \mapsto g^{-1}xg$ leképezést g-vel való **konjugálásnak** nevezzük. Azt mondjuk, hogy a és b **konjugáltak**, ha létezik olyan $g \in G$ elem, amelyre $b = g^{-1}ag$.

Állítás

Minden $g \in G$-re α_g automorfizmusa G-nek; ezeket nevezzük **belső automorfizmusoknak**.

Biz.

[F] II/8. fejezet.

$\square$

Állítás

A konjugáltsági reláció ekvivalenciareláció; a megfelelő ekvivalenciaosztályokat **konjugáltosztályoknak** *nevezzük.*

Biz.

HF $\square$

Állítás

Egy $N \subseteq G$ *halmaz pontosan akkor normálosztó, ha részalgebrája a* $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}, \alpha_g \, (g \in G)\right)$ *algebrának.*

Állítás

Egy $N \subseteq G$ halmaz pontosan akkor normálosztó, ha részalgebrája a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}, \alpha_g\,(g \in G)\right)$ algebrának. A részalgebrákról tanultakat erre az algebrára alkalmazva kapjuk az alábbiakat.

Állítás

Egy $N \subseteq G$ halmaz pontosan akkor normálosztó, ha részalgebrája a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}, \alpha_g \, (g \in G)\right)$ algebrának. A részalgebrákról tanultakat erre az algebrára alkalmazva kapjuk az alábbiakat.

- *Normálosztók metszete normálosztó.*

Állítás

Egy $N \subseteq G$ halmaz pontosan akkor normálosztó, ha részalgebrája a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}, \alpha_g \left(g \in G\right)\right)$ algebrának. A részalgebrákról tanultakat erre az algebrára alkalmazva kapjuk az alábbiakat.

- *Normálosztók metszete normálosztó.*
- *Egy $B \subseteq G$ halmaz által* **generált normálosztón** *az összes B-t tartalmazó normálosztók metszetét értjük.*

Állítás

Egy $N \subseteq G$ halmaz pontosan akkor normálosztó, ha részalgebrája a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}, \alpha_g \, (g \in G)\right)$ algebrának. A részalgebrákról tanultakat erre az algebrára alkalmazva kapjuk az alábbiakat.

- *Normálosztók metszete normálosztó.*
- *Egy $B \subseteq G$ halmaz által* **generált normálosztón** *az összes B-t tartalmazó normálosztók metszetét értjük.*
- *A B halmaz által generált normálosztó a legszűkebb B-t tartalmazó normálosztó.*

Állítás

Egy $N \subseteq G$ halmaz pontosan akkor normálosztó, ha részalgebrája a $\left(G;\cdot,1,^{-1},\alpha_g\,(g\in G)\right)$ algebrának. A részalgebrákról tanultakat erre az algebrára alkalmazva kapjuk az alábbiakat.

- *Normálosztók metszete normálosztó.*
- *Egy $B \subseteq G$ halmaz által* **generált normálosztón** *az összes B-t tartalmazó normálosztók metszetét értjük.*
- *A B halmaz által generált normálosztó a legszűkebb B-t tartalmazó normálosztó. Ez mindazokból az elemekből áll, amelyek megkaphatók B elemeiből*

Állítás

Egy $N \subseteq G$ halmaz pontosan akkor normálosztó, ha részalgebrája a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}, \alpha_g \left(g \in G\right)\right)$ algebrának. A részalgebrákról tanultakat erre az algebrára alkalmazva kapjuk az alábbiakat.

- *Normálosztók metszete normálosztó.*
- *Egy $B \subseteq G$ halmaz által* **generált normálosztón** *az összes B-t tartalmazó normálosztók metszetét értjük.*
- *A B halmaz által generált normálosztó a legszűkebb B-t tartalmazó normálosztó. Ez mindazokból az elemekből áll, amelyek megkaphatók B elemeiből szorzás, inverzképzés és konjugálások véges számú alkalmazásával.*

Állítás

Egy $N \subseteq G$ halmaz pontosan akkor normálosztó, ha részalgebrája a $\left(G; \cdot, 1, {}^{-1}, \alpha_g \, (g \in G)\right)$ algebrának. A részalgebrákról tanultakat erre az algebrára alkalmazva kapjuk az alábbiakat.

- *Normálosztók metszete normálosztó.*
- *Egy $B \subseteq G$ halmaz által* **generált normálosztón** *az összes B-t tartalmazó normálosztók metszetét értjük.*
- *A B halmaz által generált normálosztó a legszűkebb B-t tartalmazó normálosztó. Ez mindazokból az elemekből áll, amelyek megkaphatók B elemeiből szorzás, inverzképzés és konjugálások véges számú alkalmazásával.*

Biz.

HF $\square$

Állítás

Egy $N \subseteq G$ halmaz pontosan akkor normálosztó, ha részalgebrája a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}, \alpha_g \, (g \in G)\right)$ algebrának. A részalgebrákról tanultakat erre az algebrára alkalmazva kapjuk az alábbiakat.

- *Normálosztók metszete normálosztó.*
- *Egy $B \subseteq G$ halmaz által* **generált normálosztón** *az összes B-t tartalmazó normálosztók metszetét értjük.*
- *A B halmaz által generált normálosztó a legszűkebb B-t tartalmazó normálosztó. Ez mindazokból az elemekből áll, amelyek megkaphatók B elemeiből szorzás, inverzképzés és konjugálások véges számú alkalmazásával.*

Biz.

HF $\square$

Példa

- Abel-csoportban minden elem csak saját magával konjugált (a konjugáltsági reláció az egyenlőség reláció).

Állítás

Egy $N \subseteq G$ halmaz pontosan akkor normálosztó, ha részalgebrája a $(G; \cdot, 1, ^{-1}, \alpha_g\ (g \in G))$ algebrának. A részalgebrákról tanultakat erre az algebrára alkalmazva kapjuk az alábbiakat.

- *Normálosztók metszete normálosztó.*
- *Egy $B \subseteq G$ halmaz által* **generált normálosztón** *az összes B-t tartalmazó normálosztók metszetét értjük.*
- *A B halmaz által generált normálosztó a legszűkebb B-t tartalmazó normálosztó. Ez mindazokból az elemekből áll, amelyek megkaphatók B elemeiből szorzás, inverzképzés és konjugálások véges számú alkalmazásával.*

Biz.

HF □

Példa

- Abel-csoportban minden elem csak saját magával konjugált (a konjugáltsági reláció az egyenlőség reláció).
- Bármely csoportban az egységelem csak saját magához konjugált.

Állítás

Egy $N \subseteq G$ halmaz pontosan akkor normálosztó, ha részalgebrája a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}, \alpha_g\,(g \in G)\right)$ algebrának. A részalgebrákról tanultakat erre az algebrára alkalmazva kapjuk az alábbiakat.

- *Normálosztók metszete normálosztó.*
- *Egy $B \subseteq G$ halmaz által* **generált normálosztón** *az összes B-t tartalmazó normálosztók metszetét értjük.*
- *A B halmaz által generált normálosztó a legszűkebb B-t tartalmazó normálosztó. Ez mindazokból az elemekből áll, amelyek megkaphatók B elemeiből szorzás, inverzképzés és konjugálások véges számú alkalmazásával.*

Biz.

HF $\square$

Példa

- Abel-csoportban minden elem csak saját magával konjugált (a konjugáltsági reláció az egyenlőség reláció).
- Bármely csoportban az egységelem csak saját magához konjugált.
- Két mátrix akkor és csak akkor konjugált a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ csoportban, ha

Állítás

Egy $N \subseteq G$ halmaz pontosan akkor normálosztó, ha részalgebrája a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}, \alpha_g \left(g \in G\right)\right)$ algebrának. A részalgebrákról tanultakat erre az algebrára alkalmazva kapjuk az alábbiakat.

- *Normálosztók metszete normálosztó.*
- *Egy $B \subseteq G$ halmaz által* **generált normálosztón** *az összes B-t tartalmazó normálosztók metszetét értjük.*
- *A B halmaz által generált normálosztó a legszűkebb B-t tartalmazó normálosztó. Ez mindazokból az elemekből áll, amelyek megkaphatók B elemeiből szorzás, inverzképzés és konjugálások véges számú alkalmazásával.*

Biz.

HF $\square$

Példa

- Abel-csoportban minden elem csak saját magával konjugált (a konjugáltsági reláció az egyenlőség reláció).
- Bármely csoportban az egységelem csak saját magához konjugált.
- Két mátrix akkor és csak akkor konjugált a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ csoportban, ha az $\mathbb{R}^n$ vektortér ugyanazon lineáris transzformációját adják meg (különböző bázisokban).

Állítás

Két S_n-beli permutáció akkor és csak akkor konjugált, ha ugyanaz a **ciklusszerkezetük** *(azaz minden ℓ-re ugyanannyi ℓ hosszúságú ciklust tartalmaznak).*

Állítás

Két S_n-beli permutáció akkor és csak akkor konjugált, ha ugyanaz a **ciklusszerkezetük** *(azaz minden ℓ-re ugyanannyi ℓ hosszúságú ciklust tartalmaznak).*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.16. Állítás.
Legyen $\pi = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_k)\,(b_1\, b_2\, \ldots\, b_l) \ldots \in S_n$ és $\sigma \in S_n$.

Állítás

Két S_n-beli permutáció akkor és csak akkor konjugált, ha ugyanaz a **ciklusszerkezetük** *(azaz minden ℓ-re ugyanannyi ℓ hosszúságú ciklust tartalmaznak).*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.16. Állítás.
Legyen $\pi = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_k)\,(b_1\, b_2\, \ldots\, b_l) \ldots \in S_n$ és $\sigma \in S_n$. Állítjuk, hogy ekkor

$$\sigma^{-1}\pi\sigma \stackrel{?}{=} (a_1\sigma\, a_2\sigma\, \ldots a_k\sigma)\,(b_1\sigma\, b_2\sigma\, \ldots b_l\sigma) \ldots .$$

Állítás

Két S_n-beli permutáció akkor és csak akkor konjugált, ha ugyanaz a **ciklusszerkezetük** *(azaz minden ℓ-re ugyanannyi ℓ hosszúságú ciklust tartalmaznak).*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.16. Állítás.

Legyen $\pi = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_k)\,(b_1\, b_2\, \ldots\, b_l) \ldots \in S_n$ és $\sigma \in S_n$. Állítjuk, hogy ekkor

$$\sigma^{-1}\pi\sigma \stackrel{?}{=} (a_1\sigma\, a_2\sigma\, \ldots a_k\sigma)\,(b_1\sigma\, b_2\sigma\, \ldots b_l\sigma) \ldots .$$

Szorozzunk balról σ-val (ez ekvivalens átalakítás):

Állítás

Két S_n-beli permutáció akkor és csak akkor konjugált, ha ugyanaz a **ciklusszerkezetük** *(azaz minden ℓ-re ugyanannyi ℓ hosszúságú ciklust tartalmaznak).*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.16. Állítás.

Legyen $\pi = (a_1\, a_2\, \dots\, a_k)\,(b_1\, b_2\, \dots\, b_l) \ldots \in S_n$ és $\sigma \in S_n$. Állítjuk, hogy ekkor

$$\sigma^{-1}\pi\sigma \stackrel{?}{=} (a_1\sigma\; a_2\sigma\; \dots a_k\sigma)\,(b_1\sigma\; b_2\sigma\; \dots b_l\sigma) \ldots.$$

Szorozzunk balról σ-val (ez ekvivalens átalakítás):

$$\pi\sigma \stackrel{?}{=} \sigma\,(a_1\sigma\; a_2\sigma\; \dots a_k\sigma)\,(b_1\sigma\; b_2\sigma\; \dots b_l\sigma) \ldots.$$

Állítás

Két S_n-beli permutáció akkor és csak akkor konjugált, ha ugyanaz a **ciklusszerkezetük** *(azaz minden ℓ-re ugyanannyi ℓ hosszúságú ciklust tartalmaznak).*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.16. Állítás.
Legyen $\pi = (a_1\, a_2\, \dots\, a_k)\,(b_1\, b_2\, \dots\, b_l) \ldots \in S_n$ és $\sigma \in S_n$. Állítjuk, hogy ekkor

$$\sigma^{-1}\pi\sigma \stackrel{?}{=} (a_1\sigma\; a_2\sigma\; \dots a_k\sigma)\,(b_1\sigma\; b_2\sigma\; \dots b_l\sigma) \ldots .$$

Szorozzunk balról σ-val (ez ekvivalens átalakítás):

$$\pi\sigma \stackrel{?}{=} \sigma\,(a_1\sigma\; a_2\sigma\; \dots a_k\sigma)\,(b_1\sigma\; b_2\sigma\; \dots b_l\sigma) \ldots .$$

Egy tetszőleges a_i elem képe a baloldali és a jobboldali permutáció mellett egyaránt

Állítás

Két S_n-beli permutáció akkor és csak akkor konjugált, ha ugyanaz a **ciklusszerkezetük** *(azaz minden ℓ-re ugyanannyi ℓ hosszúságú ciklust tartalmaznak).*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.16. Állítás.

Legyen $\pi = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_k)\,(b_1\, b_2\, \ldots\, b_l) \ldots \in S_n$ és $\sigma \in S_n$. Állítjuk, hogy ekkor

$$\sigma^{-1}\pi\sigma \stackrel{?}{=} (a_1\sigma\, a_2\sigma\, \ldots a_k\sigma)\,(b_1\sigma\, b_2\sigma\, \ldots b_l\sigma) \ldots .$$

Szorozzunk balról σ-val (ez ekvivalens átalakítás):

$$\pi\sigma \stackrel{?}{=} \sigma\,(a_1\sigma\, a_2\sigma\, \ldots a_k\sigma)\,(b_1\sigma\, b_2\sigma\, \ldots b_l\sigma) \ldots .$$

Egy tetszőleges a_i elem képe a baloldali és a jobboldali permutáció mellett egyaránt $a_{i\oplus 1}\sigma$. (HF) $\square$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoport által generált N normálosztót és az S_3/N faktorcsoportot.

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoport által generált N normálosztót és az S_3/N faktorcsoportot.

A konjugáltak:

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoport által generált N normálosztót és az S_3/N faktorcsoportot.

A konjugáltak: id, (23), (12), (13).

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoport által generált N normálosztót és az S_3/N faktorcsoportot.

A konjugáltak: id, $(23)\,,\ (12)\,,\ (13)$.

A konjugáltak által generált részcsoport: $N = [(12)\,, (13)\,, (23)] = S_3$.

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoport által generált N normálosztót és az S_3/N faktorcsoportot.

A konjugáltak: id, $(23)\,,\ (12)\,,\ (13)$.

A konjugáltak által generált részcsoport: $N = [(12)\,,(13)\,,(23)] = S_3$.

A faktorcsoport: $S_3/S_3 = \{S_3\} \cong \{1\}$.

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.
A konjugáltosztályok:

- $\{\text{id}\}$ (1 db)

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.
A konjugáltosztályok:

- $\{\mathrm{id}\}$ (1 db)
- $(\,\bullet\;\bullet\,)$ alakú permutációk (6 db)

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok:

- $\{\mathrm{id}\}$ (1 db)
- $(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (8 db)

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.
A konjugáltosztályok:

- $\{\mathrm{id}\}$ (1 db)
- $(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (8 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.
A konjugáltosztályok:

- $\{\mathrm{id}\}$ (1 db)
- $(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (8 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (3 db)

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.
A konjugáltosztályok:

- $\{\mathrm{id}\}$ (1 db)
- $(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (8 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (3 db)

Ha $N \lhd S_4$, akkor egyrészt $|N|$ a fenti számok közül néhánynak az összege (az 1-nek mindenképpen szerepelnie kell az összegben),

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.
A konjugáltosztályok:

- $\{\mathrm{id}\}$ (1 db)
- $(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (8 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (3 db)

Ha $N \triangleleft S_4$, akkor egyrészt $|N|$ a fenti számok közül néhánynak az összege (az 1-nek mindenképpen szerepelnie kell az összegben), másrészt $|N|$ osztója 24-nek.

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.
A konjugáltosztályok:

- $\{\mathrm{id}\}$ (1 db)
- $(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (8 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (3 db)

Ha $N \lhd S_4$, akkor egyrészt $|N|$ a fenti számok közül néhánynak az összege (az 1-nek mindenképpen szerepelnie kell az összegben), másrészt $|N|$ osztója 24-nek. A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\mathrm{id}\};$

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.
A konjugáltosztályok:

- $\{\mathrm{id}\}$ (1 db)
- $(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (8 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (3 db)

Ha $N \triangleleft S_4$, akkor egyrészt $|N|$ a fenti számok közül néhánynak az összege (az 1-nek mindenképpen szerepelnie kell az összegben), másrészt $|N|$ osztója 24-nek. A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\mathrm{id}\}$;
- $|N| = 1 + 3 = 4, \quad N = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = V$;

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.
A konjugáltosztályok:

- $\{\text{id}\}$ (1 db)
- $(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (8 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (3 db)

Ha $N \lhd S_4$, akkor egyrészt $|N|$ a fenti számok közül néhánynak az összege (az 1-nek mindenképpen szerepelnie kell az összegben), másrészt $|N|$ osztója 24-nek. A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\text{id}\}$;
- $|N| = 1 + 3 = 4, \quad N = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = V$;
- $|N| = 1 + 3 + 8 = 12, \quad N = \{\text{id}, (12)(34), \ldots, (123), \ldots\} = A_4$;

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.
A konjugáltosztályok:

- $\{\text{id}\}$ (1 db)
- $(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (8 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (3 db)

Ha $N \lhd S_4$, akkor egyrészt $|N|$ a fenti számok közül néhánynak az összege (az 1-nek mindenképpen szerepelnie kell az összegben), másrészt $|N|$ osztója 24-nek. A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\text{id}\};$
- $|N| = 1 + 3 = 4, \quad N = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = V;$
- $|N| = 1 + 3 + 8 = 12, \quad N = \{\text{id}, (12)(34), \ldots, (123), \ldots\} = A_4;$
- $|N| = 24$, $N = S_4$.

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.
A konjugáltosztályok:

- $\{\text{id}\}$ (1 db)
- $(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (8 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (3 db)

Ha $N \triangleleft S_4$, akkor egyrészt $|N|$ a fenti számok közül néhánynak az összege (az 1-nek mindenképpen szerepelnie kell az összegben), másrészt $|N|$ osztója 24-nek. A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\text{id}\}$;
- $|N| = 1 + 3 = 4, \quad N = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = V$;
- $|N| = 1 + 3 + 8 = 12, \quad N = \{\text{id}, (12)(34), \ldots, (123), \ldots\} = A_4$;
- $|N| = 24$, $N = S_4$.

Mind a négy esetben valóban normálosztót kapunk.

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.
A konjugáltosztályok:

- $\{\mathrm{id}\}$ (1 db)
- $(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (8 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (3 db)

Ha $N \lhd S_4$, akkor egyrészt $|N|$ a fenti számok közül néhánynak az összege (az 1-nek mindenképpen szerepelnie kell az összegben), másrészt $|N|$ osztója 24-nek. A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\mathrm{id}\};$
- $|N| = 1 + 3 = 4, \quad N = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = V;$
- $|N| = 1 + 3 + 8 = 12, \quad N = \{\mathrm{id}, (12)(34), \ldots, (123), \ldots\} = A_4;$
- $|N| = 24$, $N = S_4$.

Mind a négy esetben valóban normálosztót kapunk.
(Ez nem automatikus, ellenőrizni kell!)

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoport által generált N normálosztót és a D_4/N faktorcsoportot.

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\text{id}, t\} \leq D_4$ részcsoport által generált N normálosztót és a D_4/N faktorcsoportot.

A konjugáltak:

$$
\begin{array}{llll}
\text{id}^{-1} \cdot t \cdot \text{id} & = t & t^{-1} \cdot t \cdot t & = t \\
f^{-1} \cdot t \cdot f & = tf^2 & (tf)^{-1} \cdot t \cdot tf & = tf^2 \\
f^{-2} \cdot t \cdot f^2 & = t & \left(tf^2\right)^{-1} \cdot t \cdot tf^2 & = t \\
f^{-3} \cdot t \cdot f^3 & = tf^2 & \left(tf^3\right)^{-1} \cdot t \cdot tf^3 & = tf^2
\end{array}
$$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoport által generált N normálosztót és a D_4/N faktorcsoportot.

A konjugáltak:

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{id}^{-1} \cdot t \cdot \mathrm{id} & = t & t^{-1} \cdot t \cdot t & = t \\
f^{-1} \cdot t \cdot f & = tf^2 & (tf)^{-1} \cdot t \cdot tf & = tf^2 \\
f^{-2} \cdot t \cdot f^2 & = t & \left(tf^2\right)^{-1} \cdot t \cdot tf^2 & = t \\
f^{-3} \cdot t \cdot f^3 & = tf^2 & \left(tf^3\right)^{-1} \cdot t \cdot tf^3 & = tf^2
\end{array}$$

A konjugáltak által generált részcsoport:
$N = \left[t, tf^2\right]$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoport által generált N normálosztót és a D_4/N faktorcsoportot.

A konjugáltak:

$$
\begin{array}{llll}
\mathrm{id}^{-1} \cdot t \cdot \mathrm{id} & = t & t^{-1} \cdot t \cdot t & = t \\
f^{-1} \cdot t \cdot f & = tf^2 & (tf)^{-1} \cdot t \cdot tf & = tf^2 \\
f^{-2} \cdot t \cdot f^2 & = t & \left(tf^2\right)^{-1} \cdot t \cdot tf^2 & = t \\
f^{-3} \cdot t \cdot f^3 & = tf^2 & \left(tf^3\right)^{-1} \cdot t \cdot tf^3 & = tf^2
\end{array}
$$

A konjugáltak által generált részcsoport:
$N = \left[t, tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\}$

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoport által generált N normálosztót és a D_4/N faktorcsoportot.

