Csoportok II

2013 április 26-27.

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] XII/3 és [F] II/2,3,7 fejezetekben található.

Definíció

A G csoport nemüres részhalmazait **komplexusoknak** nevezzük. Komplexusok szorzata és inverze:

$$KL = \{ab \colon a \in K, b \in L\}, \qquad K^{-1} = \left\{a^{-1} \colon a \in K\right\}.$$

Jelölés

$$aK := \{a\} K, \qquad Ka := K \{a\}$$

Állítás

A komplexusok szorzása asszociatív művelet.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás. □

Tétel

Egy $H \subseteq G$ komplexus akkor és csak akkor részcsoport, ha

$$1 \in H, \quad HH \subseteq H, \quad H^{-1} \subseteq H.$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.4. Tétel. □

Megjegyzés

Tetszőleges H részcsoportra $HH \subseteq H = \{1\} H \subseteq HH$, tehát $HH = H$, és hasonlóan $H^{-1} = H$ is teljesül.

Tétel

Legyen $H \leq G$, és definiáljunk a G halmazon egy $\sim$ relációt:

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció, és egy $a \in G$ elem ekvivalenciaosztálya

$$aH = \{ah \colon h \in H\}.$$

Biz.

- reflexivitás: $\forall a \in G: \ a^{-1}a \in H$
- szimmetria: $\forall a, b \in G: \ a^{-1}b \in H \implies b^{-1}a \in H$
- tranzitivitás: $\forall a, b, c \in G: \ a^{-1}b \in H$ és $b^{-1}c \in H \implies a^{-1}c \in H$

Egy $b \in G$ elem akkor és csak akkor van benne az $a \in G$ elem $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályában, ha

$$\begin{aligned} a \sim b &\iff a^{-1}b \in H \\ &\iff \exists h \in H : a^{-1}b = h \\ &\iff \exists h \in H : b = ah. \quad \square \end{aligned}$$

Definíció

Az aH halmazt az a elem H szerinti **baloldali mellékosztályának** nevezzük.

Tétel

Egy $H \leq G$ részcsoport szerinti baloldali mellékosztályok a G csoport egy osztályozását alkotják.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.7. Tétel.

Nincs mit bizonyítani, bármely ekvivalenciareláció esetén az ekvivalenciaosztályok osztályozást alkotnak. □

Megjegyzés

Hasonló módon definiálhatóak a Ha **jobboldali mellékosztályok**, amelyek szintén osztályozást alkotnak.

Megjegyzés

Abel-csoportok esetén a baloldali és jobboldali mellékosztályok megegyeznek ($aH = Ha$). Nemkommutatív esetben is előfordulhat, hogy megegyeznek a baloldali és jobboldali mellékosztályok, de nem mindig van így.

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_6, \; H = [\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}\}$:

$$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}, \; \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}, \; \overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$
$$\overline{3} + H = \{\overline{3}, \overline{0}\}, \; \overline{4} + H = \{\overline{4}, \overline{1}\}, \; \overline{5} + H = \{\overline{5}, \overline{2}\}$$

$$\overline{0} + H = \overline{3} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$$
$$\overline{1} + H = \overline{4} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$$
$$\overline{2} + H = \overline{5} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$$

A mellékosztályozás: $\{\{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{1}, \overline{4}\}, \{\overline{2}, \overline{5}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_6, \; H = [\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$:

$$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \overline{2} + H = \overline{4} + H$$
$$\overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} = \overline{3} + H = \overline{5} + H$$

A mellékosztályozás: $\{\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}\}$.

Példa

Határozzuk meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

- $G = \mathbb{Z}_{12}^*, \; H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}\}$:

$$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}\} = \overline{5} \cdot H$$
$$\overline{7} \cdot H = \{\overline{7}, \overline{11}\} = \overline{11} \cdot H$$

A mellékosztályozás: $\{\{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\}\}$.

- $G = \mathbb{Z}_{13}^*, \; H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}$:

$$\overline{1} \cdot H = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \overline{5} \cdot H = \overline{8} \cdot H = \overline{12} \cdot H$$
$$\overline{2} \cdot H = \{\overline{2}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{11}\} = \overline{10} \cdot H = \overline{3} \cdot H = \overline{11} \cdot H$$
$$\overline{4} \cdot H = \{\overline{4}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{9}\} = \overline{7} \cdot H = \overline{6} \cdot H = \overline{9} \cdot H$$

A mellékosztályozás: $\{\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}, \{\overline{2}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{11}\}, \{\overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{9}\}\}$.

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

$$\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H,$$
$$(13) \cdot H = \{(13), (123)\} = (123) \cdot H$$
$$(12) \cdot H = \{(12), (132)\} = (132) \cdot H.$$

A baloldali mellékosztályozás:
$\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (123)\}, \{(12), (132)\}\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

$$H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, (23)\} = H \cdot (23),$$
$$H \cdot (13) = \{(13), (132)\} = H \cdot (132)$$
$$H \cdot (12) = \{(12), (123)\} = H \cdot (123),$$

A jobboldali mellékosztályozás:
$\{\{\mathrm{id}, (23)\}, \{(13), (132)\}, \{(12), (123)\}\}$.

Példa

Határozzuk meg a $V \leq S_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat, ahol V a **Klein-csoport**:

$$V = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

A baloldali és jobboldali mellékosztályok ebben az esetben egybeesnek:

$\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,

$\{(12), (34), (1324), (1423)\}$,

$\{(13), (24), (1234), (1432)\}$,

$\{(14), (23), (1243), (1342)\}$,

$\{(123), (134), (142), (243)\}$,

$\{(132), (143), (124), (234)\}$.

HF utánaszámolni.

Példa

Határozzuk meg a $H = [t] = \{\mathrm{id}, t\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, t\} = t \cdot H$,
  $f \cdot H = \{f, tf^3\} = tf^3 \cdot H$
  $f^2 \cdot H = \{f^2, tf^2\} = tf^2 \cdot H$
  $f^3 \cdot H = \{f^3, tf\} = tf \cdot H$.

  A baloldali mellékosztályozás:
  $\{\{\mathrm{id}, t\}, \{f, tf^3\}, \{f^2, tf^2\}, \{f^3, tf\}\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, t\} = H \cdot t$,
  $H \cdot f = \{f, tf\} = H \cdot tf$
  $H \cdot f^2 = \{f^2, tf^2\} = H \cdot tf^2$
  $H \cdot f^3 = \{f^3, tf^3\} = H \cdot tf^3$.

  A jobboldali mellékosztályozás:
  $\{\{\mathrm{id}, t\}, \{f, tf\}, \{f^2, tf^2\}, \{f^3, tf^3\}\}$.

Példa

Határozzuk meg a $H = [f] = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \leq D_4$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $\mathrm{id} \cdot H = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} = f \cdot H = f^2 \cdot H = f^3 \cdot H$,
  $t \cdot H = \{t, tf, tf^2, tf^3\} = tf \cdot H = tf^2 \cdot H = tf^3 \cdot H$.

  A baloldali mellékosztályozás: $\{\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\}, \{t, tf, tf^2, tf^3\}\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $H \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} = H \cdot f = H \cdot f^2 = H \cdot f^3$,
  $H \cdot t = \{t, tf^3, tf^2, tf\} = H \cdot tf = H \cdot tf^2 = H \cdot tf^3$.

  A jobboldali mellékosztályozás: $\{\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\}, \{t, tf, tf^2, tf^3\}\}$.

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \leq \mathbb{C}^*$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$z \sim w \iff \frac{z}{w} \in \mathbb{R}^+ \iff z$ és w argumentuma megegyezik.

$z \in \mathbb{C}$ mellékosztálya:

$$z \cdot \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ \cdot z = \{w \in \mathbb{C}^* : \arg w = \arg z\}.$$

A mellékosztályok kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a $[0, 2\pi)$ intervallum elemeinek.