A konjugáltak:

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{id}^{-1} \cdot t \cdot \mathrm{id} & = t & t^{-1} \cdot t \cdot t & = t \\
f^{-1} \cdot t \cdot f & = tf^2 & (tf)^{-1} \cdot t \cdot tf & = tf^2 \\
f^{-2} \cdot t \cdot f^2 & = t & \left(tf^2\right)^{-1} \cdot t \cdot tf^2 & = t \\
f^{-3} \cdot t \cdot f^3 & = tf^2 & \left(tf^3\right)^{-1} \cdot t \cdot tf^3 & = tf^2
\end{array}$$

A konjugáltak által generált részcsoport:
$N = \left[t, tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong V$.

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoport által generált N normálosztót és a D_4/N faktorcsoportot.

A konjugáltak:

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{id}^{-1} \cdot t \cdot \mathrm{id} & = t & t^{-1} \cdot t \cdot t & = t \\
f^{-1} \cdot t \cdot f & = tf^2 & (tf)^{-1} \cdot t \cdot tf & = tf^2 \\
f^{-2} \cdot t \cdot f^2 & = t & \left(tf^2\right)^{-1} \cdot t \cdot tf^2 & = t \\
f^{-3} \cdot t \cdot f^3 & = tf^2 & \left(tf^3\right)^{-1} \cdot t \cdot tf^3 & = tf^2
\end{array}$$

A konjugáltak által generált részcsoport:
$N = \left[t, tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong V$.

A faktorcsoport: $D_4/N = \left\{\left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\}, \left\{f, f^3, tf, tf^3\right\}\right\} \cong \mathbb{Z}_2$.

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes normálosztóját.

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok: $\{\mathrm{id}\}, \quad \{f^2\}, \quad \{f, f^3\}, \quad \{t, tf^2\}, \quad \{tf, tf^3\}$.

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok: $\{\mathrm{id}\}, \quad \{f^2\}, \quad \{f, f^3\}, \quad \{t, tf^2\}, \quad \{tf, tf^3\}$.

Ha $N \lhd D_4$, akkor N a fenti halmazok közül néhánynak az uniója ($\{\mathrm{id}\}$ mindenképpen szerepel), másrészt $|N|$ osztója 8-nak.

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok: $\{\mathrm{id}\}, \quad \{f^2\}, \quad \{f, f^3\}, \quad \{t, tf^2\}, \quad \{tf, tf^3\}$.

Ha $N \triangleleft D_4$, akkor N a fenti halmazok közül néhánynak az uniója ($\{\mathrm{id}\}$ mindenképpen szerepel), másrészt $|N|$ osztója 8-nak.
A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\mathrm{id}\}$;

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok: $\{\mathrm{id}\}$, $\{f^2\}$, $\{f, f^3\}$, $\{t, tf^2\}$, $\{tf, tf^3\}$.

Ha $N \lhd D_4$, akkor N a fenti halmazok közül néhánynak az uniója ($\{\mathrm{id}\}$ mindenképpen szerepel), másrészt $|N|$ osztója 8-nak.
A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\mathrm{id}\}$;
- $|N| = 1 + 1 = 2, \quad N = \{\mathrm{id}, f^2\} \cong \mathbb{Z}_2$;

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok: $\{\mathrm{id}\}$, $\{f^2\}$, $\{f, f^3\}$, $\{t, tf^2\}$, $\{tf, tf^3\}$.

Ha $N \lhd D_4$, akkor N a fenti halmazok közül néhánynak az uniója ($\{\mathrm{id}\}$ mindenképpen szerepel), másrészt $|N|$ osztója 8-nak.
A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\mathrm{id}\}$;
- $|N| = 1 + 1 = 2, \quad N = \{\mathrm{id}, f^2\} \cong \mathbb{Z}_2$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \{\mathrm{id}, f^2, f, f^3\} \cong \mathbb{Z}_4$;

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok: $\{\mathrm{id}\}$, $\left\{f^2\right\}$, $\left\{f, f^3\right\}$, $\left\{t, tf^2\right\}$, $\left\{tf, tf^3\right\}$.

Ha $N \lhd D_4$, akkor N a fenti halmazok közül néhánynak az uniója ($\{\mathrm{id}\}$ mindenképpen szerepel), másrészt $|N|$ osztója 8-nak.
A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\mathrm{id}\}$;
- $|N| = 1 + 1 = 2, \quad N = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\} \cong \mathbb{Z}_2$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \left\{\mathrm{id}, f^2, f, f^3\right\} \cong \mathbb{Z}_4$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong V$;

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok: $\{\mathrm{id}\}$, $\left\{f^2\right\}$, $\left\{f, f^3\right\}$, $\left\{t, tf^2\right\}$, $\left\{tf, tf^3\right\}$.

Ha $N \lhd D_4$, akkor N a fenti halmazok közül néhánynak az uniója ($\{\mathrm{id}\}$ mindenképpen szerepel), másrészt $|N|$ osztója 8-nak.
A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\mathrm{id}\}$;
- $|N| = 1 + 1 = 2, \quad N = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\} \cong \mathbb{Z}_2$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \left\{\mathrm{id}, f^2, f, f^3\right\} \cong \mathbb{Z}_4$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong V$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} \cong V$;

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok: $\{\mathrm{id}\}, \quad \{f^2\}, \quad \{f, f^3\}, \quad \{t, tf^2\}, \quad \{tf, tf^3\}$.

Ha $N \lhd D_4$, akkor N a fenti halmazok közül néhánynak az uniója ($\{\mathrm{id}\}$ mindenképpen szerepel), másrészt $|N|$ osztója 8-nak.
A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\mathrm{id}\}$;
- $|N| = 1 + 1 = 2, \quad N = \{\mathrm{id}, f^2\} \cong \mathbb{Z}_2$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \{\mathrm{id}, f^2, f, f^3\} \cong \mathbb{Z}_4$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\} \cong V$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong V$;
- $|N| = 8$, $N = D_4$.

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok: $\{\mathrm{id}\}$, $\{f^2\}$, $\{f, f^3\}$, $\{t, tf^2\}$, $\{tf, tf^3\}$.

Ha $N \triangleleft D_4$, akkor N a fenti halmazok közül néhánynak az uniója ($\{\mathrm{id}\}$ mindenképpen szerepel), másrészt $|N|$ osztója 8-nak.
A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\mathrm{id}\}$;
- $|N| = 1 + 1 = 2, \quad N = \{\mathrm{id}, f^2\} \cong \mathbb{Z}_2$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \{\mathrm{id}, f^2, f, f^3\} \cong \mathbb{Z}_4$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\} \cong V$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong V$;
- $|N| = 8$, $N = D_4$.

Mind a hat esetben valóban normálosztót kapunk.
(Ez nem automatikus, ellenőrizni kell!)

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok: $\{\text{id}\}$, $\{f^2\}$, $\{f, f^3\}$, $\{t, tf^2\}$, $\{tf, tf^3\}$.

Ha $N \triangleleft D_4$, akkor N a fenti halmazok közül néhánynak az uniója ($\{\text{id}\}$ mindenképpen szerepel), másrészt $|N|$ osztója 8-nak.
A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\text{id}\}$;
- $|N| = 1 + 1 = 2, \quad N = \{\text{id}, f^2\} \cong \mathbb{Z}_2$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \{\text{id}, f^2, f, f^3\} \cong \mathbb{Z}_4$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \{\text{id}, f^2, t, tf^2\} \cong V$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \{\text{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong V$;
- $|N| = 8$, $N = D_4$.

Mind a hat esetben valóban normálosztót kapunk.
(Ez nem automatikus, ellenőrizni kell!)

Rajzoljuk fel a normálosztóhálót!

1. Mellékosztályok, Lagrange tétele
2. Normálosztó, faktorcsoport
3. Homomorfiatétel, izomorfiatételek
4. Permutációcsoportok
5. Direkt szorzat

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] XII/4 és [F] II/9,10 fejezetekben található.

Legyen $\varphi\colon G \to H$ csoporthomomorfizmus. Általános algebrában φ magját így definiáltuk:

$$\ker \varphi = \{(a, b) : a\varphi = b\varphi\} \subseteq G \times G.$$

Legyen $\varphi\colon G \to H$ csoporthomomorfizmus. Általános algebrában φ magját így definiáltuk:

$$\ker \varphi = \{(a, b) : a\varphi = b\varphi\} \subseteq G \times G.$$

Ez egy kongruenciája a G csoportnak, ezért az egységelem osztálya egy N normálosztót alkot G-ben.

Legyen $\varphi\colon G \to H$ csoporthomomorfizmus. Általános algebrában φ magját így definiáltuk:

$$\ker \varphi = \{(a, b) : a\varphi = b\varphi\} \subseteq G \times G.$$

Ez egy kongruenciája a G csoportnak, ezért az egységelem osztálya egy N normálosztót alkot G-ben. Ez a normálosztó teljesen meghatározza a $\ker \varphi$ kongruenciát (ugyanis $(a, b) \in \ker \varphi \iff aN = bN$); csoportelméletben magon ezt a normálosztót értjük.

Legyen $\varphi\colon G \to H$ csoporthomomorfizmus. Általános algebrában φ magját így definiáltuk:

$$\ker \varphi = \{(a, b) : a\varphi = b\varphi\} \subseteq G \times G.$$

Ez egy kongruenciája a G csoportnak, ezért az egységelem osztálya egy N normálosztót alkot G-ben. Ez a normálosztó teljesen meghatározza a $\ker \varphi$ kongruenciát (ugyanis $(a, b) \in \ker \varphi \iff aN = bN$); csoportelméletben magon ezt a normálosztót értjük.

Definíció

A $\varphi\colon G \to H$ csoporthomomorfizmus **magja** :

$$\ker \varphi := \{g \in G \colon g\varphi = 1\}.$$

Legyen $\varphi\colon G \to H$ csoporthomomorfizmus. Általános algebrában φ magját így definiáltuk:

$$\ker\varphi = \{(a,b) : a\varphi = b\varphi\} \subseteq G \times G.$$

Ez egy kongruenciája a G csoportnak, ezért az egységelem osztálya egy N normálosztót alkot G-ben. Ez a normálosztó teljesen meghatározza a $\ker\varphi$ kongruenciát (ugyanis $(a,b) \in \ker\varphi \iff aN = bN$); csoportelméletben magon ezt a normálosztót értjük.

Definíció

A $\varphi\colon G \to H$ csoporthomomorfizmus **magja** :

$$\ker\varphi := \{g \in G\colon g\varphi = 1\}.$$

Az általános algebrai homomorfiatétel speciális eseteként kapjuk:

Legyen $\varphi\colon G \to H$ csoporthomomorfizmus. Általános algebrában φ magját így definiáltuk:

$$\ker \varphi = \{(a, b) : a\varphi = b\varphi\} \subseteq G \times G.$$

Ez egy kongruenciája a G csoportnak, ezért az egységelem osztálya egy N normálosztót alkot G-ben. Ez a normálosztó teljesen meghatározza a $\ker \varphi$ kongruenciát (ugyanis $(a, b) \in \ker \varphi \iff aN = bN$); csoportelméletben magon ezt a normálosztót értjük.

Definíció

A $\varphi\colon G \to H$ csoporthomomorfizmus **magja** :

$$\ker \varphi := \{g \in G \colon g\varphi = 1\}\,.$$

Az általános algebrai homomorfiatétel speciális eseteként kapjuk:

Tétel (Csoportelméleti homomorfiatétel)

Ha $\varphi\colon G \to H$ csoporthomomorfizmus, akkor $\ker \varphi \lhd G$ és

$$G/\ker \varphi \cong G\varphi \leq H.$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.11. Tétel. $\square$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$, $\overline{k} \mapsto \widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$, $\overline{k} \mapsto \widehat{k}$ homomorfizmus.
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált:

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$, $\overline{k} \mapsto \widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies k_1 \equiv k_2 \pmod 3$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$, $\overline{k} \mapsto \widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies k_1 \equiv k_2 \pmod 3$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right) \varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = \widehat{k_1 + k_2} = \widehat{k_1} + \widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$, $\overline{k} \mapsto \widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies k_1 \equiv k_2 \pmod 3$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = \widehat{k_1 + k_2} = \widehat{k_1} + \widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 : \widehat{k} = \widehat{0}\right\}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$, $\overline{k} \mapsto \widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies k_1 \equiv k_2 \pmod 3$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = \widehat{k_1 + k_2} = \widehat{k_1} + \widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6\colon \widehat{k} = \widehat{0}\right\} = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6\colon 3 \mid k\right\}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$, $\overline{k} \mapsto \widehat{k}$ homomorfizmus.
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies k_1 \equiv k_2 \pmod 3$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = \widehat{k_1 + k_2} = \widehat{k_1} + \widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon \widehat{k} = \widehat{0}\right\} = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 3 \mid k\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\} \lhd \mathbb{Z}_6$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$, $\overline{k} \mapsto \widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies k_1 \equiv k_2 \pmod 3$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right) \varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = \widehat{k_1 + k_2} = \widehat{k_1} + \widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon \widehat{k} = \widehat{0}\right\} = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 3 \mid k\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\} \triangleleft \mathbb{Z}_6$
- értékkészlet: $\mathbb{Z}_6\varphi = \left\{\widehat{k} \colon \overline{k} \in \mathbb{Z}_6\right\}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$, $\overline{k} \mapsto \widehat{k}$ homomorfizmus.
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies k_1 \equiv k_2 \pmod 3$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = \widehat{k_1 + k_2} = \widehat{k_1} + \widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6\colon \widehat{k} = \widehat{0}\right\} = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6\colon 3 \mid k\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\} \lhd \mathbb{Z}_6$
- értékkészlet: $\mathbb{Z}_6\varphi = \left\{\widehat{k}\colon \overline{k} \in \mathbb{Z}_6\right\} = \mathbb{Z}_3$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$, $\overline{k} \mapsto \widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies k_1 \equiv k_2 \pmod 3$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = \widehat{k_1 + k_2} = \widehat{k_1} + \widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon \widehat{k} = \widehat{0}\right\} = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 3 \mid k\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\} \triangleleft \mathbb{Z}_6$
- értékkészlet: $\mathbb{Z}_6\varphi = \left\{\widehat{k} \colon \overline{k} \in \mathbb{Z}_6\right\} = \mathbb{Z}_3$
- izomorfizmus:
  $\psi\colon \mathbb{Z}_6 / \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\} \to \mathbb{Z}_3, \quad \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\} \mapsto \widehat{0},\ \left\{\overline{1}, \overline{4}\right\} \mapsto \widehat{1},\ \left\{\overline{2}, \overline{5}\right\} \mapsto \widehat{2}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$, $\overline{k} \mapsto 5\widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$, $\overline{k} \mapsto 5\widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált:

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$, $\overline{k} \mapsto 5\widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies 5k_1 \equiv 5k_2 \pmod{10}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$, $\overline{k} \mapsto 5\widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies 5k_1 \equiv 5k_2 \pmod{10}$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = 5\widehat{k_1 + k_2} = 5\widehat{k_1} + 5\widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$, $\overline{k} \mapsto 5\widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies 5k_1 \equiv 5k_2 \pmod{10}$
- φ homomorfizmus:

  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = 5\widehat{k_1 + k_2} = 5\widehat{k_1} + 5\widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag:

  $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 5\widehat{k} = \widehat{0}\right\}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$, $\overline{k} \mapsto 5\widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies 5k_1 \equiv 5k_2 \pmod{10}$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = 5\widehat{k_1 + k_2} = 5\widehat{k_1} + 5\widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag:
  $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 5\widehat{k} = \widehat{0}\right\} = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 10 \mid 5k\right\}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$, $\overline{k} \mapsto 5\widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies 5k_1 \equiv 5k_2 \pmod{10}$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = 5\widehat{k_1 + k_2} = 5\widehat{k_1} + 5\widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag:
  $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 5\widehat{k} = \widehat{0}\right\} = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 10 \mid 5k\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\} \lhd \mathbb{Z}_6$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10},\ \overline{k} \mapsto 5\widehat{k}$ homomorfizmus.
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies 5k_1 \equiv 5k_2 \pmod{10}$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = 5\widehat{k_1 + k_2} = 5\widehat{k_1} + 5\widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag:
  $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 5\widehat{k} = \widehat{0}\right\} = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 10 \mid 5k\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\} \triangleleft \mathbb{Z}_6$
- értékkészlet: $\mathbb{Z}_6\varphi = \left\{5\widehat{k} \colon \overline{k} \in \mathbb{Z}_6\right\}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$, $\overline{k} \mapsto 5\widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies 5k_1 \equiv 5k_2 \pmod{10}$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = 5\widehat{k_1 + k_2} = 5\widehat{k_1} + 5\widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag:
  $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 5\widehat{k} = \widehat{0}\right\} = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 10 \mid 5k\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\} \lhd \mathbb{Z}_6$
- értékkészlet: $\mathbb{Z}_6\varphi = \left\{5\widehat{k} \colon \overline{k} \in \mathbb{Z}_6\right\} = \left\{\widehat{0}, \widehat{5}\right\} \leq \mathbb{Z}_{10}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10},\ \overline{k} \mapsto 5\widehat{k}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies 5k_1 \equiv 5k_2 \pmod{10}$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = 5\widehat{k_1 + k_2} = 5\widehat{k_1} + 5\widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag:
  $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 5\widehat{k} = \widehat{0}\right\} = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 10 \mid 5k\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\} \lhd \mathbb{Z}_6$
- értékkészlet: $\mathbb{Z}_6\varphi = \left\{5\widehat{k} \colon \overline{k} \in \mathbb{Z}_6\right\} = \left\{\widehat{0}, \widehat{5}\right\} \leq \mathbb{Z}_{10}$
- izomorfizmus:
  $\psi\colon \mathbb{Z}_6 / \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\} \to \mathbb{Z}_{10}, \quad \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\} \mapsto \widehat{0}, \ \left\{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\right\} \mapsto \widehat{5}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ homomorfizmus.
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(z \cdot w)\,\varphi = \frac{z \cdot w}{|z \cdot w|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|} = z\varphi \cdot w\varphi$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(z \cdot w)\,\varphi = \frac{z \cdot w}{|z \cdot w|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|} = z\varphi \cdot w\varphi$

- mag: $\ker\varphi = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \colon \frac{z}{|z|} = 1 \right\}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:
  $(z \cdot w)\,\varphi = \frac{z \cdot w}{|z \cdot w|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|} = z\varphi \cdot w\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \colon \frac{z}{|z|} = 1 \right\} = \{ z \in \mathbb{C}^* \colon z = |z| \}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ homomorfizmus.
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(z \cdot w)\,\varphi = \frac{z \cdot w}{|z \cdot w|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|} = z\varphi \cdot w\varphi$

- mag: $\ker\varphi = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \colon \frac{z}{|z|} = 1 \right\} = \{ z \in \mathbb{C}^* \colon z = |z| \} = \mathbb{R}^+ \triangleleft \mathbb{C}^*$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(z \cdot w)\,\varphi = \frac{z \cdot w}{|z \cdot w|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|} = z\varphi \cdot w\varphi$

- mag: $\ker\varphi = \left\{z \in \mathbb{C}^* \colon \frac{z}{|z|} = 1\right\} = \{z \in \mathbb{C}^* \colon z = |z|\} = \mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$

- értékkészlet: $\mathbb{C}^*\varphi = \left\{\frac{z}{|z|} \colon z \in \mathbb{C}^*\right\}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:
  $(z \cdot w)\,\varphi = \frac{z \cdot w}{|z \cdot w|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|} = z\varphi \cdot w\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \colon \frac{z}{|z|} = 1 \right\} = \{ z \in \mathbb{C}^* \colon z = |z| \} = \mathbb{R}^+ \triangleleft \mathbb{C}^*$
- értékkészlet: $\mathbb{C}^*\varphi = \left\{ \frac{z}{|z|} \colon z \in \mathbb{C}^* \right\} = T \leq \mathbb{C}^*$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ homomorfizmus.
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(z \cdot w)\,\varphi = \frac{z \cdot w}{|z \cdot w|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|} = z\varphi \cdot w\varphi$

- mag: $\ker\varphi = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \colon \frac{z}{|z|} = 1 \right\} = \{ z \in \mathbb{C}^* \colon z = |z| \} = \mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$

- értékkészlet: $\mathbb{C}^*\varphi = \left\{ \frac{z}{|z|} \colon z \in \mathbb{C}^* \right\} = T \leq \mathbb{C}^*$

- izomorfizmus: $\psi\colon \mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ \to T, \quad F_\alpha \mapsto$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ homomorfizmus.
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:
  $(z \cdot w)\,\varphi = \frac{z \cdot w}{|z \cdot w|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|} = z\varphi \cdot w\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \colon \frac{z}{|z|} = 1 \right\} = \{ z \in \mathbb{C}^* \colon z = |z| \} = \mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$
- értékkészlet: $\mathbb{C}^*\varphi = \left\{ \frac{z}{|z|} \colon z \in \mathbb{C}^* \right\} = T \le \mathbb{C}^*$
- izomorfizmus: $\psi\colon \mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ \to T, \quad F_\alpha \mapsto \operatorname{cis}(\alpha)$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $$(x+y)\,\varphi = \operatorname{cis}(2\pi(x+y)) = \operatorname{cis}(2\pi x)\cdot\operatorname{cis}(2\pi y) = x\varphi \cdot y\varphi$$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(x+y)\,\varphi = \operatorname{cis}(2\pi(x+y)) = \operatorname{cis}(2\pi x) \cdot \operatorname{cis}(2\pi y) = x\varphi \cdot y\varphi$

- mag: $\ker\varphi = \{x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{cis}(2\pi x) = 1\}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $$(x+y)\,\varphi = \operatorname{cis}(2\pi(x+y)) = \operatorname{cis}(2\pi x)\cdot\operatorname{cis}(2\pi y) = x\varphi \cdot y\varphi$$

- mag: $\ker\varphi = \{x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{cis}(2\pi x) = 1\} = \mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(x+y)\,\varphi = \operatorname{cis}(2\pi(x+y)) = \operatorname{cis}(2\pi x)\cdot\operatorname{cis}(2\pi y) = x\varphi\cdot y\varphi$

- mag: $\ker\varphi = \{x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{cis}(2\pi x) = 1\} = \mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$

- értékkészlet: $\mathbb{R}\varphi = \{\operatorname{cis}(2\pi x) : x \in \mathbb{R}\}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(x+y)\,\varphi = \operatorname{cis}(2\pi\,(x+y)) = \operatorname{cis}(2\pi x) \cdot \operatorname{cis}(2\pi y) = x\varphi \cdot y\varphi$

- mag: $\ker\varphi = \{x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{cis}(2\pi x) = 1\} \ = \mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$

- értékkészlet: $\mathbb{R}\varphi = \{\operatorname{cis}(2\pi x) : x \in \mathbb{R}\} \ = \ T \leq \mathbb{C}^*$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(x+y)\,\varphi = \operatorname{cis}(2\pi\,(x+y)) = \operatorname{cis}(2\pi x) \cdot \operatorname{cis}(2\pi y) = x\varphi \cdot y\varphi$

- mag: $\ker\varphi = \{x \in \mathbb{R} \colon\ \operatorname{cis}(2\pi x) = 1\} \ = \mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$

- értékkészlet: $\mathbb{R}\varphi = \{\operatorname{cis}(2\pi x) : x \in \mathbb{R}\} \ = \ T \leq \mathbb{C}^*$

- izomorfizmus: $\psi\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to T, \quad x + \mathbb{Z} \mapsto$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \mathrm{cis}\,(2\pi x)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(x+y)\,\varphi = \mathrm{cis}\,(2\pi\,(x+y)) = \mathrm{cis}\,(2\pi x)\cdot \mathrm{cis}\,(2\pi y) = x\varphi \cdot y\varphi$

- mag: $\ker\varphi = \{x \in \mathbb{R}\colon\ \mathrm{cis}\,(2\pi x) = 1\} \ = \mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$

- értékkészlet: $\mathbb{R}\varphi = \{\mathrm{cis}\,(2\pi x) : x \in \mathbb{R}\} \ = \ T \le \mathbb{C}^*$

- izomorfizmus: $\psi\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \ T, \quad x + \mathbb{Z} \mapsto \ \mathrm{cis}\,(2\pi x)$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det(A)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det(A)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $$(A \cdot B)\,\varphi = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = A\varphi \cdot B\varphi$$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det(A)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(A \cdot B)\varphi = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = A\varphi \cdot B\varphi$

- mag: $\ker\varphi = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) :\ \det(A) = 1\}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det(A)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(A \cdot B)\varphi = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = A\varphi \cdot B\varphi$

- mag: $\ker\varphi = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) :\ \det(A) = 1\} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det(A)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(A \cdot B)\varphi = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = A\varphi \cdot B\varphi$

- mag: $\ker\varphi = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) :\ \det(A) = 1\} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

- értékkészlet: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\varphi = \{\det(A) : A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det(A)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(A \cdot B)\,\varphi = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = A\varphi \cdot B\varphi$

- mag: $\ker\varphi = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) :\ \det(A) = 1\} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

- értékkészlet: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\,\varphi = \{\det(A) : A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\} = \mathbb{R}^*$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det(A)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:

  $(A \cdot B)\,\varphi = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = A\varphi \cdot B\varphi$

- mag: $\ker\varphi = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) :\ \det(A) = 1\} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

- értékkészlet: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\,\varphi = \{\det(A) : A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\} = \mathbb{R}^*$

- izomorfizmus: $\psi\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*, \quad D_\lambda \mapsto \lambda$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon G \to H$, $g \mapsto 1$ homomorfizmus (triviális homomorfizmus).
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon G \to H$, $g \mapsto 1$ homomorfizmus (triviális homomorfizmus).
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus: $(g_1 \cdot g_2)\,\varphi = 1 = 1 \cdot 1 = g_1\varphi \cdot g_2\varphi$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon G \to H$, $g \mapsto 1$ homomorfizmus (triviális homomorfizmus).
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus: $(g_1 \cdot g_2)\,\varphi = 1 = 1 \cdot 1 = g_1\varphi \cdot g_2\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \{g \in G : g\varphi = 1\}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon G \to H$, $g \mapsto 1$ homomorfizmus (triviális homomorfizmus).
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus: $(g_1 \cdot g_2)\,\varphi = 1 = 1 \cdot 1 = g_1\varphi \cdot g_2\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \{g \in G : g\varphi = 1\} = G \lhd G$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon G \to H$, $g \mapsto 1$ homomorfizmus (triviális homomorfizmus).
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus: $(g_1 \cdot g_2)\,\varphi = 1 = 1 \cdot 1 = g_1\varphi \cdot g_2\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \{g \in G : g\varphi = 1\} = G \lhd G$
- értékkészlet: $G\varphi = \{g\varphi\colon g \in G\}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon G \to H$, $g \mapsto 1$ homomorfizmus (triviális homomorfizmus).
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus: $(g_1 \cdot g_2)\,\varphi = 1 = 1 \cdot 1 = g_1\varphi \cdot g_2\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \{g \in G : g\varphi = 1\} = G \lhd G$
- értékkészlet: $G\varphi = \{g\varphi\colon g \in G\} = \{1\} \leq H$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon G \to H$, $g \mapsto 1$ homomorfizmus (triviális homomorfizmus).
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus: $(g_1 \cdot g_2)\,\varphi = 1 = 1 \cdot 1 = g_1\varphi \cdot g_2\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \{g \in G : g\varphi = 1\} = G \triangleleft G$
- értékkészlet: $G\varphi = \{g\varphi\colon g \in G\} = \{1\} \leq H$
- izomorfizmus: $\psi\colon G/G \to \{1\}, \quad G \mapsto 1$

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ homomorfizmus?

Példa

Létezik-e injektív $\varphi \colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \leq S_5$.

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \leq S_5$. Ez lehetetlen,

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \leq S_5$. Ez lehetetlen, mert $7 \nmid 120$ (Lagrange).

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \leq S_5$. Ez lehetetlen, mert $7 \nmid 120$ (Lagrange).

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$ homomorfizmus?

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \leq S_5$. Ez lehetetlen, mert $7 \nmid 120$ (Lagrange).

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_6\varphi \leq S_5$.

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \leq S_5$. Ez lehetetlen, mert $7 \nmid 120$ (Lagrange).

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_6\varphi \leq S_5$. Ekkor $\mathbb{Z}_6\varphi = [\pi]$, ahol $\pi \in S_5$ hatodrendű permutáció.

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \leq S_5$. Ez lehetetlen, mert $7 \nmid 120$ (Lagrange).

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_6\varphi \leq S_5$. Ekkor $\mathbb{Z}_6\varphi = [\pi]$, ahol $\pi \in S_5$ hatodrendű permutáció. Ilyen létezik, például $\pi =$

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \le S_5$. Ez lehetetlen, mert $7 \nmid 120$ (Lagrange).

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_6\varphi \le S_5$. Ekkor $\mathbb{Z}_6\varphi = [\pi]$, ahol $\pi \in S_5$ hatodrendű permutáció. Ilyen létezik, például $\pi = (123)(45)$,

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \leq S_5$. Ez lehetetlen, mert $7 \nmid 120$ (Lagrange).

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_6\varphi \leq S_5$. Ekkor $\mathbb{Z}_6\varphi = [\pi]$, ahol $\pi \in S_5$ hatodrendű permutáció. Ilyen létezik, például $\pi = (123)(45)$, és ekkor $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$, $\overline{k} \mapsto$

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \leq S_5$. Ez lehetetlen, mert $7 \nmid 120$ (Lagrange).

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_6\varphi \leq S_5$. Ekkor $\mathbb{Z}_6\varphi = [\pi]$, ahol $\pi \in S_5$ hatodrendű permutáció. Ilyen létezik, például $\pi = (123)(45)$, és ekkor $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$, $\overline{k} \mapsto \pi^k$ valóban injektív homomorfizmus:

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \leq S_5$. Ez lehetetlen, mert $7 \nmid 120$ (Lagrange).

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_6\varphi \leq S_5$. Ekkor $\mathbb{Z}_6\varphi = [\pi]$, ahol $\pi \in S_5$ hatodrendű permutáció. Ilyen létezik, például $\pi = (123)(45)$, és ekkor $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$, $\overline{k} \mapsto \pi^k$ valóban injektív homomorfizmus:

- φ jóldefiniált és injektív:
  $\overline{k_1}\varphi = \overline{k_2}\varphi \iff \pi^{k_1} = \pi^{k_2} \iff k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \iff \overline{k_1} = \overline{k_2}$

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \leq S_5$. Ez lehetetlen, mert $7 \nmid 120$ (Lagrange).

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_6\varphi \leq S_5$. Ekkor $\mathbb{Z}_6\varphi = [\pi]$, ahol $\pi \in S_5$ hatodrendű permutáció. Ilyen létezik, például $\pi = (123)\,(45)$, és ekkor $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5,\ \overline{k} \mapsto \pi^k$ valóban injektív homomorfizmus:

- φ jóldefiniált és injektív:
  $\overline{k_1}\varphi = \overline{k_2}\varphi \iff \pi^{k_1} = \pi^{k_2} \iff k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \iff \overline{k_1} = \overline{k_2}$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = \pi^{k_1+k_2} = \pi^{k_1} \cdot \pi^{k_2} = \overline{k_1}\varphi \cdot \overline{k_2}\varphi$

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_{24} \to S_3$ homomorfizmus?

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_{24} \to S_3$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_{24}/\ker\varphi \cong S_3$.

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_{24} \to S_3$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_{24}/\ker\varphi \cong S_3$. Ez lehetetlen,

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_{24} \to S_3$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_{24}/\ker\varphi \cong S_3$. Ez lehetetlen, mert $\mathbb{Z}_{24}$ Abel-csoport, és így minden faktorcsoportja is az.

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_{24} \to S_3$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_{24}/\ker\varphi \cong S_3$. Ez lehetetlen, mert $\mathbb{Z}_{24}$ Abel-csoport, és így minden faktorcsoportja is az.

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon D_4 \to V$ homomorfizmus?

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_{24} \to S_3$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_{24}/\ker\varphi \cong S_3$. Ez lehetetlen, mert $\mathbb{Z}_{24}$ Abel-csoport, és így minden faktorcsoportja is az.

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon D_4 \to V$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $D_4/\ker\varphi \cong V$.

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_{24} \to S_3$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_{24}/\ker\varphi \cong S_3$. Ez lehetetlen, mert $\mathbb{Z}_{24}$ Abel-csoport, és így minden faktorcsoportja is az.

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon D_4 \to V$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $D_4/\ker\varphi \cong V$. Ekkor $\ker\varphi$ kételemű normálosztó D_4-ben.

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_{24} \to S_3$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_{24}/\ker\varphi \cong S_3$. Ez lehetetlen, mert $\mathbb{Z}_{24}$ Abel-csoport, és így minden faktorcsoportja is az.

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon D_4 \to V$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $D_4/\ker\varphi \cong V$. Ekkor $\ker\varphi$ kételemű normálosztó D_4-ben. Ilyen csak egy van:

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_{24} \to S_3$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_{24}/\ker\varphi \cong S_3$. Ez lehetetlen, mert $\mathbb{Z}_{24}$ Abel-csoport, és így minden faktorcsoportja is az.

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon D_4 \to V$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $D_4/\ker\varphi \cong V$. Ekkor $\ker\varphi$ kételemű normálosztó D_4-ben. Ilyen csak egy van: $\{\mathrm{id}, f^2\}$,

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_{24} \to S_3$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_{24}/\ker\varphi \cong S_3$. Ez lehetetlen, mert $\mathbb{Z}_{24}$ Abel-csoport, és így minden faktorcsoportja is az.

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon D_4 \to V$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $D_4/\ker\varphi \cong V$. Ekkor $\ker\varphi$ kételemű normálosztó D_4-ben. Ilyen csak egy van: $\{\mathrm{id}, f^2\}$, és valóban, $D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \cong V$ például az alábbi ψ izomorfizmus mellett:

$$\psi\colon D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \to V, \quad \begin{aligned} \{\mathrm{id}, f^2\} &\mapsto \mathrm{id}, & \{f, f^3\} &\mapsto (12)(34)\,, \\ \{t, tf^2\} &\mapsto (13)(24)\,, & \{tf, tf^3\} &\mapsto (14)(23)\,. \end{aligned}$$

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_{24} \to S_3$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_{24}/\ker\varphi \cong S_3$. Ez lehetetlen, mert $\mathbb{Z}_{24}$ Abel-csoport, és így minden faktorcsoportja is az.

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon D_4 \to V$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $D_4/\ker\varphi \cong V$. Ekkor $\ker\varphi$ kételemű normálosztó D_4-ben. Ilyen csak egy van: $\{\mathrm{id}, f^2\}$, és valóban, $D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \cong V$ például az alábbi ψ izomorfizmus mellett:

$$\psi\colon D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \to V, \quad \begin{aligned} \{\mathrm{id}, f^2\} &\mapsto \mathrm{id}, & \{f, f^3\} &\mapsto (12)(34), \\ \{t, tf^2\} &\mapsto (13)(24), & \{tf, tf^3\} &\mapsto (14)(23). \end{aligned}$$

Ebből kapjuk a kívánt $\varphi\colon D_4 \to V$ homomorfizmust:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}\,\varphi &= \mathrm{id}, & f\,\varphi &= (12)(34), & t\,\varphi &= (13)(24), & tf\,\varphi &= (14)(23), \\ f^2\,\varphi &= \mathrm{id}, & f^3\,\varphi &= (12)(34), & tf^2\,\varphi &= (13)(24), & tf^3\,\varphi &= (14)(23). \end{aligned}$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

D_4 faktorcsoportjai:	$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:
(1) $D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$	(a) $\mathbb{Z}_4$
(2) $D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2\right\} \cong V$	(b) $\left\{\overline{0}, \overline{2}\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(3) $D_4/\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$	(c) $\left\{\overline{0}\right\} \cong \{1\}$
(4) $D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong \mathbb{Z}_2$	
(5) $D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$	
(6) $D_4/D_4 \cong \{1\}$	

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

D_4 faktorcsoportjai:	
(1)	$D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$
(2)	$D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \cong V$
(3)	$D_4/\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$D_4/\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\} \cong \mathbb{Z}_2$
(5)	$D_4/\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong \mathbb{Z}_2$
(6)	$D_4/D_4 \cong \{1\}$

$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:	
(a)	$\mathbb{Z}_4$
(b)	$\{\overline{0}, \overline{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(c)	$\{\overline{0}\} \cong \{1\}$

---

(3) $\to$ (b):

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

D_4 faktorcsoportjai:		$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:	
(1)	$D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$	(a)	$\mathbb{Z}_4$
(2)	$D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \cong V$	(b)	$\{\overline{0}, \overline{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(3)	$D_4/\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \cong \mathbb{Z}_2$	(c)	$\{\overline{0}\} \cong \{1\}$
(4)	$D_4/\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\} \cong \mathbb{Z}_2$		
(5)	$D_4/\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong \mathbb{Z}_2$		
(6)	$D_4/D_4 \cong \{1\}$		

(3) $\to$ (b): $\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \mapsto \overline{0}, \quad \{t, tf, tf^2, tf^3\} \mapsto \overline{2}$

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{id}\,\varphi = \overline{0} & f\,\varphi = \overline{0} & f^2\,\varphi = \overline{0} & f^3\,\varphi = \overline{0} \\ t\,\varphi = \overline{2} & tf\,\varphi = \overline{2} & tf^2\,\varphi = \overline{2} & tf^3\,\varphi = \overline{2} \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

D_4 faktorcsoportjai:	
(1)	$D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$
(2)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2\right\} \cong V$
(3)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(5)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(6)	$D_4/D_4 \cong \{1\}$

$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:	
(a)	$\mathbb{Z}_4$
(b)	$\left\{\overline{0}, \overline{2}\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(c)	$\left\{\overline{0}\right\} \cong \{1\}$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

D_4 faktorcsoportjai:	
(1)	$D_4/\left\{\mathrm{id}\right\} \cong D_4$
(2)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2\right\} \cong V$
(3)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(5)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(6)	$D_4/D_4 \cong \{1\}$

$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:	
(a)	$\mathbb{Z}_4$
(b)	$\left\{\overline{0}, \overline{2}\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(c)	$\left\{\overline{0}\right\} \cong \{1\}$

---

(4) $\to$ (b):

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

D_4 faktorcsoportjai:		$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:	
(1)	$D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$	(a)	$\mathbb{Z}_4$
(2)	$D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \cong V$	(b)	$\{\overline{0}, \overline{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(3)	$D_4/\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \cong \mathbb{Z}_2$	(c)	$\{\overline{0}\} \cong \{1\}$
(4)	$D_4/\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\} \cong \mathbb{Z}_2$		
(5)	$D_4/\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong \mathbb{Z}_2$		
(6)	$D_4/D_4 \cong \{1\}$		

(4) $\to$ (b): $\quad \{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\} \mapsto \overline{0}, \quad \{f, f^3, tf, tf^3\} \mapsto \overline{2}$

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{id}\,\varphi = \overline{0} & f\,\varphi = \overline{2} & f^2\,\varphi = \overline{0} & f^3\,\varphi = \overline{2} \\ t\,\varphi = \overline{0} & tf\,\varphi = \overline{2} & tf^2\,\varphi = \overline{0} & tf^3\,\varphi = \overline{2} \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

D_4 faktorcsoportjai:	
(1)	$D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$
(2)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2\right\} \cong V$
(3)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(5)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(6)	$D_4/D_4 \cong \{1\}$

$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:	
(a)	$\mathbb{Z}_4$
(b)	$\left\{\overline{0}, \overline{2}\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(c)	$\left\{\overline{0}\right\} \cong \{1\}$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

D_4 faktorcsoportjai:	$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:
(1) $D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$	(a) $\mathbb{Z}_4$
(2) $D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2\right\} \cong V$	(b) $\left\{\overline{0}, \overline{2}\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(3) $D_4/\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$	(c) $\left\{\overline{0}\right\} \cong \{1\}$
(4) $D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong \mathbb{Z}_2$	
(5) $D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$	
(6) $D_4/D_4 \cong \{1\}$	

(5) $\to$ (b):

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

D_4 faktorcsoportjai:		$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:	
(1)	$D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$	(a)	$\mathbb{Z}_4$
(2)	$D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \cong V$	(b)	$\{\overline{0}, \overline{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(3)	$D_4/\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \cong \mathbb{Z}_2$	(c)	$\{\overline{0}\} \cong \{1\}$
(4)	$D_4/\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\} \cong \mathbb{Z}_2$		
(5)	$D_4/\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong \mathbb{Z}_2$		
(6)	$D_4/D_4 \cong \{1\}$		

(5) $\to$ (b): $\quad \{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\} \mapsto \overline{0}, \quad \{f, f^3, t, tf^2\} \mapsto \overline{2}$

$$\mathrm{id}\,\varphi = \overline{0} \qquad f\,\varphi = \overline{2} \qquad f^2\,\varphi = \overline{0} \qquad f^3\,\varphi = \overline{2}$$

$$t\,\varphi = \overline{2} \qquad tf\,\varphi = \overline{0} \qquad tf^2\,\varphi = \overline{2} \qquad tf^3\,\varphi = \overline{0}$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

	D_4 faktorcsoportjai:
(1)	$D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$
(2)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2\right\} \cong V$
(3)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(5)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(6)	$D_4/D_4 \cong \{1\}$

	$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:
(a)	$\mathbb{Z}_4$
(b)	$\left\{\overline{0}, \overline{2}\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(c)	$\left\{\overline{0}\right\} \cong \{1\}$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

D_4 faktorcsoportjai:		$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:	
(1)	$D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$	(a)	$\mathbb{Z}_4$
(2)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2\right\} \cong V$	(b)	$\left\{\overline{0}, \overline{2}\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(3)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$	(c)	$\left\{\overline{0}\right\} \cong \{1\}$
(4)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong \mathbb{Z}_2$		
(5)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$		
(6)	$D_4/D_4 \cong \{1\}$		

(6) $\to$ (c):

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

D_4 faktorcsoportjai:		$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:	
(1)	$D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$	(a)	$\mathbb{Z}_4$
(2)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2\right\} \cong V$	(b)	$\left\{\overline{0}, \overline{2}\right\} \cong \mathbb{Z}_2$
(3)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$	(c)	$\left\{\overline{0}\right\} \cong \{1\}$
(4)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong \mathbb{Z}_2$		
(5)	$D_4/\left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} \cong \mathbb{Z}_2$		
(6)	$D_4/D_4 \cong \{1\}$		

(6) $\to$ (c): $\left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\} \mapsto \overline{0}$

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{id}\,\varphi = \overline{0} & f\,\varphi = \overline{0} & f^2\,\varphi = \overline{0} & f^3\,\varphi = \overline{0} \\ t\,\varphi = \overline{0} & tf\,\varphi = \overline{0} & tf^2\,\varphi = \overline{0} & tf^3\,\varphi = \overline{0} \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Mivel $\mathbb{Z}_{15}/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust $\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai között.

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Mivel $\mathbb{Z}_{15}/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust $\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai között.

	$\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai:			$\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai:
(1)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}\right\} \cong \mathbb{Z}_{15}$		(a)	$\mathbb{Z}_6$
(2)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0},\overline{5},\overline{10}\right\} \cong \mathbb{Z}_5$		(b)	$\{\widehat{0},\widehat{2},\widehat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$
(3)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\right\} \cong \mathbb{Z}_3$		(c)	$\{\widehat{0},\widehat{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$		(d)	$\{\widehat{0}\} \cong \{1\}$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Mivel $\mathbb{Z}_{15}/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust $\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai között.

$\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai:			$\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai:	
(1)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}\right\} \cong \mathbb{Z}_{15}$		(a)	$\mathbb{Z}_6$
(2)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\right\} \cong \mathbb{Z}_5$		(b)	$\{\widehat{0}, \widehat{2}, \widehat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$
(3)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}\right\} \cong \mathbb{Z}_3$		(c)	$\{\widehat{0}, \widehat{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$		(d)	$\{\widehat{0}\} \cong \{1\}$

(3) $\to$ (b):

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Mivel $\mathbb{Z}_{15}/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust $\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai között.