A mellékosztályozás: $\{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$, ahol F_α az az origóból kiinduló nyílt félegyenes, amely α szöget zár be a valós tengely pozitív felével.

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$x \in \mathbb{R}$ mellékosztálya:

$$x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} + x = \{\ldots, x-2,\ x-1,\ x,\ x+1,\ x+2,\ x+3, \ldots\}.$$

$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z} \iff x$ és y törtrésze megegyezik.

A mellékosztályok kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a $[0,1)$ intervallum elemeinek.

A mellékosztályozás: $\{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$.

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ részcsoporthoz tartozó bal- és jobboldali mellékosztályokat.

- Baloldali mellékosztályok:

  $$A \sim B \iff \det\left(A^{-1}B\right) = 1 \iff \det(A) = \det(B),$$

  $$A \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \det(A)\}.$$

  Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}^*$ esetén legyen
  $D_\lambda = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(B) = \lambda\}$.

  A baloldali mellékosztályozás: $\{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

- Jobboldali mellékosztályok:

  $$A \sim B \iff \det\left(AB^{-1}\right) = 1 \iff \det(A) = \det(B).$$

  Tehát a jobboldali mellékosztályozás megegyezik a baloldalival.

Példa

Az $\{1\} \leq G$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályok egyeleműek:

$$a\{1\} = \{1\}a = \{a\} \text{ minden } a \in G \text{ esetén.}$$

A mellékosztályozás: $\{\{a\} : a \in G\}$.

Példa

A $G \leq G$ részcsoporthoz egyetlen mellékosztály tartozik:

$$aG = Ga = G \text{ minden } a \in G \text{ esetén.}$$

A mellékosztályozás: $\{G\}$.

Definíció

A G véges csoport H részcsoportja szerinti baloldali (jobboldali) mellékosztályok számát H **indexének** nevezzük. Jelölése: $[G : H]$.

Tétel (Lagrange tétele)

Tetszőleges G véges csoport és $H \leq G$ részcsoport esetén

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.7. és 3.11. Tétel.

Bármely $a \in G$ esetén

$$\lambda_a \colon H \to aH,\ x \mapsto ax$$

bijekció (miért?), tehát $|aH| = |H|$.

A H szerinti baloldali mellékosztályozás a G halmazt $[G : H]$ darab $|H|$-elemű osztályra osztja, így $|G| = |H| \cdot [G : H]$. $\square$

Következmény
Véges csoport bármely részcsoportjának rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.
[Sz] XII. fejezet, 3.12. Következmény. □

Következmény
Véges csoport bármely elemének rendje osztja a csoport rendjét.

Biz.
[Sz] XII. fejezet, 3.13. Következmény.
Csak azt kell észrevenni, hogy $o(a) = |[a]|$. □

Következmény
Ha G egy n-elemű csoport, akkor minden $a \in G$ elemre $a^n = 1$.

Biz.
Legyen $|G| = n = o(a) \cdot \ell$ (itt ℓ nem más, mint a $[a]$ részcsoport indexe).
Ekkor $a^n = a^{o(a)\cdot\ell} = \left(a^{o(a)}\right)^\ell = 1^\ell = 1$. □

Következmény
Ha G egy n-elemű csoport, akkor minden $a \in G$ elemre $a^{-1} = a^{n-1}$.

Következmény
Minden prímrendű csoport ciklikus.

Biz.
[Sz] XII. fejezet, 3.15. Következmény.

Ha $|G| = p$ prímszám, akkor minden $a \in G$ elemre $o(a) \in \{1, p\}$.
Ha $a \neq 1$, akkor $o(a) = p$, és így $[a] = G$. □

A kis elemszámú csoportok (izomorfia erejéig) a következők:

1. egyelemű: $\{1\}$;
2. kételemű: $\mathbb{Z}_2$;
3. háromelemű: $\mathbb{Z}_3$;
4. négyelemű: $\mathbb{Z}_4$, V;
5. ötelemű: $\mathbb{Z}_5$;
6. hatelemű: $\mathbb{Z}_6$; $D_3 \cong S_3$;
7. hételemű: $\mathbb{Z}_7$.

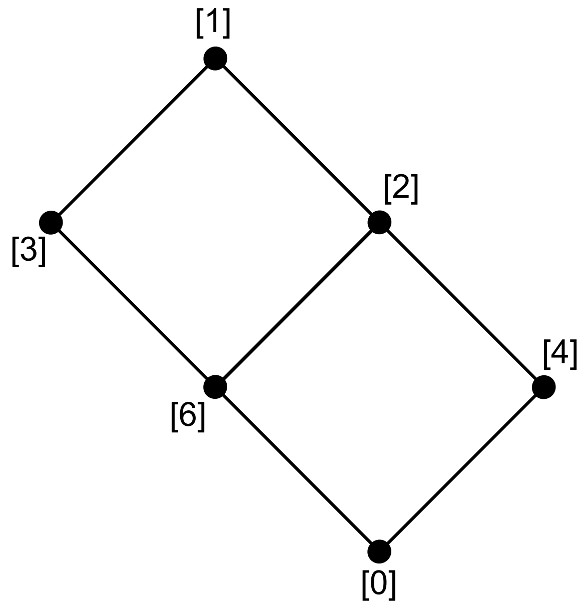
Példa
Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

Minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\} = [\overline{5}] = [\overline{7}] = [\overline{11}]$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} = [\overline{10}]$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\} = [\overline{9}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\} = [\overline{8}]$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{0}] = \{\overline{0}\}$

Példa
Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{12}$ csoport összes részcsoportját.

A részcsoportháló:



Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

$D_4 = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[tf] = \{\mathrm{id}, tf\}$
- $\left[tf^2\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^2\right\}$
- $\left[tf^3\right] = \left\{\mathrm{id}, tf^3\right\}$
- $\left[f^2\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2\right\}$
- $[f] = \left\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\right\} = \left[f^3\right]$

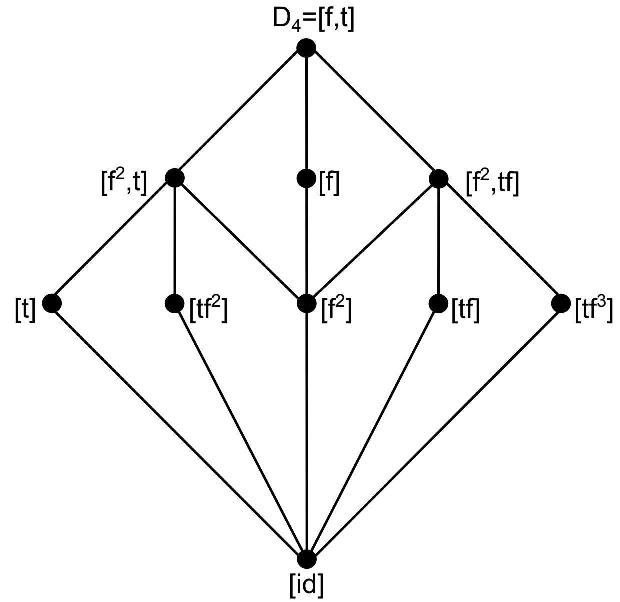
További részcsoportok:

- $\left[f^2, t\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\right\} = \left[f^2, tf^2\right] = \left[t, tf^2\right] \cong V$
- $\left[f^2, tf\right] = \left\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\right\} = \left[f^2, tf^3\right] = \left[tf, tf^3\right] \cong V$
- $[f, t] = D_4$

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes részcsoportját.