$\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai:		$\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai:	
(1)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}\right\} \cong \mathbb{Z}_{15}$	(a)	$\mathbb{Z}_6$
(2)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0},\overline{5},\overline{10}\right\} \cong \mathbb{Z}_5$	(b)	$\{\widehat{0},\widehat{2},\widehat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$
(3)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\right\} \cong \mathbb{Z}_3$	(c)	$\{\widehat{0},\widehat{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$	(d)	$\{\widehat{0}\} \cong \{1\}$

(3) $\to$ (b): $\left\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\right\} \mapsto \widehat{0}$, $\left\{\overline{1},\overline{4},\overline{7},\overline{10},\overline{13}\right\} \mapsto \widehat{2}$, $\left\{\overline{2},\overline{5},\overline{8},\overline{11},\overline{14}\right\} \mapsto \widehat{4}$

$$\begin{array}{lllll}
\overline{0}\,\varphi = \widehat{0} & \overline{3}\,\varphi = \widehat{0} & \overline{6}\,\varphi = \widehat{0} & \overline{9}\,\varphi = \widehat{0} & \overline{12}\,\varphi = \widehat{0} \\
\overline{1}\,\varphi = \widehat{2} & \overline{4}\,\varphi = \widehat{2} & \overline{7}\,\varphi = \widehat{2} & \overline{10}\,\varphi = \widehat{2} & \overline{13}\,\varphi = \widehat{2} \\
\overline{2}\,\varphi = \widehat{4} & \overline{5}\,\varphi = \widehat{4} & \overline{8}\,\varphi = \widehat{4} & \overline{11}\,\varphi = \widehat{4} & \overline{14}\,\varphi = \widehat{4}
\end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Mivel $\mathbb{Z}_{15}/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust $\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai között.

$\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai:			$\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai:	
(1)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}\right\} \cong \mathbb{Z}_{15}$		(a)	$\mathbb{Z}_6$
(2)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\right\} \cong \mathbb{Z}_5$		(b)	$\{\widehat{0}, \widehat{2}, \widehat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$
(3)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}\right\} \cong \mathbb{Z}_3$		(c)	$\{\widehat{0}, \widehat{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$		(d)	$\{\widehat{0}\} \cong \{1\}$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Mivel $\mathbb{Z}_{15}/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust $\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai között.

$\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai:			$\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai:	
(1)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}\right\} \cong \mathbb{Z}_{15}$		(a)	$\mathbb{Z}_6$
(2)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0},\overline{5},\overline{10}\right\} \cong \mathbb{Z}_5$		(b)	$\{\widehat{0},\widehat{2},\widehat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$
(3)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\right\} \cong \mathbb{Z}_3$		(c)	$\{\widehat{0},\widehat{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$		(d)	$\{\widehat{0}\} \cong \{1\}$

(3) $\to$ (b):

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Mivel $\mathbb{Z}_{15}/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust $\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai között.

$\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai:		$\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai:	
(1)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}\right\} \cong \mathbb{Z}_{15}$	(a)	$\mathbb{Z}_6$
(2)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0},\overline{5},\overline{10}\right\} \cong \mathbb{Z}_5$	(b)	$\{\widehat{0},\widehat{2},\widehat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$
(3)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\right\} \cong \mathbb{Z}_3$	(c)	$\{\widehat{0},\widehat{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$	(d)	$\{\widehat{0}\} \cong \{1\}$

$$(3) \to (b):\quad \left\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\right\} \mapsto \widehat{0},\quad \left\{\overline{1},\overline{4},\overline{7},\overline{10},\overline{13}\right\} \mapsto \widehat{4},\quad \left\{\overline{2},\overline{5},\overline{8},\overline{11},\overline{14}\right\} \mapsto \widehat{2}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\overline{0}\,\varphi = \widehat{0} & \overline{3}\,\varphi = \widehat{0} & \overline{6}\,\varphi = \widehat{0} & \overline{9}\,\varphi = \widehat{0} & \overline{12}\,\varphi = \widehat{0} \\
\overline{1}\,\varphi = \widehat{4} & \overline{4}\,\varphi = \widehat{4} & \overline{7}\,\varphi = \widehat{4} & \overline{10}\,\varphi = \widehat{4} & \overline{13}\,\varphi = \widehat{4} \\
\overline{2}\,\varphi = \widehat{2} & \overline{5}\,\varphi = \widehat{2} & \overline{8}\,\varphi = \widehat{2} & \overline{11}\,\varphi = \widehat{2} & \overline{14}\,\varphi = \widehat{2}
\end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi \colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Mivel $\mathbb{Z}_{15}/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust $\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai között.

$\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai:		$\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai:	
(1)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}\right\} \cong \mathbb{Z}_{15}$	(a)	$\mathbb{Z}_6$
(2)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\right\} \cong \mathbb{Z}_5$	(b)	$\{\widehat{0}, \widehat{2}, \widehat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$
(3)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}\right\} \cong \mathbb{Z}_3$	(c)	$\{\widehat{0}, \widehat{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$	(d)	$\{\widehat{0}\} \cong \{1\}$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Mivel $\mathbb{Z}_{15}/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust $\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai között.

$\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai:			$\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai:	
(1)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}\right\} \cong \mathbb{Z}_{15}$		(a)	$\mathbb{Z}_6$
(2)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0},\overline{5},\overline{10}\right\} \cong \mathbb{Z}_5$		(b)	$\{\widehat{0},\widehat{2},\widehat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$
(3)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\right\} \cong \mathbb{Z}_3$		(c)	$\{\widehat{0},\widehat{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$		(d)	$\{\widehat{0}\} \cong \{1\}$

(4) $\to$ (d):

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Mivel $\mathbb{Z}_{15}/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust $\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai között.

$\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai:			$\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai:	
(1)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0}\right\} \cong \mathbb{Z}_{15}$		(a)	$\mathbb{Z}_6$
(2)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0},\overline{5},\overline{10}\right\} \cong \mathbb{Z}_5$		(b)	$\{\widehat{0},\widehat{2},\widehat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$
(3)	$\mathbb{Z}_{15}/\left\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\right\} \cong \mathbb{Z}_3$		(c)	$\{\widehat{0},\widehat{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4)	$\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$		(d)	$\{\widehat{0}\} \cong \{1\}$

(4) $\to$ (d): $\left\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\ldots,\overline{14}\right\} \mapsto \widehat{0}$

$$
\begin{array}{ccccc}
\overline{0}\,\varphi=\widehat{0} & \overline{3}\,\varphi=\widehat{0} & \overline{6}\,\varphi=\widehat{0} & \overline{9}\,\varphi=\widehat{0} & \overline{12}\,\varphi=\widehat{0} \\
\overline{1}\,\varphi=\widehat{0} & \overline{4}\,\varphi=\widehat{0} & \overline{7}\,\varphi=\widehat{0} & \overline{10}\,\varphi=\widehat{0} & \overline{13}\,\varphi=\widehat{0} \\
\overline{2}\,\varphi=\widehat{0} & \overline{5}\,\varphi=\widehat{0} & \overline{8}\,\varphi=\widehat{0} & \overline{11}\,\varphi=\widehat{0} & \overline{14}\,\varphi=\widehat{0}
\end{array}
$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Egy másik megoldás: határozzuk meg φ értékét egy generátorrendszeren.

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Egy másik megoldás: határozzuk meg φ értékét egy generátorrendszeren.

Ha $\overline{1}\varphi = \widehat{k} \in \mathbb{Z}_6$, akkor minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{15}$ esetén $\overline{a}\varphi = \widehat{ak}$.

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Egy másik megoldás: határozzuk meg φ értékét egy generátorrendszeren.

Ha $\overline{1}\varphi = \widehat{k} \in \mathbb{Z}_6$, akkor minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{15}$ esetén $\overline{a}\varphi = \widehat{ak}$.

Milyen $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ értékekre lesz

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6,\ \overline{a} \mapsto \widehat{ak}$$

valóban homomorfizmus?

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Egy másik megoldás: határozzuk meg φ értékét egy generátorrendszeren.
Ha $\overline{1}\varphi = \widehat{k} \in \mathbb{Z}_6$, akkor minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{15}$ esetén $\overline{a}\varphi = \widehat{ak}$.
Milyen $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ értékekre lesz

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6,\ \overline{a} \mapsto \widehat{ak}$$

valóban homomorfizmus?

- φ jóldefiniált: Minden $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$-re teljesülnie kell, hogy

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Egy másik megoldás: határozzuk meg φ értékét egy generátorrendszeren.

Ha $\overline{1}\varphi = \widehat{k} \in \mathbb{Z}_6$, akkor minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{15}$ esetén $\overline{a}\varphi = \widehat{ak}$.

Milyen $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ értékekre lesz

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6,\ \overline{a} \mapsto \widehat{ak}$$

valóban homomorfizmus?

- φ jóldefiniált: Minden $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$-re teljesülnie kell, hogy
  $a_1 \equiv a_2 \pmod{15} \implies ka_1 \equiv ka_2 \pmod{6}$.

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Egy másik megoldás: határozzuk meg φ értékét egy generátorrendszeren.
Ha $\overline{1}\varphi = \widehat{k} \in \mathbb{Z}_6$, akkor minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{15}$ esetén $\overline{a}\varphi = \widehat{ak}$.
Milyen $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ értékekre lesz

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6,\ \overline{a} \mapsto \widehat{ak}$$

valóban homomorfizmus?

- φ jóldefiniált: Minden $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$-re teljesülnie kell, hogy
  $a_1 \equiv a_2 \pmod{15} \implies ka_1 \equiv ka_2 \pmod{6}$.
  Tehát $k = 0, 2, 4$ lehet csak.

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Egy másik megoldás: határozzuk meg φ értékét egy generátorrendszeren.
Ha $\overline{1}\varphi = \widehat{k} \in \mathbb{Z}_6$, akkor minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{15}$ esetén $\overline{a}\varphi = \widehat{ak}$.
Milyen $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ értékekre lesz

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6,\ \overline{a} \mapsto \widehat{ak}$$

valóban homomorfizmus?

- φ jóldefiniált: Minden $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$-re teljesülnie kell, hogy
  $a_1 \equiv a_2 \pmod{15} \implies ka_1 \equiv ka_2 \pmod{6}$.
  Tehát $k = 0, 2, 4$ lehet csak.
- φ homomorfizmus:
  $(\overline{a_1} + \overline{a_2})\,\varphi = \overline{a_1 + a_2}\varphi = k\,(\widehat{a_1 + a_2}) = \widehat{ka_1} + \widehat{ka_2} = \overline{a_1}\varphi + \overline{a_2}\varphi$

Emlékeztető:

(1) Ha $N \triangleleft G$, akkor $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ a **természetes homomorfizmus** .

Emlékeztető:

(1) Ha $N \triangleleft G$, akkor $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ a **természetes homomorfizmus** .

(2) Homomorfizmusnál részcsoport képe részcsoport:

Emlékeztető:

(1) Ha $N \triangleleft G$, akkor $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ a **természetes homomorfizmus** .

(2) Homomorfizmusnál részcsoport képe részcsoport:
ha $\varphi\colon G \to \widetilde{G}$ homomorfizmus és $H \le G$, akkor

$$H\varphi = \{h\varphi\colon h \in H\} \le \widetilde{G}.$$

Emlékeztető:

(1) Ha $N \triangleleft G$, akkor $\nu \colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ a **természetes homomorfizmus** .

(2) Homomorfizmusnál részcsoport képe részcsoport:
ha $\varphi \colon G \to \widetilde{G}$ homomorfizmus és $H \leq G$, akkor

$$H\varphi = \{h\varphi \colon h \in H\} \leq \widetilde{G}.$$

(3) Homomorfizmusnál részcsoport teljes inverz képe részcsoport:

Emlékeztető:

(1) Ha $N \triangleleft G$, akkor $\nu \colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ a **természetes homomorfizmus** .

(2) Homomorfizmusnál részcsoport képe részcsoport:
ha $\varphi \colon G \to \widetilde{G}$ homomorfizmus és $H \leq G$, akkor

$$H\varphi = \{h\varphi \colon h \in H\} \leq \widetilde{G}.$$

(3) Homomorfizmusnál részcsoport teljes inverz képe részcsoport:
ha $\varphi \colon G \to \widetilde{G}$ homomorfizmus és $\widetilde{H} \leq \widetilde{G}$, akkor

$$\widetilde{H}\varphi^{-1} = \{g \in G \colon g\varphi \in \widetilde{H}\} \leq G.$$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ *és* $N \lhd G$*, akkor* $N \lhd HN \leq G$ *és* $H \cap N \lhd H \leq G$*, továbbá*

$$HN/N \cong H/H \cap N.$$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ *és* $N \triangleleft G$, *akkor* $N \triangleleft HN \leq G$ *és* $H \cap N \triangleleft H \leq G$, *továbbá*

$$HN/N \cong H/H\cap N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H\colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ és $N \lhd G$, akkor $N \lhd HN \leq G$ és $H \cap N \lhd H \leq G$, továbbá

$$HN/N \cong H/H \cap N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H\colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ *és* $N \lhd G$*, akkor* $N \lhd HN \leq G$ *és* $H \cap N \lhd H \leq G$*, továbbá*

$$HN/N \cong H/H{\cap}N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H\colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

- mag:
  $\ker \nu|_H$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ *és* $N \lhd G$, *akkor* $N \lhd HN \leq G$ *és* $H \cap N \lhd H \leq G$, *továbbá*

$$HN/N \cong H/H \cap N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H\colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

- mag:
  $\ker \nu|_H = \{h \in H\colon h\nu = N\}$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ *és* $N \triangleleft G$, *akkor* $N \triangleleft HN \leq G$ *és* $H \cap N \triangleleft H \leq G$, *továbbá*

$$HN/N \cong H/H \cap N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N,\ g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H\colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

- mag:
  $\ker \nu|_H = \{h \in H\colon h\nu = N\} = \{h \in H\colon hN = N\}$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \le G$ *és* $N \lhd G$*, akkor* $N \lhd HN \le G$ *és* $H \cap N \lhd H \le G$*, továbbá*

$$HN/N \cong H/H\cap N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N,\ g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H\colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

- mag:
  $\ker \nu|_H = \{h \in H\colon h\nu = N\} = \{h \in H\colon hN = N\} = H \cap N \lhd H$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ *és* $N \triangleleft G$, *akkor* $N \triangleleft HN \leq G$ *és* $H \cap N \triangleleft H \leq G$, *továbbá*

$$HN/N \cong H/H \cap N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H\colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

- mag:
  $\ker \nu|_H = \{h \in H\colon h\nu = N\} = \{h \in H\colon hN = N\} = H \cap N \triangleleft H$
- értékkészlet:
  $H\nu|_H$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ *és* $N \triangleleft G$, *akkor* $N \triangleleft HN \leq G$ *és* $H \cap N \triangleleft H \leq G$, *továbbá*

$$HN/N \cong H/H\cap N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N,\ g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H\colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

- mag:
  $\ker \nu|_H = \{h \in H\colon h\nu = N\} = \{h \in H\colon hN = N\} = H \cap N \triangleleft H$
- értékkészlet:
  $H\nu|_H = \{h\nu\colon h \in H\}$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ *és* $N \triangleleft G$, *akkor* $N \triangleleft HN \leq G$ *és* $H \cap N \triangleleft H \leq G$, *továbbá*

$$HN/N \cong H/H \cap N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H\colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

- mag:
  $\ker \nu|_H = \{h \in H\colon h\nu = N\} = \{h \in H\colon hN = N\} = H \cap N \triangleleft H$
- értékkészlet:
  $H\nu|_H = \{h\nu\colon h \in H\} = \{hN\colon h \in H\}$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ *és* $N \lhd G$*, akkor* $N \lhd HN \leq G$ *és* $H \cap N \lhd H \leq G$*, továbbá*

$$HN/N \cong H/H \cap N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H\colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

- mag:
  $\ker \nu|_H = \{h \in H\colon h\nu = N\} = \{h \in H\colon hN = N\} = H \cap N \lhd H$
- értékkészlet:
  $H\nu|_H = \{h\nu\colon h \in H\} = \{hN\colon h \in H\} = HN/N \leq G/N$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ *és* $N \triangleleft G$*, akkor* $N \triangleleft HN \leq G$ *és* $H \cap N \triangleleft H \leq G$*, továbbá*

$$HN/N \cong H/H{\cap}N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N,\ g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H\colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

- mag:
  $\ker \nu|_H = \{h \in H\colon h\nu = N\} = \{h \in H\colon hN = N\} = H \cap N \triangleleft H$
- értékkészlet:
  $H\nu|_H = \{h\nu\colon h \in H\} = \{hN\colon h \in H\} = HN/N \leq G/N$
- izomorfizmus: $H/H{\cap}N \cong HN/N$ $\square$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ és $N \lhd G$, akkor $N \lhd HN \leq G$ és $H \cap N \lhd H \leq G$, továbbá

$$HN/N \cong H/H \cap N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H\colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

- mag:
  $\ker \nu|_H = \{h \in H\colon h\nu = N\} = \{h \in H\colon hN = N\} = H \cap N \lhd H$
- értékkészlet:
  $H\nu|_H = \{h\nu\colon h \in H\} = \{hN\colon h \in H\} = HN/N \leq G/N$
- izomorfizmus: $H/H \cap N \cong HN/N$ $\square$

Miért lesz HN részcsoport G-ben?

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ és $N \lhd G$, akkor $N \lhd HN \leq G$ és $H \cap N \lhd H \leq G$, továbbá

$$HN/N \cong H/H\cap N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H\colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

- mag:
  $\ker \nu|_H = \{h \in H\colon h\nu = N\} = \{h \in H\colon hN = N\} = H \cap N \lhd H$
- értékkészlet:
  $H\nu|_H = \{h\nu\colon h \in H\} = \{hN\colon h \in H\} = HN/N \leq G/N$
- izomorfizmus: $H/H\cap N \cong HN/N$ $\square$

Miért lesz HN részcsoport G-ben?
1. válasz: $HN = (H\nu)\,\nu^{-1}$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ *és* $N \triangleleft G$*, akkor* $N \triangleleft HN \leq G$ *és* $H \cap N \triangleleft H \leq G$*, továbbá*

$$HN/N \cong H/H\cap N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H\colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

- mag:
  $\ker \nu|_H = \{h \in H\colon h\nu = N\} = \{h \in H\colon hN = N\} = H \cap N \triangleleft H$
- értékkészlet:
  $H\nu|_H = \{h\nu\colon h \in H\} = \{hN\colon h \in H\} = HN/N \leq G/N$
- izomorfizmus: $H/H\cap N \cong HN/N$ $\square$

Miért lesz HN részcsoport G-ben?
1. válasz: $HN = (H\nu)\,\nu^{-1}$
2. válasz: $HN \cdot HN = HHNN = HN$ és $(HN)^{-1} = N^{-1}H^{-1} = NH = HN$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ *és* $N \lhd G$*, akkor* $N \lhd HN \leq G$ *és* $H \cap N \lhd H \leq G$*, továbbá*

$$HN/N \cong H/H \cap N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H\colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

- mag:
  $\ker \nu|_H = \{h \in H\colon h\nu = N\} = \{h \in H\colon hN = N\} = H \cap N \lhd H$
- értékkészlet:
  $H\nu|_H = \{h\nu\colon h \in H\} = \{hN\colon h \in H\} = HN/N \leq G/N$
- izomorfizmus: $H/H \cap N \cong HN/N$ $\square$

Miért lesz HN részcsoport G-ben?
1. válasz: $HN = (H\nu)\,\nu^{-1}$
2. válasz: $HN \cdot HN = HHNN = HN$ és $(HN)^{-1} = N^{-1}H^{-1} = NH = HN$

$HN = [H \cup N] = H \vee N$ a legszűkebb részcsoport, ami H-t és N-et is tartalmazza.

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = \mathbb{Z}_{24}$, $H = \left[\overline{4}\right]$, $N = \left[\overline{6}\right]$ szereposztással.

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = \mathbb{Z}_{24}$, $H = [\overline{4}]$, $N = [\overline{6}]$ szereposztással.

- $H \cap N = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\} \cap \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\}$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = \mathbb{Z}_{24}$, $H = \left[\overline{4}\right]$, $N = \left[\overline{6}\right]$ szereposztással.

- $H \cap N = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} \cap \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\} = \left[\overline{12}\right]$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = \mathbb{Z}_{24}$, $H = \left[\overline{4}\right]$, $N = \left[\overline{6}\right]$ szereposztással.

- $H \cap N = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} \cap \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\} = \left[\overline{12}\right]$

- $H/H \cap N = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} / \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\}$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = \mathbb{Z}_{24}$, $H = \left[\overline{4}\right]$, $N = \left[\overline{6}\right]$ szereposztással.

- $H \cap N = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} \cap \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\} = \left[\overline{12}\right]$
- $$\begin{aligned} H/H \cap N &= \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} / \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\} \\ &= \left\{\left\{\overline{0}, \overline{12}\right\}, \left\{\overline{4}, \overline{16}\right\}, \left\{\overline{8}, \overline{20}\right\}\right\} \end{aligned}$$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = \mathbb{Z}_{24}$, $H = \left[\overline{4}\right]$, $N = \left[\overline{6}\right]$ szereposztással.

- $H \cap N = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} \cap \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\} = \left[\overline{12}\right]$

- $$\begin{aligned} H/H{\cap}N &= \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} / \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\} \\ &= \left\{\left\{\overline{0}, \overline{12}\right\}, \left\{\overline{4}, \overline{16}\right\}, \left\{\overline{8}, \overline{20}\right\}\right\} \cong \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = \mathbb{Z}_{24}$, $H = \left[\overline{4}\right]$, $N = \left[\overline{6}\right]$ szereposztással.