A részcsoportháló:



Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \left\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $\left[\overline{1}\right] = \left\{\overline{1}\right\}$
- $\left[\overline{2}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{11}\right\} = \left[\overline{11}\right]$
- $\left[\overline{4}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{4}, \overline{16}\right\} = \left[\overline{16}\right]$
- $\left[\overline{5}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{20}, \overline{16}, \overline{17}\right\} = \left[\overline{17}\right]$
- $\left[\overline{8}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{8}\right\}$
- $\left[\overline{10}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{13}, \overline{4}, \overline{19}\right\} = \left[\overline{19}\right]$
- $\left[\overline{13}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{13}\right\}$
- $\left[\overline{20}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{20}\right\}$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

$\mathbb{Z}_{21}^* = \left\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\right\}$

A ciklikus részcsoportok:

- $\left[\overline{1}\right] = \left\{\overline{1}\right\}$
- $\left[-\overline{1}\right] = \left\{\overline{1}, -\overline{1}\right\}$
- $\left[\overline{8}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{8}\right\}$
- $\left[-\overline{8}\right] = \left\{\overline{1}, -\overline{8}\right\}$
- $\left[\overline{4}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{4}, -\overline{5}\right\}$
- $\left[\overline{2}\right] = \left\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, \overline{8}, -\overline{10}\right\}$
- $\left[-\overline{2}\right] = \left\{\overline{1}, -\overline{2}, \overline{4}, -\overline{5}, -\overline{8}, \overline{10}\right\}$
- $\left[-\overline{4}\right] = \left\{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{4}, -\overline{4}, \overline{5}, -\overline{5}\right\}$

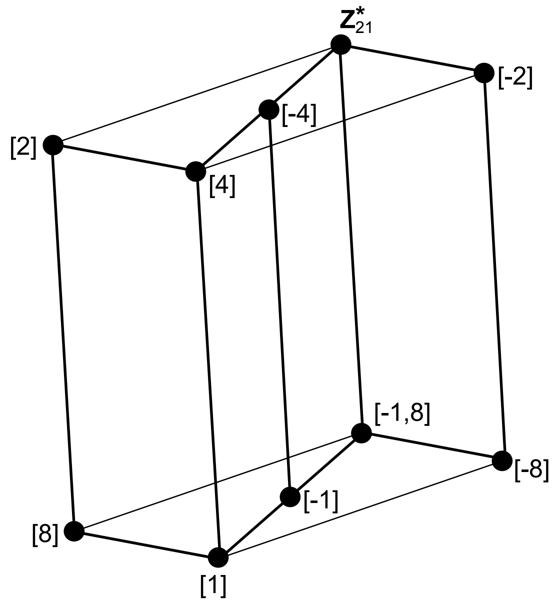
További részcsoportok:

- $\left[-\overline{1}, \overline{8}\right] = \left\{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{8}, -\overline{8}\right\} \cong V$
- $\mathbb{Z}_{21}^*$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport összes részcsoportját.

A részcsoportháló:



Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] XII/4 és [F] II/8,9 fejezetekben található.

Tétel

Tetszőleges $H \leq G$ részcsoportra az alábbiak ekvivalensek:

(1) *a H szerinti baloldali mellékosztályozás megegyezik a H szerinti jobboldali mellékosztályozással;*

(2) *$Hg = gH$ minden $g \in G$ elemre;*

(3) *$g^{-1}Hg = H$ minden $g \in G$ elemre;*

(4) *$g^{-1}Hg \subseteq H$ minden $g \in G$ elemre.*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 3.3. Állítás. □

Definíció

A fenti ekvivalens feltételeket kielégítő részcsoportokat **normáloszóknak** nevezzük. Jelölés: $H \triangleleft G$.

Példa

- Minden G csoportra $\{1\} \triangleleft G$ és $G \triangleleft G$. Ha nincs más normálosztó, akkor azt mondjuk, hogy G **egyszerű** csoport.
- Abel-csoportban minden részcsoport normálosztó.
- Lásd a korábbi példákat.
- Minden 2 indexű részcsoport normálosztó.

Tétel

Ha $N \triangleleft G$, akkor az N szerinti mellékosztályozás kompatibilis osztályozása G-nek (és így a $\left(G; \cdot, 1, ^{-1}\right)$ algebrának is).

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(1) Tétel.

Igaz-e, hogy tetszőleges aN,bN mellékosztályokhoz létezik egy cN mellékosztály, amelyre $aN \cdot bN \subseteq cN$? Igen, éspedig $c = ab$ jó lesz:

$$aNbN = abNN \subseteq abN = cN.$$ □

Definíció

Az N normálosztó szerinti mellékosztályozáshoz tartozó faktoralgebrát G/N-nel jelöljük, és **a G csoport N normálosztója szerinti faktorcsoportjának** nevezzük.

Megjegyzés

Mivel $NN = N$, valójában nem csak $aNbN \subseteq abN$, hanem $aNbN = abN$ is teljesül, így a faktorcsoportbeli szorzás megegyezik a komplexus-szorzással. (Grupoidokra általában ez nem igaz, lásd ⚠ .)

Tétel

Ha $\sim$ kongruenciája a G csoportnak, akkor $N := \{a \in G : a \sim 1\} \lhd G$, és a $\sim$ kongruenciához tartozó kompatibilis osztályozás nem más, mint az N normálosztó szerinti mellékosztályozás.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.8/(2) Tétel.

- N zárt a szorzásra:
  $a, b \in N \implies a, b \sim 1 \implies a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies a \cdot b \in N$
- N tartalmazza az egységelemet: $1 \sim 1 \implies 1 \in N$
- N zárt az inverzképzésre:
  $a \in N \implies a \sim 1 \implies a^{-1} \sim 1^{-1} = 1 \implies a^{-1} \in N$
- N normálosztó: ha $g \in G$ és $n \in N$, akkor

$$\left.\begin{array}{r} g^{-1} \sim g^{-1} \\ n \sim 1 \\ g \sim g \end{array}\right\} \implies g^{-1}ng \sim g^{-1}1g = g^{-1}g = 1 \implies g^{-1}ng \in N$$

- osztályozások megegyezése:
  $a \sim b \iff ab^{-1} \sim 1 \iff ab^{-1} \in N \iff aN = bN.$ $\square$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{0}, \overline{3}\} \lhd \mathbb{Z}_6$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\overline{0},\overline{3}\}, \{\overline{1},\overline{4}\}, \{\overline{2},\overline{5}\}\}$$

$$\mathbb{Z}_6/N = \begin{array}{c|ccc} + & \{\overline{0},\overline{3}\} & \{\overline{1},\overline{4}\} & \{\overline{2},\overline{5}\} \\ \hline \{\overline{0},\overline{3}\} & \{\overline{0},\overline{3}\} & \{\overline{1},\overline{4}\} & \{\overline{2},\overline{5}\} \\ \{\overline{1},\overline{4}\} & \{\overline{1},\overline{4}\} & \{\overline{2},\overline{5}\} & \{\overline{0},\overline{3}\} \\ \{\overline{2},\overline{5}\} & \{\overline{2},\overline{5}\} & \{\overline{0},\overline{3}\} & \{\overline{1},\overline{4}\} \end{array} \cong \begin{array}{c|ccc} + & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{2} & \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{array} = \mathbb{Z}_3$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon \mathbb{Z}_6/N \to \mathbb{Z}_3$, $\{\overline{0},\overline{3}\} \mapsto \widehat{0}$, $\{\overline{1},\overline{4}\} \mapsto \widehat{1}$, $\{\overline{2},\overline{5}\} \mapsto \widehat{2}$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \lhd \mathbb{Z}_6$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\}, \{\overline{1},\overline{3},\overline{5}\}\}$$