- $H \cap N = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} \cap \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\} = \left[\overline{12}\right]$

- $$\begin{aligned} H/H{\cap}N &= \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} / \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\} \\ &= \left\{\left\{\overline{0}, \overline{12}\right\}, \left\{\overline{4}, \overline{16}\right\}, \left\{\overline{8}, \overline{20}\right\}\right\} \cong \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$

- $H + N = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} + \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\}$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = \mathbb{Z}_{24}$, $H = \left[\overline{4}\right]$, $N = \left[\overline{6}\right]$ szereposztással.

- $H \cap N = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} \cap \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\} = \left[\overline{12}\right]$
- $$\begin{aligned} H/H{\cap}N &= \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} / \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\} \\ &= \left\{\left\{\overline{0}, \overline{12}\right\}, \left\{\overline{4}, \overline{16}\right\}, \left\{\overline{8}, \overline{20}\right\}\right\} \cong \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} H + N &= \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} + \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\} \\ &= \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}\right\} = \left[\overline{2}\right] \end{aligned}$$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = \mathbb{Z}_{24}$, $H = \left[\overline{4}\right]$, $N = \left[\overline{6}\right]$ szereposztással.

- $H \cap N = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} \cap \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\} = \left[\overline{12}\right]$
- $H/H \cap N = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} / \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\}$
  $= \left\{\left\{\overline{0}, \overline{12}\right\}, \left\{\overline{4}, \overline{16}\right\}, \left\{\overline{8}, \overline{20}\right\}\right\} \cong \mathbb{Z}_3$
- $H + N = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} + \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\}$
  $= \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}\right\} = \left[\overline{2}\right]$
- $(H + N)/N = \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}\right\} / \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\}$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = \mathbb{Z}_{24}$, $H = [\overline{4}]$, $N = [\overline{6}]$ szereposztással.

- $H \cap N = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\} \cap \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\} = \{\overline{0}, \overline{12}\} = [\overline{12}]$
- $$\begin{aligned} H/H \cap N &= \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\} / \{\overline{0}, \overline{12}\} \\ &= \{\{\overline{0}, \overline{12}\}, \{\overline{4}, \overline{16}\}, \{\overline{8}, \overline{20}\}\} \cong \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} H + N &= \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\} + \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\} \\ &= \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}\} = [\overline{2}] \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} (H + N)/N &= \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}\} / \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\} \\ &= \{\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\}, \{\overline{2}, \overline{8}, \overline{14}, \overline{20}\}, \{\overline{4}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{22}\}\} \end{aligned}$$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = \mathbb{Z}_{24}$, $H = \left[\overline{4}\right]$, $N = \left[\overline{6}\right]$ szereposztással.

- $H \cap N = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} \cap \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\} = \left[\overline{12}\right]$
- $$\begin{aligned} H/H{\cap}N &= \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} / \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\} \\ &= \left\{\left\{\overline{0}, \overline{12}\right\}, \left\{\overline{4}, \overline{16}\right\}, \left\{\overline{8}, \overline{20}\right\}\right\} \cong \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} H + N &= \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} + \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\} \\ &= \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}\right\} = \left[\overline{2}\right] \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} (H + N)/N &= \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}\right\} / \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\} \\ &= \left\{\left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\}, \left\{\overline{2}, \overline{8}, \overline{14}, \overline{20}\right\}, \left\{\overline{4}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{22}\right\}\right\} \cong \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = \mathbb{Z}_{24}$, $H = \left[\overline{4}\right]$, $N = \left[\overline{6}\right]$ szereposztással.

- $H \cap N = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} \cap \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\} = \left[\overline{12}\right]$
- $$H/H \cap N = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} / \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\}$$ $$= \left\{\left\{\overline{0}, \overline{12}\right\}, \left\{\overline{4}, \overline{16}\right\}, \left\{\overline{8}, \overline{20}\right\}\right\} \cong \mathbb{Z}_3$$
- $$H + N = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\} + \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\}$$ $$= \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}\right\} = \left[\overline{2}\right]$$
- $$(H + N)/N = \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}\right\} / \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\}$$ $$= \left\{\left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\}, \left\{\overline{2}, \overline{8}, \overline{14}, \overline{20}\right\}, \left\{\overline{4}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{22}\right\}\right\} \cong \mathbb{Z}_3$$
- izomorfia:
$$\varphi\colon \left[\overline{2}\right] / \left[\overline{6}\right] \to \left[\overline{4}\right] / \left[\overline{12}\right], \quad \begin{aligned} \left\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\right\} &\mapsto \left\{\overline{0}, \overline{12}\right\} \\ \left\{\overline{2}, \overline{8}, \overline{14}, \overline{20}\right\} &\mapsto \left\{\overline{8}, \overline{20}\right\} \\ \left\{\overline{4}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{22}\right\} &\mapsto \left\{\overline{4}, \overline{16}\right\} \end{aligned}$$

$$G = \begin{array}{|cccccc|}
\hline
\overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\
\overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\
\overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\
\overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \\
\hline
\end{array}$$

$$N = \begin{array}{|c|ccccc}
\cline{1-1}
\overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\
\overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\
\overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\
\overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

$$G/N = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\
\overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\
\overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\
\overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \\
\hline
\end{array}$$

$$
H = \begin{array}{|ccc|ccc}
\multicolumn{1}{c}{\overline{18}} & \overline{22} & \multicolumn{1}{c}{\overline{2}} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\
\multicolumn{1}{c}{\overline{6}} & \overline{10} & \multicolumn{1}{c}{\overline{14}} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\
\cline{1-3}
\overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\
\overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \\
\cline{1-3}
\end{array}
$$

$$
H + N = \begin{array}{|ccc|ccc}
\cline{1-3}
\overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\
\overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\
\overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\
\overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \\
\cline{1-3}
\end{array}
$$

$$
(H + N)/N = \begin{array}{|c|c|c|ccc}
\cline{1-3}
\overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\
\overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\
\overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\
\overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \\
\cline{1-3}
\end{array}
$$

$$H = \begin{array}{cccccc}
\overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\
\overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\
\cline{1-3}
\multicolumn{1}{|c}{\overline{12}} & \overline{16} & \multicolumn{1}{c|}{\overline{20}} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\
\multicolumn{1}{|c}{\overline{0}} & \overline{4} & \multicolumn{1}{c|}{\overline{8}} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \\
\cline{1-3}
\end{array}$$

$$H \cap N = \begin{array}{cccccc}
\overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\
\overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\
\cline{1-1}
\multicolumn{1}{|c|}{\overline{12}} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\
\multicolumn{1}{|c|}{\overline{0}} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

$$H / H \cap N = \begin{array}{cccccc}
\overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\
\overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\
\cline{1-3}
\multicolumn{1}{|c|}{\overline{12}} & \multicolumn{1}{c|}{\overline{16}} & \multicolumn{1}{c|}{\overline{20}} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\
\multicolumn{1}{|c|}{\overline{0}} & \multicolumn{1}{c|}{\overline{4}} & \multicolumn{1}{c|}{\overline{8}} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \\
\cline{1-3}
\end{array}$$

Az első izomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmus:

$$
\begin{array}{cccc}
(H+N)/N = & \boxed{\begin{array}{c}\overline{18}\\ \overline{6}\\ \overline{12}\\ \overline{0}\end{array}} & \boxed{\begin{array}{c}\overline{22}\\ \overline{10}\\ \overline{16}\\ \overline{4}\end{array}} & \boxed{\begin{array}{c}\overline{2}\\ \overline{14}\\ \overline{20}\\ \overline{8}\end{array}} \\
\varphi\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
H/H\cap N = & \boxed{\begin{array}{c}\overline{12}\\ \overline{0}\end{array}} & \boxed{\begin{array}{c}\overline{16}\\ \overline{4}\end{array}} & \boxed{\begin{array}{c}\overline{20}\\ \overline{8}\end{array}}
\end{array}
$$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = S_4$, $H = S_3$, $N = V$ szereposztással.

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = S_4$, $H = S_3$, $N = V$ szereposztással.

- $H \cap N = S_3 \cap V$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = S_4$, $H = S_3$, $N = V$ szereposztással.

- $H \cap N = S_3 \cap V = \{\mathrm{id}\}$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = S_4$, $H = S_3$, $N = V$ szereposztással.

- $H \cap N = S_3 \cap V = \{\mathrm{id}\}$
- $H / H \cap N = S_3 / \{\mathrm{id}\}$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = S_4$, $H = S_3$, $N = V$ szereposztással.

- $H \cap N = S_3 \cap V = \{\mathrm{id}\}$
- $H/H \cap N = S_3/\{\mathrm{id}\}$
- $HN = S_3 V$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = S_4$, $H = S_3$, $N = V$ szereposztással.

- $H \cap N = S_3 \cap V = \{\mathrm{id}\}$
- $H/H \cap N = S_3/\{\mathrm{id}\}$
- $HN = S_3 V = S_4$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = S_4$, $H = S_3$, $N = V$ szereposztással.

- $H \cap N = S_3 \cap V = \{\mathrm{id}\}$
- $H/H \cap N = S_3/\{\mathrm{id}\}$
- $HN = S_3 V = S_4$
- $HN/N = S_4/V$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = S_4$, $H = S_3$, $N = V$ szereposztással.

- $H \cap N = S_3 \cap V = \{\text{id}\}$
- $H/H{\cap}N = S_3/\{\text{id}\}$
- $HN = S_3 V = S_4$
- $HN/N = S_4/V$
- izomorfia: $S_4/V \cong S_3/\{\text{id}\} \cong S_3$

Láttuk, hogy ha $H \leq G$, akkor $H\nu = HN/N \leq G/N$, és itt HN egy N-et tartalmazó részcsoportja G-nek.

Láttuk, hogy ha $H \leq G$, akkor $H\nu = HN/N \leq G/N$, és itt HN egy N-et tartalmazó részcsoportja G-nek.

Legyen most $N \leq K \leq G$.

Láttuk, hogy ha $H \leq G$, akkor $H\nu = HN/N \leq G/N$, és itt HN egy N-et tartalmazó részcsoportja G-nek.

Legyen most $N \leq K \leq G$. Ekkor $F := K\nu$

Láttuk, hogy ha $H \leq G$, akkor $H\nu = HN/N \leq G/N$, és itt HN egy N-et tartalmazó részcsoportja G-nek.

Legyen most $N \leq K \leq G$. Ekkor $F := K\nu = KN/N$

Láttuk, hogy ha $H \leq G$, akkor $H\nu = HN/N \leq G/N$, és itt HN egy N-et tartalmazó részcsoportja G-nek.

Legyen most $N \leq K \leq G$. Ekkor $F := K\nu = KN/N = K/N \leq G/N$.

Láttuk, hogy ha $H \leq G$, akkor $H\nu = HN/N \leq G/N$, és itt HN egy N-et tartalmazó részcsoportja G-nek.

Legyen most $N \leq K \leq G$. Ekkor $F := K\nu = KN/N = K/N \leq G/N$.

Fordítva, ha $F \leq G/N$, akkor $K := F\nu^{-1}$ olyan részcsoportja G-nek, ami tartalmazza N-et.

Láttuk, hogy ha $H \leq G$, akkor $H\nu = HN/N \leq G/N$, és itt HN egy N-et tartalmazó részcsoportja G-nek.

Legyen most $N \leq K \leq G$. Ekkor $F := K\nu = KN/N = K/N \leq G/N$.

Fordítva, ha $F \leq G/N$, akkor $K := F\nu^{-1}$ olyan részcsoportja G-nek, ami tartalmazza N-et.

Tétel (Megfeleltetési tétel)

Ha $N \lhd G$, akkor G/N részcsoportjai kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a G csoport N-et tartalmazó részcsoportjainak.

Láttuk, hogy ha $H \leq G$, akkor $H\nu = HN/N \leq G/N$, és itt HN egy N-et tartalmazó részcsoportja G-nek.

Legyen most $N \leq K \leq G$. Ekkor $F := K\nu = KN/N = K/N \leq G/N$.

Fordítva, ha $F \leq G/N$, akkor $K := F\nu^{-1}$ olyan részcsoportja G-nek, ami tartalmazza N-et.

Tétel (Megfeleltetési tétel)

Ha $N \lhd G$, akkor G/N részcsoportjai kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a G csoport N-et tartalmazó részcsoportjainak. A $K \leq G$ részcsoportnak (ahol $N \leq K$) az $F := K/N \leq G/N$ részcsoport felel meg.

Láttuk, hogy ha $H \leq G$, akkor $H\nu = HN/N \leq G/N$, és itt HN egy N-et tartalmazó részcsoportja G-nek.

Legyen most $N \leq K \leq G$. Ekkor $F := K\nu = KN/N = K/N \leq G/N$.

Fordítva, ha $F \leq G/N$, akkor $K := F\nu^{-1}$ olyan részcsoportja G-nek, ami tartalmazza N-et.

Tétel (Megfeleltetési tétel)

Ha $N \triangleleft G$, akkor G/N részcsoportjai kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a G csoport N-et tartalmazó részcsoportjainak. A $K \leq G$ részcsoportnak (ahol $N \leq K$) az $F := K/N \leq G/N$ részcsoport felel meg.

Tétel (II. izomorfiatétel)

Ha $K \leq G$ és $F \leq G/N$ a fentiek szerint egymásnak megfelelő részcsoportok, akkor $K \triangleleft G \iff F \triangleleft G/N$.

Láttuk, hogy ha $H \leq G$, akkor $H\nu = HN/N \leq G/N$, és itt HN egy N-et tartalmazó részcsoportja G-nek.

Legyen most $N \leq K \leq G$. Ekkor $F := K\nu = KN/N = K/N \leq G/N$.

Fordítva, ha $F \leq G/N$, akkor $K := F\nu^{-1}$ olyan részcsoportja G-nek, ami tartalmazza N-et.

Tétel (Megfeleltetési tétel)

Ha $N \triangleleft G$, akkor G/N részcsoportjai kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a G csoport N-et tartalmazó részcsoportjainak. A $K \leq G$ részcsoportnak (ahol $N \leq K$) az $F := K/N \leq G/N$ részcsoport felel meg.

Tétel (II. izomorfiatétel)

Ha $K \leq G$ és $F \leq G/N$ a fentiek szerint egymásnak megfelelő részcsoportok, akkor $K \triangleleft G \iff F \triangleleft G/N$. Ha ez teljesül, akkor $(G/N)/F \cong G/K$, azaz $(G/N)/(K/N) \cong G/K$.

1. Mellékosztályok, Lagrange tétele

2. Normálosztó, faktorcsoport

3. Homomorfiatétel, izomorfiatételek

4. Permutációcsoportok

5. Direkt szorzat

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] XII/5 és [F] II/12 fejezetekben található.

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.
A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon G \to S_G,\ g \mapsto \rho_g.$$

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.

A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon G \to S_G,\ g \mapsto \rho_g.$$

- Minden $g \in G$ esetén $\rho_g \in S_G$ (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.
A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon G \to S_G,\ g \mapsto \rho_g.$$

- Minden $g \in G$ esetén $\rho_g \in S_G$ (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ρ injektív:

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.
A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon G \to S_G,\ g \mapsto \rho_g.$$

- Minden $g \in G$ esetén $\rho_g \in S_G$ (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ρ injektív: $g \neq h \implies 1 \cdot g = 1\rho_g \neq 1\rho_h = 1 \cdot h$

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.

A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon G \to S_G,\ g \mapsto \rho_g.$$

- Minden $g \in G$ esetén $\rho_g \in S_G$ (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ρ injektív: $g \neq h \implies 1 \cdot g = 1\rho_g \neq 1\rho_h = 1 \cdot h \implies \rho_g \neq \rho_h$

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.

A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon G \to S_G,\, g \mapsto \rho_g.$$

- Minden $g \in G$ esetén $\rho_g \in S_G$ (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ρ injektív: $g \neq h \implies 1 \cdot g = 1\rho_g \neq 1\rho_h = 1 \cdot h \implies \rho_g \neq \rho_h$
- ρ homomorfizmus: $\rho_{gh} \stackrel{?}{=} \rho_g \circ \rho_h$

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.
A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon G \to S_G,\; g \mapsto \rho_g.$$

- Minden $g \in G$ esetén $\rho_g \in S_G$ (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ρ injektív: $g \neq h \implies 1 \cdot g = 1\rho_g \neq 1\rho_h = 1 \cdot h \implies \rho_g \neq \rho_h$
- ρ homomorfizmus: $\rho_{gh} \stackrel{?}{=} \rho_g \circ \rho_h$

$\forall x \in G : x\rho_{gh}$

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.
A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon G \to S_G,\ g \mapsto \rho_g.$$

- Minden $g \in G$ esetén $\rho_g \in S_G$ (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ρ injektív: $g \neq h \implies 1 \cdot g = 1\rho_g \neq 1\rho_h = 1 \cdot h \implies \rho_g \neq \rho_h$
- ρ homomorfizmus: $\rho_{gh} \stackrel{?}{=} \rho_g \circ \rho_h$

$\forall x \in G : x\rho_{gh} = x\,(gh)$

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.
A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon G \to S_G,\ g \mapsto \rho_g.$$

- Minden $g \in G$ esetén $\rho_g \in S_G$ (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ρ injektív: $g \neq h \implies 1 \cdot g = 1\rho_g \neq 1\rho_h = 1 \cdot h \implies \rho_g \neq \rho_h$
- ρ homomorfizmus: $\rho_{gh} \stackrel{?}{=} \rho_g \circ \rho_h$

$\forall x \in G : x\rho_{gh} = x\,(gh) = (xg)\,h$

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.
A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon\, G \to S_G,\ g \mapsto \rho_g.$$

- Minden $g \in G$ esetén $\rho_g \in S_G$ (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ρ injektív: $g \neq h \implies 1 \cdot g = 1\rho_g \neq 1\rho_h = 1 \cdot h \implies \rho_g \neq \rho_h$
- ρ homomorfizmus: $\rho_{gh} \stackrel{?}{=} \rho_g \circ \rho_h$

  $\forall x \in G : x\rho_{gh} = x\,(gh) = (xg)\,h = (xg)\,\rho_h$

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.
A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon\, G \to S_G,\; g \mapsto \rho_g.$$

- Minden $g \in G$ esetén $\rho_g \in S_G$ (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ρ injektív: $g \neq h \implies 1 \cdot g = 1\rho_g \neq 1\rho_h = 1 \cdot h \implies \rho_g \neq \rho_h$
- ρ homomorfizmus: $\rho_{gh} \stackrel{?}{=} \rho_g \circ \rho_h$
  $\forall x \in G : x\rho_{gh} = x\,(gh) = (xg)\,h = (xg)\,\rho_h = (x\rho_g)\,\rho_h$

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.
A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon G \to S_G,\ g \mapsto \rho_g.$$

- Minden $g \in G$ esetén $\rho_g \in S_G$ (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ρ injektív: $g \neq h \implies 1 \cdot g = 1\rho_g \neq 1\rho_h = 1 \cdot h \implies \rho_g \neq \rho_h$
- ρ homomorfizmus: $\rho_{gh} \stackrel{?}{=} \rho_g \circ \rho_h$
  $\forall x \in G : x\rho_{gh} = x\,(gh) = (xg)\,h = (xg)\,\rho_h = (x\rho_g)\,\rho_h = x\,(\rho_g \circ \rho_h)$

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.

A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon\, G \to S_G,\; g \mapsto \rho_g.$$

- Minden $g \in G$ esetén $\rho_g \in S_G$ (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ρ injektív: $g \neq h \implies 1 \cdot g = 1\rho_g \neq 1\rho_h = 1 \cdot h \implies \rho_g \neq \rho_h$
- ρ homomorfizmus: $\rho_{gh} \overset{?}{=} \rho_g \circ \rho_h$

  $\forall x \in G : x\rho_{gh} = x\,(gh) = (xg)\,h = (xg)\,\rho_h = (x\rho_g)\,\rho_h = x\,(\rho_g \circ \rho_h)$

Legyen $H = G\rho \leq S_G$; ekkor ρ izomorfizmus G és H között.

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.
A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon G \to S_G,\ g \mapsto \rho_g.$$

- Minden $g \in G$ esetén $\rho_g \in S_G$ (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ρ injektív: $g \neq h \implies 1 \cdot g = 1\rho_g \neq 1\rho_h = 1 \cdot h \implies \rho_g \neq \rho_h$
- ρ homomorfizmus: $\rho_{gh} \overset{?}{=} \rho_g \circ \rho_h$
  $\forall x \in G : x\rho_{gh} = x\,(gh) = (xg)\,h = (xg)\,\rho_h = (x\rho_g)\,\rho_h = x\,(\rho_g \circ \rho_h)$

Legyen $H = G\rho \leq S_G$; ekkor ρ izomorfizmus G és H között.

$\square$

Példa

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_6$ csoport Cayley-reprezentációját.

Példa

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_6$ csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_6$ esetén $\rho_a \colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $\overline{x} \mapsto \overline{x} + \overline{a}$.