$$\mathbb{Z}_6/N = \begin{array}{c|cc} + & \{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\} & \{\overline{1},\overline{3},\overline{5}\} \\ \hline \{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\} & \{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\} & \{\overline{1},\overline{3},\overline{5}\} \\ \{\overline{1},\overline{3},\overline{5}\} & \{\overline{1},\overline{3},\overline{5}\} & \{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\} \end{array} \cong \begin{array}{c|cc} + & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{0} \end{array} = \mathbb{Z}_2$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon \mathbb{Z}_6/N \to \mathbb{Z}_2$, $\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\} \mapsto \widehat{0}$, $\{\overline{1},\overline{3},\overline{5}\} \mapsto \widehat{1}$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} \lhd \mathbb{Z}_{13}^*$ részcsoporthoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_{13}^*/N = \{\{\overline{1},\overline{5},\overline{8},\overline{12}\}, \{\overline{2},\overline{10},\overline{3},\overline{11}\}, \{\overline{4},\overline{7},\overline{6},\overline{9}\}\} = \{\overline{1}\cdot N, \overline{2}\cdot N, \overline{4}\cdot N\}$$

$$\mathbb{Z}_{13}^*/N = \begin{array}{c|ccc} \cdot & \overline{1}\cdot N & \overline{2}\cdot N & \overline{4}\cdot N \\ \hline \overline{1}\cdot N & \overline{1}\cdot N & \overline{2}\cdot N & \overline{4}\cdot N \\ \overline{2}\cdot N & \overline{2}\cdot N & \overline{4}\cdot N & \overline{1}\cdot N \\ \overline{4}\cdot N & \overline{4}\cdot N & \overline{1}\cdot N & \overline{2}\cdot N \end{array} \cong \begin{array}{c|ccc} + & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{2} & \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{array} = \mathbb{Z}_3$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon \mathbb{Z}_{13}^*/N \to \mathbb{Z}_3$, $\overline{1}\cdot N \mapsto \widehat{0}$, $\overline{2}\cdot N \mapsto \widehat{1}$, $\overline{4}\cdot N \mapsto \widehat{2}$

Példa

Határozzuk meg az $N = \{\overline{1}, \overline{5}\} \lhd \mathbb{Z}_{12}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{Z}_6/N = \{\{\overline{1}, \overline{5}\}, \{\overline{7}, \overline{11}\}\} = \{\overline{1} \cdot N, \overline{7} \cdot N\}$$

$$\mathbb{Z}_{12}^*/N \;=\; \begin{array}{c|cc} \cdot & \overline{1}\cdot N & \overline{7}\cdot N \\ \hline \overline{1}\cdot N & \overline{1}\cdot N & \overline{7}\cdot N \\ \overline{7}\cdot N & \overline{7}\cdot N & \overline{1}\cdot N \end{array} \;\cong\; \begin{array}{c|cc} + & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \hline \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{0} \end{array} \;=\; \mathbb{Z}_2$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon \mathbb{Z}_{12}^*/N \to \mathbb{Z}_2$, $\quad \overline{1} \cdot N \mapsto \widehat{0}$, $\overline{7} \cdot N \mapsto \widehat{1}$

Példa

Határozzuk meg a $V \lhd S_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$S_4/V \cong \; ?$$

$|S_4/V| = 6 \implies S_4/V \cong \mathbb{Z}_6$ vagy $S_4/V \cong S_3$

A két esetet megkülönbözteti a kommutativitás.

$(12)\,V \cdot (13)\,V = (123)\,V, \qquad (13)\,V \cdot (12)\,V = (132)\,V$ és

$(123)\,(132)^{-1} = (132) \notin V \implies (123)\,V \neq (132)\,V,$

tehát S_4/V nem kommutatív, így $S_4/V \cong S_3$.

(Később látunk majd egy „tanulságosabb” megoldást is.)