Példa

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_6$ csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_6$ esetén $\rho_a \colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $\overline{x} \mapsto \overline{x} + \overline{a}$.

$$\rho_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

Példa

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_6$ csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_6$ esetén $\rho_a \colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $\overline{x} \mapsto \overline{x} + \overline{a}$.

$$\rho_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\rho_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} \end{pmatrix}$$

Példa

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_6$ csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_6$ esetén $\rho_a \colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $\overline{x} \mapsto \overline{x} + \overline{a}$.

$$\rho_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\rho_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{5})$$

Példa

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_6$ csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_6$ esetén $\rho_a \colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $\overline{x} \mapsto \overline{x} + \overline{a}$.

$$\rho_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\rho_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} \end{pmatrix} = \left(\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{5}\right)$$

$$\rho_{\overline{2}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

Példa

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_6$ csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_6$ esetén $\rho_a \colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $\overline{x} \mapsto \overline{x} + \overline{a}$.

$$\rho_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\rho_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{2}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{2}\,\overline{4})\,(\overline{1}\,\overline{3}\,\overline{5})$$

Példa

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_6$ csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_6$ esetén $\rho_a \colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $\overline{x} \mapsto \overline{x} + \overline{a}$.

$$\rho_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\rho_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{2}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{2}\,\overline{4})\,(\overline{1}\,\overline{3}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{3}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{pmatrix}$$

Példa

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_6$ csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_6$ esetén $\rho_a \colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $\overline{x} \mapsto \overline{x} + \overline{a}$.

$$\rho_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\rho_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{2}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{2}\,\overline{4})\,(\overline{1}\,\overline{3}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{3}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{3})\,(\overline{1}\,\overline{4})\,(\overline{2}\,\overline{5})$$

Példa

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_6$ csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_6$ esetén $\rho_a \colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $\overline{x} \mapsto \overline{x} + \overline{a}$.

$$\rho_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\rho_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{2}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{2}\,\overline{4})\,(\overline{1}\,\overline{3}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{3}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{3})\,(\overline{1}\,\overline{4})\,(\overline{2}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{4}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \end{pmatrix}$$

Példa

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_6$ csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_6$ esetén $\rho_a \colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $\overline{x} \mapsto \overline{x} + \overline{a}$.

$$\rho_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\rho_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{2}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{2}\,\overline{4})\,(\overline{1}\,\overline{3}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{3}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{3})\,(\overline{1}\,\overline{4})\,(\overline{2}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{4}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{4}\,\overline{2})\,(\overline{1}\,\overline{5}\,\overline{3})$$

Példa

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_6$ csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_6$ esetén $\rho_a \colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $\overline{x} \mapsto \overline{x} + \overline{a}$.

$$\rho_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\rho_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{2}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{2}\,\overline{4})\,(\overline{1}\,\overline{3}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{3}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{3})\,(\overline{1}\,\overline{4})\,(\overline{2}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{4}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{4}\,\overline{2})\,(\overline{1}\,\overline{5}\,\overline{3})$$

$$\rho_{\overline{5}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \end{pmatrix}$$

Példa

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_6$ csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_6$ esetén $\rho_a \colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $\overline{x} \mapsto \overline{x} + \overline{a}$.

$$\rho_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\rho_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{2}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{2}\,\overline{4})\,(\overline{1}\,\overline{3}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{3}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{3})\,(\overline{1}\,\overline{4})\,(\overline{2}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{4}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{4}\,\overline{2})\,(\overline{1}\,\overline{5}\,\overline{3})$$

$$\rho_{\overline{5}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{5}\,\overline{4}\,\overline{3}\,\overline{2}\,\overline{1})$$

Példa

Írjuk fel az S_3 csoport Cayley-reprezentációját.

Példa

Írjuk fel az S_3 csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\pi \in S_3$ esetén $\rho_\pi \colon S_3 \to S_3$, $x \mapsto x \cdot \pi$.

Példa

Írjuk fel az S_3 csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\pi \in S_3$ esetén $\rho_\pi \colon S_3 \to S_3$, $x \mapsto x \cdot \pi$.

$$\rho_{\mathrm{id}} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

Példa

Írjuk fel az S_3 csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\pi \in S_3$ esetén $\rho_\pi \colon S_3 \to S_3$, $x \mapsto x \cdot \pi$.

$$\rho_{\mathrm{id}} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\rho_{(12)} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ (12) & \mathrm{id} & (132) & (123) & (23) & (13) \end{pmatrix}$$

Példa

Írjuk fel az S_3 csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\pi \in S_3$ esetén $\rho_\pi \colon S_3 \to S_3$, $x \mapsto x \cdot \pi$.

$$\rho_{\mathrm{id}} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\begin{aligned} \rho_{(12)} &= \begin{pmatrix} \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ (12) & \mathrm{id} & (132) & (123) & (23) & (13) \end{pmatrix} \\ &= \big(\mathrm{id}\ (12)\big)\big((13)\ (132)\big)\big((23)\ (123)\big) \end{aligned}$$

Példa

Írjuk fel az S_3 csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\pi \in S_3$ esetén $\rho_\pi \colon S_3 \to S_3$, $x \mapsto x \cdot \pi$.

$$\rho_{\text{id}} = \begin{pmatrix} \text{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ \text{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \end{pmatrix} = \text{id}$$

$$\begin{aligned} \rho_{(12)} &= \begin{pmatrix} \text{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ (12) & \text{id} & (132) & (123) & (23) & (13) \end{pmatrix} \\ &= \big(\text{id}\ (12)\big)\big((13)\ (132)\big)\big((23)\ (123)\big) \end{aligned}$$

$$\rho_{(123)} = \begin{pmatrix} \text{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ (123) & (13) & (23) & (12) & (132) & \text{id} \end{pmatrix}$$

Példa

Írjuk fel az S_3 csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\pi \in S_3$ esetén $\rho_\pi \colon S_3 \to S_3$, $x \mapsto x \cdot \pi$.

$$\rho_{\mathrm{id}} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\begin{aligned} \rho_{(12)} &= \begin{pmatrix} \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ (12) & \mathrm{id} & (132) & (123) & (23) & (13) \end{pmatrix} \\ &= \big(\mathrm{id}\ (12)\big)\big((13)\ (132)\big)\big((23)\ (123)\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{(123)} &= \begin{pmatrix} \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ (123) & (13) & (23) & (12) & (132) & \mathrm{id} \end{pmatrix} \\ &= \big(\mathrm{id}\ (123)\ (132)\big)\big((12)\ (13)\ (23)\big) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

Tétel

Egy S_n-beli permutáció transzpozíciók szorzataként való felírásában a tényezők számának paritása egyértelműen meghatározott.

Tétel

Egy S_n-beli permutáció transzpozíciók szorzataként való felírásában a tényezők számának paritása egyértelműen meghatározott.

Biz.

[Sz] XII/5. fejezet.
Tegyük fel, hogy

$$\tau_1\tau_2\cdots\tau_{2k+1} = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2l},$$

ahol mindegyik τ_i és σ_j transzpozíció.

Tétel

Egy S_n-beli permutáció transzpozíciók szorzataként való felírásában a tényezők számának paritása egyértelműen meghatározott.

Biz.

[Sz] XII/5. fejezet.
Tegyük fel, hogy

$$\tau_1\tau_2\cdots\tau_{2k+1}=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2l},$$

ahol mindegyik τ_i és σ_j transzpozíció. Ekkor az identikus permutáció előáll páratlan sok transzpozíció szorzataként:

$$\mathrm{id}=\tau_1\tau_2\cdots\tau_{2k+1}\sigma_{2l}\cdots\sigma_2\sigma_1.$$

Tétel

Egy S_n-beli permutáció transzpozíciók szorzataként való felírásában a tényezők számának paritása egyértelműen meghatározott.

Biz.

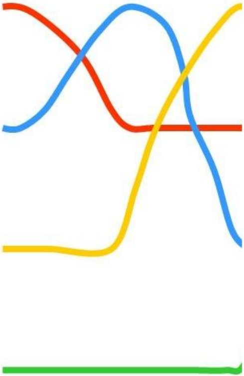
[Sz] XII/5. fejezet.
Tegyük fel, hogy

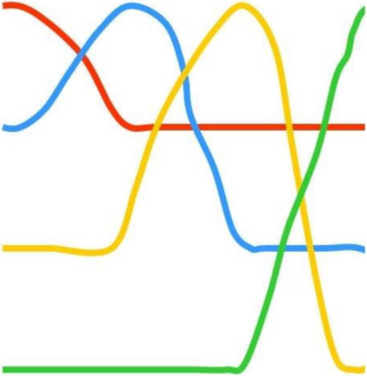
$$\tau_1\tau_2\cdots\tau_{2k+1} = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2l},$$

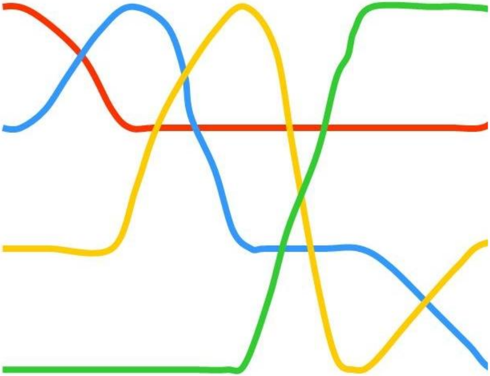
ahol mindegyik τ_i és σ_j transzpozíció. Ekkor az identikus permutáció előáll páratlan sok transzpozíció szorzataként:

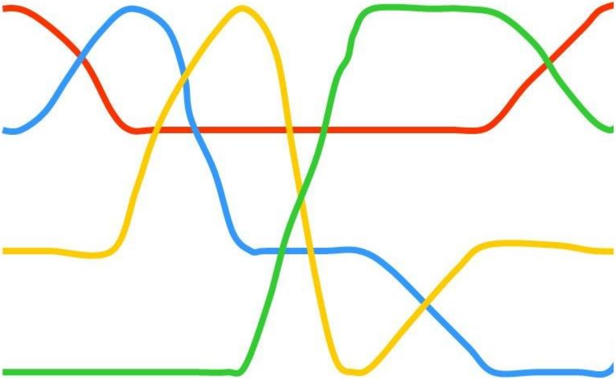
$$\mathrm{id} = \tau_1\tau_2\cdots\tau_{2k+1}\sigma_{2l}\cdots\sigma_2\sigma_1.$$

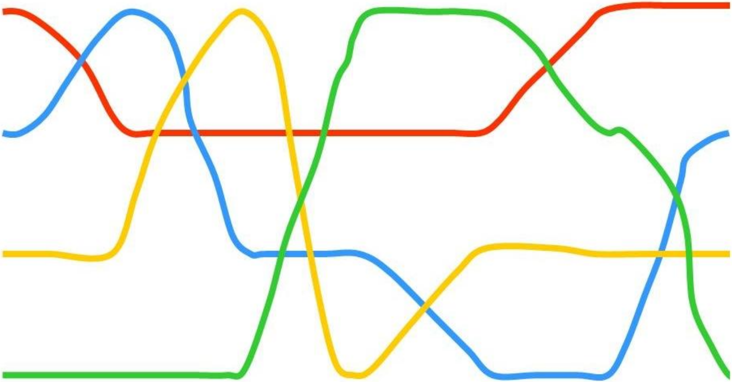
Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen.

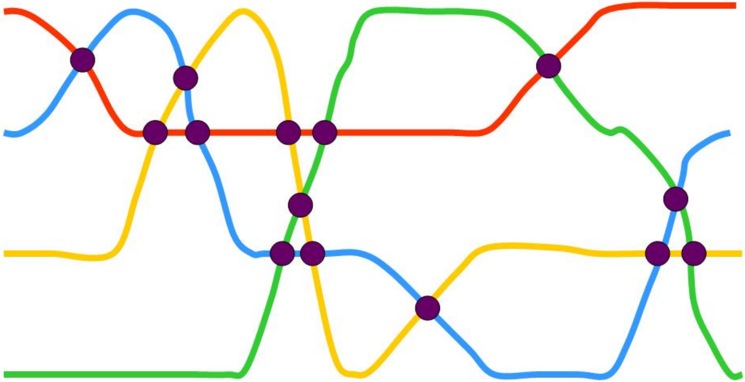


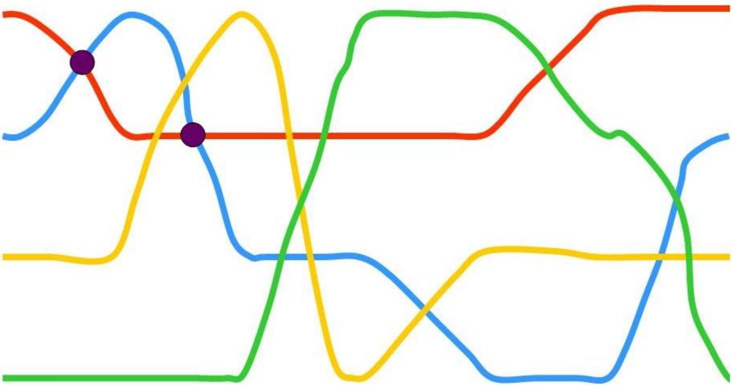




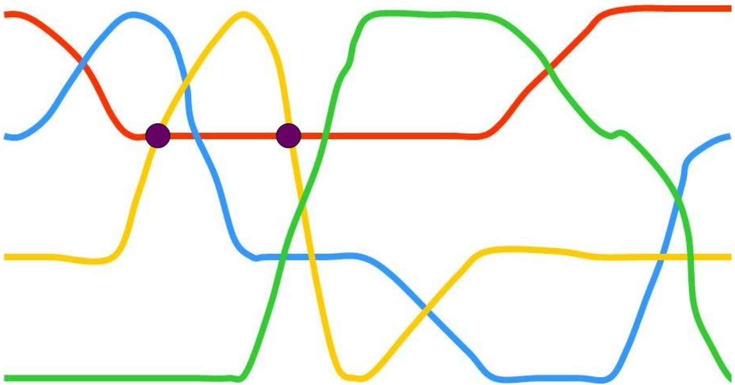




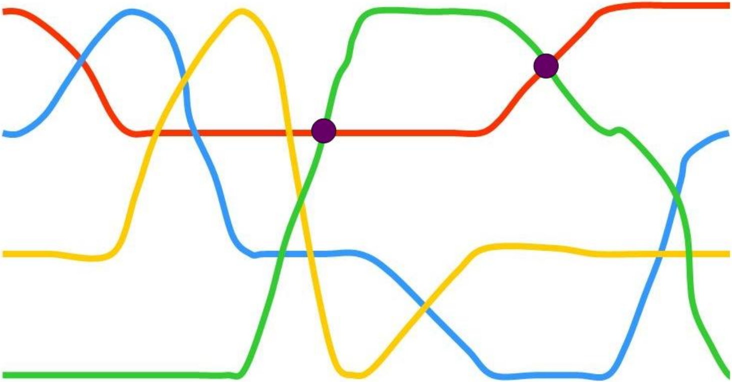




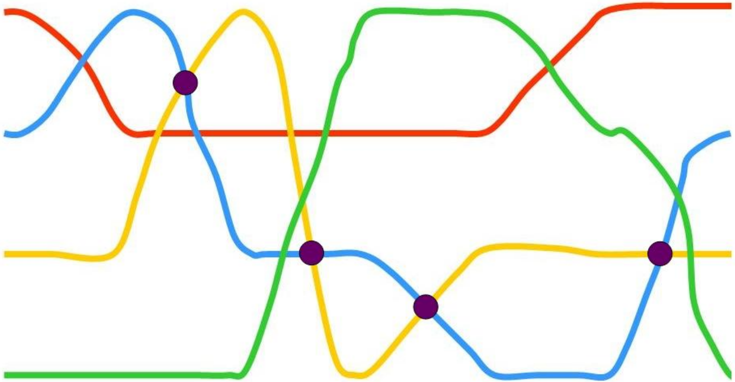
metszéspontok: 2



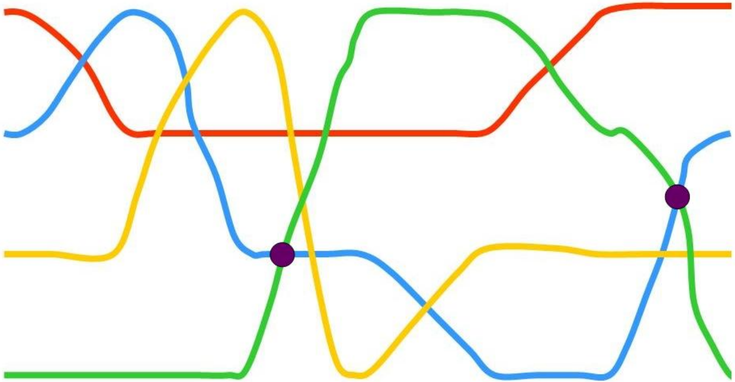
metszéspontok: $2 + 2$



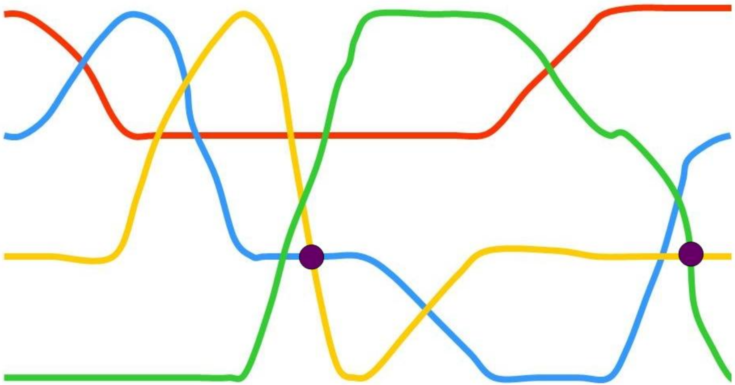
metszéspontok: $2 + 2 + 2$



metszéspontok: $2 + 2 + 2 + 4$

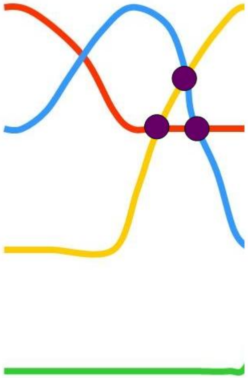


metszéspontok: $2 + 2 + 2 + 4 + 2$

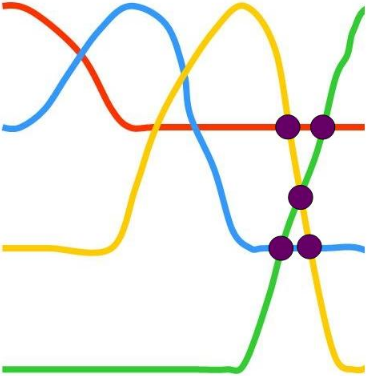


metszéspontok: $2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 \equiv 0 \pmod 2$

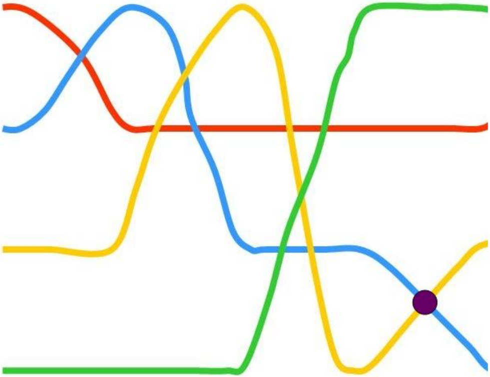
metszéspontok: 1



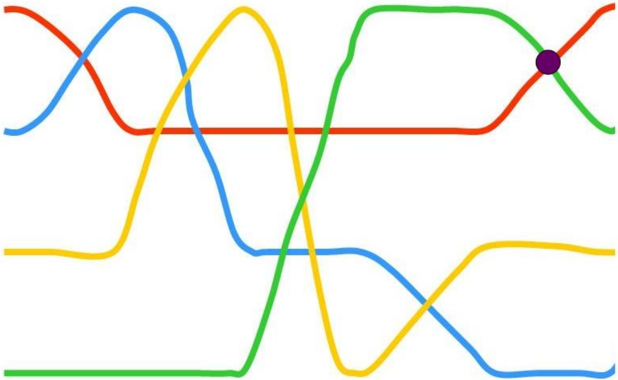
metszéspontok: $1 + 3$



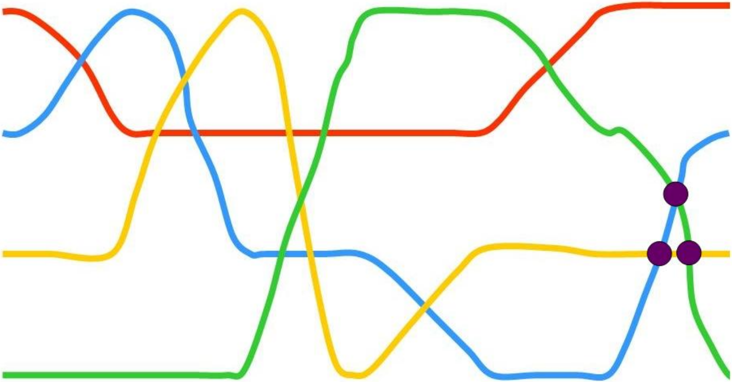
metszéspontok: $1 + 3 + 5$



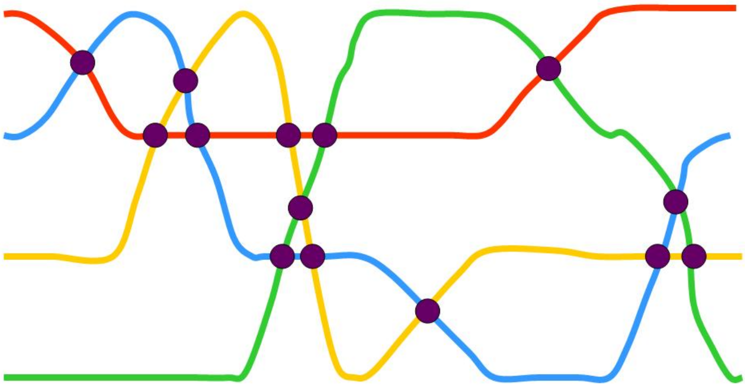
metszéspontok: $1 + 3 + 5 + 1$



metszéspontok: $1 + 3 + 5 + 1 + 1$



metszéspontok: $1 + 3 + 5 + 1 + 1 + 3 \equiv$ cserék száma $\pmod 2$



metszéspontok: $0 \equiv$ cserék száma $\pmod 2$

Állítás

Permutációk szorzatának a paritása a következőképpen alakul:

$$\begin{array}{llllllllll} \textit{páros} & \cdot & \textit{páros} & = & \textit{páros} & \qquad \textit{páros} & \cdot & \textit{páratlan} & = & \textit{páratlan} \\ \textit{páratlan} & \cdot & \textit{páratlan} & = & \textit{páros} & \qquad \textit{páratlan} & \cdot & \textit{páros} & = & \textit{páratlan} \end{array}$$

Állítás

Permutációk szorzatának a paritása a következőképpen alakul:

$$\begin{array}{lclcl} \textit{páros} & \cdot & \textit{páros} & = & \textit{páros} \\ \textit{páratlan} & \cdot & \textit{páratlan} & = & \textit{páros} \end{array} \qquad \begin{array}{lclcl} \textit{páros} & \cdot & \textit{páratlan} & = & \textit{páratlan} \\ \textit{páratlan} & \cdot & \textit{páros} & = & \textit{páratlan} \end{array}$$

Biz.

Szorzáskor a permutációt előállító transzpozíciók száma összeadódik.

Állítás

Permutációk szorzatának a paritása a következőképpen alakul:

$$\begin{array}{lllllllll} \textit{páros} & \cdot & \textit{páros} & = & \textit{páros} & \quad \textit{páros} & \cdot & \textit{páratlan} & = & \textit{páratlan} \\ \textit{páratlan} & \cdot & \textit{páratlan} & = & \textit{páros} & \quad \textit{páratlan} & \cdot & \textit{páros} & = & \textit{páratlan} \end{array}$$

Biz.

Szorzáskor a permutációt előállító transzpozíciók száma összeadódik.

$\square$

Következmény

A páros hosszúságú ciklusok páratlan permutációk, míg a páratlan hosszúságú ciklusok páros permutációk.

Állítás

Permutációk szorzatának a paritása a következőképpen alakul:

$$\begin{array}{llll} \textit{páros} & \cdot\ \textit{páros} & = & \textit{páros} \\ \textit{páratlan} & \cdot\ \textit{páratlan} & = & \textit{páros} \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \textit{páros} & \cdot\ \textit{páratlan} & = & \textit{páratlan} \\ \textit{páratlan} & \cdot\ \textit{páros} & = & \textit{páratlan} \end{array}$$

Biz.

Szorzáskor a permutációt előállító transzpozíciók száma összeadódik.

$\square$

Következmény

A páros hosszúságú ciklusok páratlan permutációk, míg a páratlan hosszúságú ciklusok páros permutációk.

Biz.

Láttuk korábban, hogy egy k hosszúságú ciklus felírható $k-1$ transzpozíció szorzataként. $\square$

Példa

Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

Példa

Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$:

Példa

Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$: páros

Példa

Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$: páros
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$:

Példa

Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$: páros
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$: páratlan

Példa

Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$: páros
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$: páratlan
- $(123)\,(4567)$:

Példa

Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$: páros
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$: páratlan
- $(123)\,(4567)$: páratlan

Példa

Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$: páros
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$: páratlan
- $(123)\,(4567)$: páratlan
- $(12)\,(3456)\,(78)$:

Példa

Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$: páros
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$: páratlan
- $(123)\,(4567)$: páratlan
- $(12)\,(3456)\,(78)$: páratlan

Példa

Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$: páros
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$: páratlan
- $(123)\,(4567)$: páratlan
- $(12)\,(3456)\,(78)$: páratlan
- $(12)\,(345)\,(6789)$:

Példa

Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$: páros
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$: páratlan
- $(123)\,(4567)$: páratlan
- $(12)\,(3456)\,(78)$: páratlan
- $(12)\,(345)\,(6789)$: páros

Következmény

A páros permutációk részcsoportot (sőt, normálosztót) alkotnak S_n-ben.

Következmény

A páros permutációk részcsoportot (sőt, normálosztót) alkotnak S_n-ben. Ezt a csoportot n-edfokú **alternáló csoportnak** *nevezzük, és A_n-nel jelöljük.*

Következmény

A páros permutációk részcsoportot (sőt, normálosztót) alkotnak S_n-ben. Ezt a csoportot n-edfokú **alternáló csoportnak** *nevezzük, és A_n-nel jelöljük.*

Biz.

Értelmezzük egy π permutáció előjelét a következőképpen:

$$\operatorname{sgn}\pi := \begin{cases} 1, & \text{ha } \pi \text{ páros;} \\ -1, & \text{ha } \pi \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Következmény

A páros permutációk részcsoportot (sőt, normálosztót) alkotnak S_n-ben. Ezt a csoportot n-edfokú **alternáló csoportnak** *nevezzük, és A_n-nel jelöljük.*

Biz.

Értelmezzük egy π permutáció előjelét a következőképpen:

$$\operatorname{sgn} \pi := \begin{cases} 1, & \text{ha } \pi \text{ páros;} \\ -1, & \text{ha } \pi \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ homomorfizmus, és magja éppen A_n.

Következmény

A páros permutációk részcsoportot (sőt, normálosztót) alkotnak S_n-ben. Ezt a csoportot n-edfokú **alternáló csoportnak** *nevezzük, és A_n-nel jelöljük.*

Biz.

Értelmezzük egy π permutáció előjelét a következőképpen:

$$\operatorname{sgn}\pi := \begin{cases} 1, & \text{ha } \pi \text{ páros;} \\ -1, & \text{ha } \pi \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ homomorfizmus, és magja éppen A_n.

$\square$

Következmény

$[S_n : A_n] = 2$ *és így* $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

Következmény

A páros permutációk részcsoportot (sőt, normálosztót) alkotnak S_n-ben. Ezt a csoportot n-edfokú **alternáló csoportnak** *nevezzük, és A_n-nel jelöljük.*

Biz.

Értelmezzük egy π permutáció előjelét a következőképpen:

$$\operatorname{sgn} \pi := \begin{cases} 1, & \text{ha } \pi \text{ páros;} \\ -1, & \text{ha } \pi \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $\operatorname{sgn} \colon S_n \to \{\pm 1\}$ homomorfizmus, és magja éppen A_n.

□

Következmény

$[S_n : A_n] = 2$ *és így* $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

Tétel

Az alternáló csoportot generálják a 3 hosszúságú ciklusok.

Következmény

A páros permutációk részcsoportot (sőt, normálosztót) alkotnak S_n-ben. Ezt a csoportot n-edfokú **alternáló csoportnak** *nevezzük, és A_n-nel jelöljük.*

Biz.

Értelmezzük egy π permutáció előjelét a következőképpen:

$$\operatorname{sgn}\pi := \begin{cases} 1, & \text{ha } \pi \text{ páros;} \\ -1, & \text{ha } \pi \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ homomorfizmus, és magja éppen A_n.

$\square$

Következmény

$[S_n : A_n] = 2$ *és így* $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

Tétel

Az alternáló csoportot generálják a 3 hosszúságú ciklusok.

Biz.

$(ab)\,(ac) = (abc)\,, \qquad (ab)\,(cd) = (ab)\,(ac)\cdot(ac)\,(cd) = (abc)\,(acd)$ $\square$

Tétel

Ha $n \geq 5$, *akkor* A_n *egyszerű csoport.*

Tétel

Ha $n \geq 5$*, akkor* A_n *egyszerű csoport.*

Megjegyzés

Ha $n = 4$, akkor A_n nem egyszerű, mert $V \triangleleft A_4$.

Tétel

Ha $n \geq 5$, akkor A_n egyszerű csoport.

Megjegyzés

Ha $n = 4$, akkor A_n nem egyszerű, mert $V \triangleleft A_4$. Az A_3,A_2 csoportok persze egyszerűek, mert prímrendűek.

Tétel

Ha $n \geq 5$, akkor A_n egyszerű csoport.

Megjegyzés

Ha $n = 4$, akkor A_n nem egyszerű, mert $V \triangleleft A_4$. Az A_3,A_2 csoportok persze egyszerűek, mert prímrendűek.

Következmény

Ha $n \neq 4$, akkor S_n egyetlen nemtriviális normálosztója A_n.

Tétel

Ha $n \geq 5$, akkor A_n egyszerű csoport.

Megjegyzés

Ha $n = 4$, akkor A_n nem egyszerű, mert $V \triangleleft A_4$. Az A_3,A_2 csoportok persze egyszerűek, mert prímrendűek.

Következmény

Ha $n \neq 4$, akkor S_n egyetlen nemtriviális normálosztója A_n.

Biz.

Legyen N nemtriviális normálosztója S_n-nek ($n \neq 4$).

Tétel

Ha $n \geq 5$, akkor A_n egyszerű csoport.

Megjegyzés

Ha $n = 4$, akkor A_n nem egyszerű, mert $V \triangleleft A_4$. Az A_3,A_2 csoportok persze egyszerűek, mert prímrendűek.

Következmény

Ha $n \neq 4$, akkor S_n egyetlen nemtriviális normálosztója A_n.

Biz.

Legyen N nemtriviális normálosztója S_n-nek ($n \neq 4$).
Ekkor $N \cap A_n \triangleleft A_n$, így A_n egyszerűsége miatt két eset lehetséges:

Tétel

Ha $n \geq 5$, akkor A_n egyszerű csoport.

Megjegyzés

Ha $n = 4$, akkor A_n nem egyszerű, mert $V \lhd A_4$. Az A_3,A_2 csoportok persze egyszerűek, mert prímrendűek.

Következmény

Ha $n \neq 4$, akkor S_n egyetlen nemtriviális normálosztója A_n.

Biz.

Legyen N nemtriviális normálosztója S_n-nek ($n \neq 4$).
Ekkor $N \cap A_n \lhd A_n$, így A_n egyszerűsége miatt két eset lehetséges:

- $N \cap A_n = A_n$ esetén $A_n \leq N$,

Tétel

Ha $n \geq 5$, akkor A_n egyszerű csoport.

Megjegyzés

Ha $n = 4$, akkor A_n nem egyszerű, mert $V \triangleleft A_4$. Az A_3,A_2 csoportok persze egyszerűek, mert prímrendűek.

Következmény

Ha $n \neq 4$, akkor S_n egyetlen nemtriviális normálosztója A_n.

Biz.

Legyen N nemtriviális normálosztója S_n-nek ($n \neq 4$).
Ekkor $N \cap A_n \triangleleft A_n$, így A_n egyszerűsége miatt két eset lehetséges:

- $N \cap A_n = A_n$ esetén $A_n \leq N$, ezért $N = A_n$.

Tétel

Ha $n \geq 5$, akkor A_n egyszerű csoport.

Megjegyzés

Ha $n = 4$, akkor A_n nem egyszerű, mert $V \triangleleft A_4$. Az A_3,A_2 csoportok persze egyszerűek, mert prímrendűek.

Következmény

Ha $n \neq 4$, akkor S_n egyetlen nemtriviális normálosztója A_n.

Biz.

Legyen N nemtriviális normálosztója S_n-nek ($n \neq 4$).
Ekkor $N \cap A_n \triangleleft A_n$, így A_n egyszerűsége miatt két eset lehetséges:

- $N \cap A_n = A_n$ esetén $A_n \leq N$, ezért $N = A_n$.
- $N \cap A_n = \{\mathrm{id}\}$ esetén $|N| = 2$,

Tétel

Ha $n \geq 5$, akkor A_n egyszerű csoport.

Megjegyzés

Ha $n = 4$, akkor A_n nem egyszerű, mert $V \triangleleft A_4$. Az A_3,A_2 csoportok persze egyszerűek, mert prímrendűek.

Következmény

Ha $n \neq 4$, akkor S_n egyetlen nemtriviális normálosztója A_n.

Biz.

Legyen N nemtriviális normálosztója S_n-nek ($n \neq 4$).
Ekkor $N \cap A_n \triangleleft A_n$, így A_n egyszerűsége miatt két eset lehetséges:

- $N \cap A_n = A_n$ esetén $A_n \leq N$, ezért $N = A_n$.
- $N \cap A_n = \{\mathrm{id}\}$ esetén $|N| = 2$, mert

$$N \cong N/\{\mathrm{id}\}$$

Tétel

Ha $n \geq 5$, akkor A_n egyszerű csoport.

Megjegyzés

Ha $n = 4$, akkor A_n nem egyszerű, mert $V \triangleleft A_4$. Az A_3,A_2 csoportok persze egyszerűek, mert prímrendűek.

Következmény

Ha $n \neq 4$, akkor S_n egyetlen nemtriviális normálosztója A_n.

Biz.

Legyen N nemtriviális normálosztója S_n-nek ($n \neq 4$).
Ekkor $N \cap A_n \triangleleft A_n$, így A_n egyszerűsége miatt két eset lehetséges:

- $N \cap A_n = A_n$ esetén $A_n \leq N$, ezért $N = A_n$.
- $N \cap A_n = \{\mathrm{id}\}$ esetén $|N| = 2$, mert

$$N \cong N/\{\mathrm{id}\} \cong N/N \cap A_n$$

Tétel

Ha $n \geq 5$, akkor A_n egyszerű csoport.

Megjegyzés

Ha $n = 4$, akkor A_n nem egyszerű, mert $V \lhd A_4$. Az A_3,A_2 csoportok persze egyszerűek, mert prímrendűek.

Következmény

Ha $n \neq 4$, akkor S_n egyetlen nemtriviális normálosztója A_n.

Biz.

Legyen N nemtriviális normálosztója S_n-nek ($n \neq 4$).
Ekkor $N \cap A_n \lhd A_n$, így A_n egyszerűsége miatt két eset lehetséges:

- $N \cap A_n = A_n$ esetén $A_n \leq N$, ezért $N = A_n$.
- $N \cap A_n = \{\mathrm{id}\}$ esetén $|N| = 2$, mert

$$N \cong N/\{\mathrm{id}\} \cong N/N \cap A_n \cong NA_n/A_n$$

Tétel

Ha $n \geq 5$, akkor A_n egyszerű csoport.

Megjegyzés

Ha $n = 4$, akkor A_n nem egyszerű, mert $V \triangleleft A_4$. Az A_3,A_2 csoportok persze egyszerűek, mert prímrendűek.

Következmény

Ha $n \neq 4$, akkor S_n egyetlen nemtriviális normálosztója A_n.

Biz.

Legyen N nemtriviális normálosztója S_n-nek ($n \neq 4$).
Ekkor $N \cap A_n \triangleleft A_n$, így A_n egyszerűsége miatt két eset lehetséges:

- $N \cap A_n = A_n$ esetén $A_n \leq N$, ezért $N = A_n$.
- $N \cap A_n = \{\mathrm{id}\}$ esetén $|N| = 2$, mert

$$N \cong N/\{\mathrm{id}\} \cong N/N\cap A_n \cong NA_n/A_n = S_n/A_n.$$

Tétel

Ha $n \geq 5$, akkor A_n egyszerű csoport.

Megjegyzés

Ha $n = 4$, akkor A_n nem egyszerű, mert $V \triangleleft A_4$. Az A_3,A_2 csoportok persze egyszerűek, mert prímrendűek.

Következmény

Ha $n \neq 4$, akkor S_n egyetlen nemtriviális normálosztója A_n.

Biz.

Legyen N nemtriviális normálosztója S_n-nek ($n \neq 4$).
Ekkor $N \cap A_n \triangleleft A_n$, így A_n egyszerűsége miatt két eset lehetséges:

- $N \cap A_n = A_n$ esetén $A_n \leq N$, ezért $N = A_n$.
- $N \cap A_n = \{\mathrm{id}\}$ esetén $|N| = 2$, mert

$$N \cong N/\{\mathrm{id}\} \cong N/N \cap A_n \cong NA_n/A_n = S_n/A_n.$$

  Ez viszont lehetetlen, hiszen ekkor $N \setminus \{\mathrm{id}\}$ egyelemű konjugáltosztály lenne S_n-ben. $\square$

1. Mellékosztályok, Lagrange tétele

2. Normálosztó, faktorcsoport

3. Homomorfiatétel, izomorfiatételek

4. Permutációcsoportok

5. Direkt szorzat

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] X/4 és [F] II/13,14 fejezetekben található.

Definíció

Az A és B csoportok **külső direkt szorzatán** azt a csoportot értjük, melynek tartóhalmaza $A \times B$, művelete pedig a következőképpen van definiálva:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) \, .$$

Definíció

Az A és B csoportok **külső direkt szorzatán** azt a csoportot értjük, melynek tartóhalmaza $A \times B$, művelete pedig a következőképpen van definiálva:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) \, .$$

Állítás

Csoportok külső direkt szorzata csoport.

Definíció

Az A és B csoportok **külső direkt szorzatán** azt a csoportot értjük, melynek tartóhalmaza $A \times B$, művelete pedig a következőképpen van definiálva:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) \,.$$

Állítás

Csoportok külső direkt szorzata csoport.

Biz.

Az asszociativitás világos, az egységelem $(1_A, 1_B)$, az $(a, b) \in A \times B$ elem inverze pedig $\left(a^{-1}, b^{-1}\right)$.

Definíció

Az A és B csoportok **külső direkt szorzatán** azt a csoportot értjük, melynek tartóhalmaza $A \times B$, művelete pedig a következőképpen van definiálva:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)\,.$$

Állítás

Csoportok külső direkt szorzata csoport.

Biz.

Az asszociativitás világos, az egységelem $(1_A, 1_B)$, az $(a, b) \in A \times B$ elem inverze pedig $\left(a^{-1}, b^{-1}\right)$.

$\square$

Példa

- Síkbeli vektorok az összeadás műveletével:

Definíció

Az A és B csoportok **külső direkt szorzatán** azt a csoportot értjük, melynek tartóhalmaza $A \times B$, művelete pedig a következőképpen van definiálva:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) .$$

Állítás

Csoportok külső direkt szorzata csoport.

Biz.

Az asszociativitás világos, az egységelem $(1_A, 1_B)$, az $(a, b) \in A \times B$ elem inverze pedig $\left(a^{-1}, b^{-1}\right)$.

$\square$

Példa

- Síkbeli vektorok az összeadás műveletével: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definíció

Az A és B csoportok **külső direkt szorzatán** azt a csoportot értjük, melynek tartóhalmaza $A \times B$, művelete pedig a következőképpen van definiálva:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) \,.$$

Állítás

Csoportok külső direkt szorzata csoport.

Biz.

Az asszociativitás világos, az egységelem $(1_A, 1_B)$, az $(a, b) \in A \times B$ elem inverze pedig $\left(a^{-1}, b^{-1}\right)$.

$\square$

Példa

- Síkbeli vektorok az összeadás műveletével: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})\,; \Delta) \cong$

Definíció

Az A és B csoportok **külső direkt szorzatán** azt a csoportot értjük, melynek tartóhalmaza $A \times B$, művelete pedig a következőképpen van definiálva:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)\,.$$

Állítás

Csoportok külső direkt szorzata csoport.

Biz.

Az asszociativitás világos, az egységelem $(1_A, 1_B)$, az $(a, b) \in A \times B$ elem inverze pedig $\left(a^{-1}, b^{-1}\right)$.

$\square$

Példa

- Síkbeli vektorok az összeadás műveletével: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})\,; \Delta) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Állítás

Az $A \times B$ külső direkt szorzatban az $A_1 := \{(a, 1_B) : a \in A\}$ és $B_1 := \{(1_A, b) : b \in B\}$ részcsoportokra teljesülnek a következők:

(1) $A_1, B_1 \lhd A \times B$;

(2) $A_1 \vee B_1 = A_1 B_1 = A \times B$;

(3) $A_1 \wedge B_1 = A_1 \cap B_1 = \{(1_A, 1_B)\}$.

Biz.

[F] II/13. fejezet.

Állítás

Az $A \times B$ *külső direkt szorzatban az* $A_1 := \{(a, 1_B) : a \in A\}$ *és* $B_1 := \{(1_A, b) : b \in B\}$ *részcsoportokra teljesülnek a következők:*

(1) $A_1, B_1 \lhd A \times B$;

(2) $A_1 \vee B_1 = A_1 B_1 = A \times B$;

(3) $A_1 \wedge B_1 = A_1 \cap B_1 = \{(1_A, 1_B)\}$.

Biz.

[F] II/13. fejezet.

$\square$

Definíció

Azt mondjuk, hogy a G csoport az A és B részcsoportjainak **belső direkt szorzata**, ha

(1) $A, B \lhd G$;

(2) $A \vee B = AB = G$;

(3) $A \wedge B = A \cap B = \{1_G\}$.

Tétel

A G csoport az A és B részcsoportjainak belső direkt szorzata akkor és csak akkor, ha

(a) *G minden eleme előáll ab $(a \in A, b \in B)$ alakban;*

(b) *a fenti előállítás egyértelmű;*

(c) $\forall a \in A \, \forall b \in B : \; ab = ba.$

Biz.

[F] II/13. fejezet.

Tétel

A G csoport az A és B részcsoportjainak belső direkt szorzata akkor és csak akkor, ha

(a) *G minden eleme előáll ab* $(a \in A, b \in B)$ *alakban;*

(b) *a fenti előállítás egyértelmű;*

(c) $\forall a \in A\, \forall b \in B: \; ab = ba.$

Biz.

[F] II/13. fejezet.

$\square$

Tétel

A külső és a belső direkt szorzat „lényegében" ugyanaz:

$$G \cong A \times_k B \iff \exists A_1, B_1 \leq G: \; A_1 \cong A, \; B_1 \cong B \text{ és } G = A_1 \times_b B_1.$$

Biz.

[F] II/13. fejezet. $\square$

Definíció

Azt mondjuk, hogy a G csoport az $A_1, \ldots, A_n$ részcsoportjainak **belső direkt szorzata**, ha

(1) $A_1, \ldots, A_n \lhd G$;

(2) $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n = G$;

(3) $A_i \cap (A_1 \cdot \ldots \cdot A_{i-1} \cdot A_{i+1} \cdot \ldots \cdot A_n) = \{1_G\}$ minden i-re.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a G csoport az $A_1, \dots, A_n$ részcsoportjainak **belső direkt szorzata**, ha

(1) $A_1, \dots, A_n \triangleleft G$;

(2) $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n = G$;

(3) $A_i \cap (A_1 \cdot \ldots \cdot A_{i-1} \cdot A_{i+1} \cdot \ldots \cdot A_n) = \{1_G\}$ minden i-re.

Tétel

A G csoport az $A_1, \dots, A_n$ részcsoportjainak belső direkt szorzata akkor és csak akkor, ha

(a) *G minden eleme előáll $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ $(a_i \in A_i)$ alakban;*

(b) *a fenti előállítás egyértelmű;*

(c) $\forall a_i \in A_i \, \forall a_j \in A_j : \; a_i a_j = a_j a_i$ *minden $i \neq j$ esetén.*

Tétel

Ha n és m relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$.

Tétel

Ha n és m relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.

[Sz] X/4.5. Tétel. (gyűrűkre, kínai maradéktétel segítségével)

Tétel

Ha n és m relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.

[Sz] X/4.5. Tétel. (gyűrűkre, kínai maradéktétel segítségével)

Egy másik bizonyítás: megfigyeltük, hogy $\mathbb{Z}_\ell$ részcsoporthálója (azaz normálosztóhálója) éppen a D_k hálónak (k osztói oszthatóság szerint rendezve) a „fejreállítottja" (hivatalosan: duálisa).

Tétel

Ha n és m relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.

[Sz] X/4.5. Tétel. (gyűrűkre, kínai maradéktétel segítségével)

Egy másik bizonyítás: megfigyeltük, hogy $\mathbb{Z}_\ell$ részcsoporthálója (azaz normálosztóhálója) éppen a D_k hálónak (k osztói oszthatóság szerint rendezve) a „fejreállítottja" (hivatalosan: duálisa). Minden részcsoport előáll $[\overline{a}]$ alakban (ahol $a \mid \ell$),

Tétel

Ha n és m relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.

[Sz] X/4.5. Tétel. (gyűrűkre, kínai maradéktétel segítségével)

Egy másik bizonyítás: megfigyeltük, hogy $\mathbb{Z}_\ell$ részcsoporthálója (azaz normálosztóhálója) éppen a D_k hálónak (k osztói oszthatóság szerint rendezve) a „fejreállítottja" (hivatalosan: duálisa). Minden részcsoport előáll $[\overline{a}]$ alakban (ahol $a \mid \ell$),és

$$[\overline{a}] \wedge [\overline{b}] = \left[\overline{\text{lkkt}\,(a,b)}\right], \qquad [\overline{a}] \vee [\overline{b}] = \left[\overline{\text{lnko}\,(a,b)}\right].$$

Tétel

Ha n és m relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.

[Sz] X/4.5. Tétel. (gyűrűkre, kínai maradéktétel segítségével)

Egy másik bizonyítás: megfigyeltük, hogy $\mathbb{Z}_\ell$ részcsoporthálója (azaz normálosztóhálója) éppen a D_k hálónak (k osztói oszthatóság szerint rendezve) a „fejreállítottja" (hivatalosan: duálisa). Minden részcsoport előáll $[\overline{a}]$ alakban (ahol $a \mid \ell$),és

$$[\overline{a}] \wedge [\overline{b}] = \left[\overline{\operatorname{lkkt}(a,b)}\right], \qquad [\overline{a}] \vee [\overline{b}] = \left[\overline{\operatorname{lnko}(a,b)}\right].$$

Tegyük fel, hogy $\operatorname{lnko}(m,n) = 1$, és legyen $\ell = nm$, $a = n$, $b = m$.

Tétel

Ha n és m relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.

[Sz] X/4.5. Tétel. (gyűrűkre, kínai maradéktétel segítségével)

Egy másik bizonyítás: megfigyeltük, hogy $\mathbb{Z}_\ell$ részcsoporthálója (azaz normálosztóhálója) éppen a D_k hálónak (k osztói oszthatóság szerint rendezve) a „fejreállítottja" (hivatalosan: duálisa). Minden részcsoport előáll $[\overline{a}]$ alakban (ahol $a \mid \ell$),és

$$[\overline{a}] \wedge [\overline{b}] = \left[\overline{\mathrm{lkkt}\,(a,b)}\right], \qquad [\overline{a}] \vee [\overline{b}] = \left[\overline{\mathrm{lnko}\,(a,b)}\right].$$

Tegyük fel, hogy $\mathrm{lnko}\,(m,n) = 1$, és legyen $\ell = nm$, $a = n$, $b = m$. Ekkor

$$[\overline{a}] \wedge [\overline{b}] = \left[\overline{\mathrm{lkkt}\,(n,m)}\right] = [\overline{nm}] = [\overline{0}], \quad [\overline{a}] \vee [\overline{b}] = \left[\overline{\mathrm{lnko}\,(n,m)}\right] = [\overline{1}] = \mathbb{Z}_{nm}.$$

Tétel

Ha n és m relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.

[Sz] X/4.5. Tétel. (gyűrűkre, kínai maradéktétel segítségével)

Egy másik bizonyítás: megfigyeltük, hogy $\mathbb{Z}_\ell$ részcsoporthálója (azaz normálosztóhálója) éppen a D_k hálónak (k osztói oszthatóság szerint rendezve) a „fejreállítottja" (hivatalosan: duálisa). Minden részcsoport előáll $[\overline{a}]$ alakban (ahol $a \mid \ell$),és

$$[\overline{a}] \wedge [\overline{b}] = \left[\overline{\mathrm{lkkt}\,(a,b)}\right], \qquad [\overline{a}] \vee [\overline{b}] = \left[\overline{\mathrm{lnko}\,(a,b)}\right].$$

Tegyük fel, hogy $\mathrm{lnko}\,(m,n) = 1$, és legyen $\ell = nm$, $a = n$, $b = m$. Ekkor

$$[\overline{a}]\wedge[\overline{b}] = \left[\overline{\mathrm{lkkt}\,(n,m)}\right] = [\overline{nm}] = [\overline{0}], \quad [\overline{a}]\vee[\overline{b}] = \left[\overline{\mathrm{lnko}\,(n,m)}\right] = [\overline{1}] = \mathbb{Z}_{nm}.$$

Tehát $\mathbb{Z}_{nm}$ az $[\overline{n}]$ és $[\overline{m}]$ részcsoportok belső direkt szorzata,

Tétel

Ha n és m relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.

[Sz] X/4.5. Tétel. (gyűrűkre, kínai maradéktétel segítségével)

Egy másik bizonyítás: megfigyeltük, hogy $\mathbb{Z}_\ell$ részcsoporthálója (azaz normálosztóhálója) éppen a D_k hálónak (k osztói oszthatóság szerint rendezve) a „fejreállítottja" (hivatalosan: duálisa). Minden részcsoport előáll $[\overline{a}]$ alakban (ahol $a \mid \ell$),és

$$[\overline{a}] \wedge [\overline{b}] = \left[\overline{\operatorname{lkkt}(a,b)}\right], \qquad [\overline{a}] \vee [\overline{b}] = \left[\overline{\operatorname{lnko}(a,b)}\right].$$

Tegyük fel, hogy $\operatorname{lnko}(m,n) = 1$, és legyen $\ell = nm$, $a = n$, $b = m$. Ekkor

$$[\overline{a}] \wedge [\overline{b}] = \left[\overline{\operatorname{lkkt}(n,m)}\right] = [\overline{nm}] = [\overline{0}], \quad [\overline{a}] \vee [\overline{b}] = \left[\overline{\operatorname{lnko}(n,m)}\right] = [\overline{1}] = \mathbb{Z}_{nm}.$$

Tehát $\mathbb{Z}_{nm}$ az $[\overline{n}]$ és $[\overline{m}]$ részcsoportok belső direkt szorzata,
és $[\overline{n}] \cong \mathbb{Z}_m$, $[\overline{m}] \cong \mathbb{Z}_n$. $\square$

Következmény

Ha n prímhatványtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}.$$

Következmény

Ha n prímhatványtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}.$$

Biz.

$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \cdots \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$

Következmény

Ha n prímhatványtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}.$$

Biz.

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \cdots \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

□

Állítás

Ha n és m nem relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \ncong \mathbb{Z}_{nm}$.

Következmény

Ha n prímhatványtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}.$$

Biz.

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \cdots \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

$\square$

Állítás

Ha n és m nem relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \ncong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.

Legyen $d = \mathrm{lnko}\,(n, m) > 1$;

Következmény

Ha n prímhatványtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}.$$

Biz.

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \cdots \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

$\square$

Állítás

Ha n és m nem relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \not\cong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.

Legyen $d = \text{lnko}\,(n, m) > 1$; ekkor $\text{lkkt}\,(n, m) = \frac{nm}{d} < nm$.

Következmény

Ha n prímhatványtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, *akkor*

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}.$$

Biz.

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \cdots \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

□

Állítás

Ha n és m nem relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \not\cong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.

Legyen $d = \operatorname{lnko}(n, m) > 1$; ekkor $\operatorname{lkkt}(n, m) = \frac{nm}{d} < nm$.
Tetszőleges $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ elemre

$$\frac{nm}{d}\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\frac{m}{d} \cdot n\overline{a}, \frac{n}{d} \cdot m\overline{b}\right) = \left(\overline{0}, \overline{0}\right),$$

Következmény

Ha n prímhatványtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}.$$

Biz.

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \cdots \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

$\square$

Állítás

Ha n és m nem relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \ncong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.

Legyen $d = \mathrm{lnko}\,(n, m) > 1$; ekkor $\mathrm{lkkt}\,(n, m) = \frac{nm}{d} < nm$.
Tetszőleges $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ elemre

$$\frac{nm}{d}\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\frac{m}{d} \cdot n\overline{a}, \frac{n}{d} \cdot m\overline{b}\right) = \left(\overline{0}, \overline{0}\right),$$

ezért $\left(\overline{a}, \overline{b}\right)$ rendje legfeljebb $\mathrm{lkkt}\,(n, m)$.

Következmény

Ha n prímhatványtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}.$$

Biz.

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \cdots \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

□

Állítás

Ha n és m nem relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \ncong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.

Legyen $d = \text{lnko}\,(n, m) > 1$; ekkor $\text{lkkt}\,(n, m) = \frac{nm}{d} < nm$.
Tetszőleges $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ elemre

$$\frac{nm}{d}\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\frac{m}{d} \cdot n\overline{a}, \frac{n}{d} \cdot m\overline{b}\right) = \left(\overline{0}, \overline{0}\right),$$

ezért $\left(\overline{a}, \overline{b}\right)$ rendje legfeljebb $\text{lkkt}\,(n, m)$.
Tehát $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ nem tartalmaz nm-ed rendű elemet, így nem is ciklikus.

□

Tétel (Véges Abel-csoportok alaptétele)

Minden véges Abel-csoport felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára. Ez a felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű.

Tétel (Véges Abel-csoportok alaptétele)

Minden véges Abel-csoport felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára. Ez a felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű.

Példa

Határozzuk meg az összes n-elemű Abel-csoportot (izomorfia erejéig).

- $n = 4$:

Tétel (Véges Abel-csoportok alaptétele)

Minden véges Abel-csoport felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára. Ez a felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű.

Példa

Határozzuk meg az összes n-elemű Abel-csoportot (izomorfia erejéig).

- $n = 4$: $\quad \mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Tétel (Véges Abel-csoportok alaptétele)

Minden véges Abel-csoport felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára. Ez a felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű.

Példa

Határozzuk meg az összes n-elemű Abel-csoportot (izomorfia erejéig).

- $n = 4$: $\quad \mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 8$:

Tétel (Véges Abel-csoportok alaptétele)

Minden véges Abel-csoport felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára. Ez a felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű.

Példa

Határozzuk meg az összes n-elemű Abel-csoportot (izomorfia erejéig).

- $n = 4$: $\mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 8$: $\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Tétel (Véges Abel-csoportok alaptétele)

Minden véges Abel-csoport felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára. Ez a felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű.

Példa

Határozzuk meg az összes n-elemű Abel-csoportot (izomorfia erejéig).

- $n = 4$: $\mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 8$: $\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 10$:

Tétel (Véges Abel-csoportok alaptétele)

Minden véges Abel-csoport felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára. Ez a felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű.

Példa

Határozzuk meg az összes n-elemű Abel-csoportot (izomorfia erejéig).

- $n = 4$: $\mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 8$: $\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 10$: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ (izomorf $\mathbb{Z}_{10}$-zel)

Tétel (Véges Abel-csoportok alaptétele)

Minden véges Abel-csoport felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára. Ez a felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű.

Példa

Határozzuk meg az összes n-elemű Abel-csoportot (izomorfia erejéig).

- $n = 4$: $\mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 8$: $\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 10$: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ (izomorf $\mathbb{Z}_{10}$-zel)
- $n = 16$:

Tétel (Véges Abel-csoportok alaptétele)

Minden véges Abel-csoport felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára. Ez a felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű.

Példa

Határozzuk meg az összes n-elemű Abel-csoportot (izomorfia erejéig).

- $n = 4$: $\mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 8$: $\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 10$: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ (izomorf $\mathbb{Z}_{10}$-zel)
- $n = 16$: $\mathbb{Z}_{16},\ \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Tétel (Véges Abel-csoportok alaptétele)

Minden véges Abel-csoport felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára. Ez a felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű.

Példa

Határozzuk meg az összes n-elemű Abel-csoportot (izomorfia erejéig).

- $n = 4$: $\mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 8$: $\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 10$: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ (izomorf $\mathbb{Z}_{10}$-zel)
- $n = 16$: $\mathbb{Z}_{16},\ \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 100$:

Tétel (Véges Abel-csoportok alaptétele)

Minden véges Abel-csoport felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára. Ez a felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű.

Példa

Határozzuk meg az összes n-elemű Abel-csoportot (izomorfia erejéig).

- $n = 4$: $\mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 8$: $\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 10$: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ (izomorf $\mathbb{Z}_{10}$-zel)
- $n = 16$: $\mathbb{Z}_{16},\ \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 100$: $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25},\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25},\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2$?

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2$?

Az alaptétel szerinti „kanonikus” felbontások:

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \quad \text{és} \quad \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2.$$

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2$?

Az alaptétel szerinti „kanonikus" felbontások:

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \quad \text{és} \quad \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2.$$

Ezek csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát izomorfak.

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2$?

Az alaptétel szerinti „kanonikus” felbontások:

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \quad \text{és} \quad \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2.$$

Ezek csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát izomorfak.

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$?

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2$?

Az alaptétel szerinti „kanonikus" felbontások:

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \quad \text{és} \quad \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2.$$

Ezek csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát izomorfak.

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$?

Az alaptétel szerinti „kanonikus" felbontások:

$$\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \text{ és } \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4.$$

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2$?

Az alaptétel szerinti „kanonikus” felbontások:

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \quad \text{és} \quad \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2.$$

Ezek csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát izomorfak.

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$?

Az alaptétel szerinti „kanonikus” felbontások:

$$\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \text{ és } \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4.$$

Ezek nem csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát nem izomorfak (az alaptétel unicitási része szerint).

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2$?

Az alaptétel szerinti „kanonikus” felbontások:

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \quad \text{és} \quad \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2.$$

Ezek csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát izomorfak.

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$?

Az alaptétel szerinti „kanonikus” felbontások:

$$\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \text{ és } \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4.$$

Ezek nem csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát nem izomorfak (az alaptétel unicitási része szerint).

Másik megoldás: nem izomorfak, mert $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$-ben van negyedrendű elem, például

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2$?

Az alaptétel szerinti „kanonikus" felbontások:

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \quad \text{és} \quad \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2.$$

Ezek csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát izomorfak.

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$?

Az alaptétel szerinti „kanonikus" felbontások:

$$\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \text{ és } \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4.$$

Ezek nem csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát nem izomorfak (az alaptétel unicitási része szerint).

Másik megoldás: nem izomorfak, mert $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$-ben van negyedrendű elem, például $\left(\overline{0}, \overline{3}\right)$, míg $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6$-ban nincs negyedrendű elem (miért?).

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{21}^* \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$?

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{21}^* \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$?

Nem, mert $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$, de $\mathbb{Z}_{21}^*$ nem ciklikus.

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{21}^* \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$?

Nem, mert $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$, de $\mathbb{Z}_{21}^*$ nem ciklikus.

(Másik megoldás: meghatároztuk $\mathbb{Z}_{21}^*$ összes részcsoportját, és nem volt közöttük 4-elemű.)

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{21}^* \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$?

Nem, mert $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$, de $\mathbb{Z}_{21}^*$ nem ciklikus.

(Másik megoldás: meghatároztuk $\mathbb{Z}_{21}^*$ összes részcsoportját, és nem volt közöttük 4-elemű.)

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{25}^* \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$?

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{21}^* \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$?

Nem, mert $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$, de $\mathbb{Z}_{21}^*$ nem ciklikus.

(Másik megoldás: meghatároztuk $\mathbb{Z}_{21}^*$ összes részcsoportját, és nem volt közöttük 4-elemű.)

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{25}^* \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$?

Igen, mert $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{20}$, és $\mathbb{Z}_{25}^*$ valóban 20-elemű ciklikus csoport.

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{21}^* \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$?

Nem, mert $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$, de $\mathbb{Z}_{21}^*$ nem ciklikus.

(Másik megoldás: meghatároztuk $\mathbb{Z}_{21}^*$ összes részcsoportját, és nem volt közöttük 4-elemű.)

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{25}^* \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$?

Igen, mert $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{20}$, és $\mathbb{Z}_{25}^*$ valóban 20-elemű ciklikus csoport.

Példa

Igaz-e, hogy $D_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$?

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{21}^* \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$?

Nem, mert $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$, de $\mathbb{Z}_{21}^*$ nem ciklikus.

(Másik megoldás: meghatároztuk $\mathbb{Z}_{21}^*$ összes részcsoportját, és nem volt közöttük 4-elemű.)

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{25}^* \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$?

Igen, mert $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{20}$, és $\mathbb{Z}_{25}^*$ valóban 20-elemű ciklikus csoport.

Példa

Igaz-e, hogy $D_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$?

Nem, mert $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ kommutatív, de D_4 nem az.

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{21}^* \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$?

Nem, mert $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$, de $\mathbb{Z}_{21}^*$ nem ciklikus.

(Másik megoldás: meghatároztuk $\mathbb{Z}_{21}^*$ összes részcsoportját, és nem volt közöttük 4-elemű.)

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{25}^* \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$?

Igen, mert $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{20}$, és $\mathbb{Z}_{25}^*$ valóban 20-elemű ciklikus csoport.

Példa

Igaz-e, hogy $D_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$?

Nem, mert $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ kommutatív, de D_4 nem az.

Példa

Igaz-e, hogy $V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?

Példa
Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{21}^* \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$?

Nem, mert $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$, de $\mathbb{Z}_{21}^*$ nem ciklikus.

(Másik megoldás: meghatároztuk $\mathbb{Z}_{21}^*$ összes részcsoportját, és nem volt közöttük 4-elemű.)

Példa
Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{25}^* \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$?

Igen, mert $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{20}$, és $\mathbb{Z}_{25}^*$ valóban 20-elemű ciklikus csoport.

Példa
Igaz-e, hogy $D_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$?

Nem, mert $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ kommutatív, de D_4 nem az.

Példa
Igaz-e, hogy $V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?

Igen, $V = A \times_{\mathrm{b}} B$, ahol $A = \{\mathrm{id}, (12)\,(34)\}$ és $B = \{\mathrm{id}, (13)\,(24)\}$

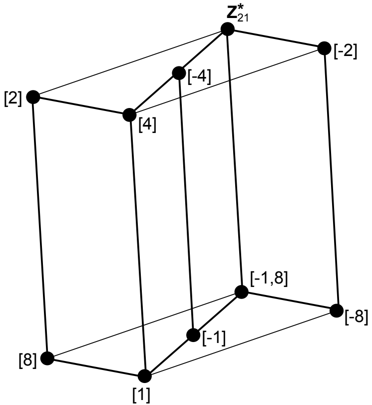
Példa

Direkt felbontható-e a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport?

Példa

Direkt felbontható-e a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport?

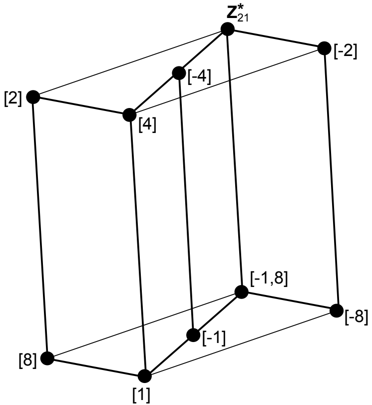
A válasz leolvasható a normálosztóhálóról:



Példa

Direkt felbontható-e a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport?

A válasz leolvasható a normálosztóhálóról:



Legyen $A = [\overline{2}]$ és $B = [\overline{-8}]$. Ekkor $A \wedge B = [\overline{1}] = \{\overline{1}\}$ és $A \vee B = \mathbb{Z}_{21}^*$, tehát $\mathbb{Z}_{21}^* = A \times_{\mathrm{b}} B \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$.

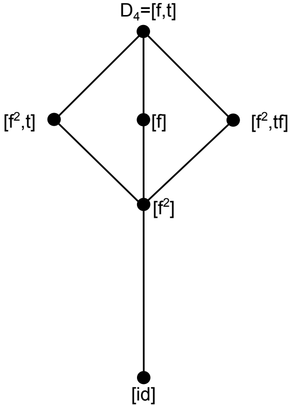
Példa

Direkt felbontható-e a D_4 csoport?

Példa

Direkt felbontható-e a D_4 csoport?

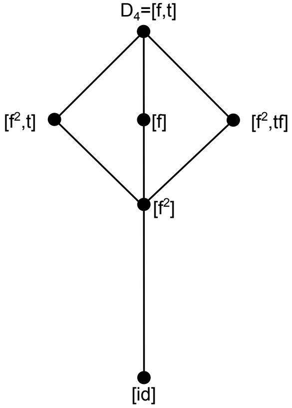
A válasz leolvasható a normálosztóhálóról:



Példa

Direkt felbontható-e a D_4 csoport?

A válasz leolvasható a normálosztóhálóról:



Nincs két nemtriviális normálosztó, melyek metszete $\{\mathrm{id}\}$ lenne, ezért D_4 direkt felbonthatatlan.

Példa

Direkt felbontható-e a $\mathbb{C}^*$ csoport?

Példa

Direkt felbontható-e a $\mathbb{C}^*$ csoport?

Igen $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^+ \times_{\mathsf{b}} T$,

Példa

Direkt felbontható-e a $\mathbb{C}^*$ csoport?

Igen $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^+ \times_{\mathrm{b}} T$, hiszen minden nemnulla z komplex szám felírható egy pozitív valós szám és egy egységnyi abszolút értékű komplex szám szorzataként:

$$z = |z| \left(\cos \arg z + i \sin \arg z \right),$$

és ez a felírás egyértelmű.