Példa

Határozzuk meg az $N = [f] \lhd D_4$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$D_4/N = \{\{\text{forgatások}\}, \{\text{tükrözések}\}\}$$

$$D_4/N \;=\; \begin{array}{c|cc} \cdot & \{\text{forg.}\} & \{\text{tükr.}\} \\ \hline \{\text{forg.}\} & \{\text{forg.}\} & \{\text{tükr.}\} \\ \{\text{tükr.}\} & \{\text{tükr.}\} & \{\text{forg.}\} \end{array} \;\cong\; \begin{array}{c|cc} \cdot & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \;\cong\; \mathbb{Z}_2$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon D_4/N \to \{\pm 1\}$, $\quad \{\text{forg.}\} \mapsto 1$, $\{\text{tükr.}\} \mapsto -1$

Példa

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ = \{F_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Mivel $F_\alpha \cdot F_\beta = F_{\alpha+\beta}$, ezért $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong ([0, 2\pi); \oplus)$,
ahol $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \mod 2\pi$.

Izomorfizmus: $\varphi\colon ([0, 2\pi); \oplus) \to (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot)$, $\quad \alpha \mapsto F_\alpha$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\alpha \oplus \beta)\,\varphi = F_{\alpha\oplus\beta} = F_{\alpha+\beta} = F_\alpha \cdot F_\beta = \alpha\varphi \cdot \beta\varphi$

Másik megoldás: legyen $T = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$;
ekkor $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \cong (T; \cdot)$.

Izomorfizmus: $\psi\colon (\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+; \cdot) \to (T; \cdot)$, $\quad F_\alpha \mapsto \operatorname{cis}(\alpha)$

- bijektivitás: világos
- homomorfia:
  $(F_\alpha \cdot F_\beta)\,\psi = F_{\alpha+\beta}\psi = \operatorname{cis}(\alpha+\beta) = \operatorname{cis}(\alpha) \cdot \operatorname{cis}(\beta) = F_\alpha\psi \cdot F_\beta\psi$

Példa

Határozzuk meg a $\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \colon x \in [0,1)\}$$

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong ([0,1)\,; \oplus)$, ahol $x \oplus y = x + y \mod 1 = x + y$ törtrésze.

Másik megoldás: $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \cong (T; \cdot)$.
Izomorfizmus: $\varphi\colon (\mathbb{R}/\mathbb{Z}; +) \to (T; \cdot)\,, \quad x + \mathbb{Z} \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$

- jóldefiniáltság és bijektivitás:
$$\begin{aligned}(x+\mathbb{Z})\,\varphi = (y+\mathbb{Z})\,\varphi \quad &\iff \operatorname{cis}(2\pi x) = \operatorname{cis}(2\pi y)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : 2\pi y = 2\pi x + 2\pi k\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = x + k\\ &\iff x + \mathbb{Z} = y + \mathbb{Z}\end{aligned}$$
- homomorfia:
$$\begin{aligned}((x+\mathbb{Z}) + (y+\mathbb{Z}))\varphi &= (x+y+\mathbb{Z})\,\varphi\\ &= \operatorname{cis}(2\pi\,(x+y))\\ &= \operatorname{cis}(2\pi x + 2\pi y)\\ &= \operatorname{cis}(2\pi x)\cdot\operatorname{cis}(2\pi y)\\ &= (x+\mathbb{Z})\,\varphi\cdot(y+\mathbb{Z})\,\varphi\end{aligned}$$

Példa

Határozzuk meg az $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\,/\,\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{D_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cong \mathbb{R}^*$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\,/\,\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*, \quad D_\lambda \mapsto \lambda$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(D_\lambda \cdot D_\mu)\,\varphi = D_{\lambda\cdot\mu}\varphi = \lambda\cdot\mu = D_\lambda\varphi\cdot D_\mu\varphi$

Példa

Határozzuk meg az $\{1\} \triangleleft G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/\{1\} = \{\{a\} : a \in G\} \cong G$$

Izomorfizmus: $\varphi\colon G/\{1\} \to G, \quad \{a\} \mapsto a$

- bijektivitás: világos
- homomorfia: $(\{a\}\cdot\{b\})\,\varphi = \{a\cdot b\}\,\varphi = a\cdot b = \{a\}\,\varphi\cdot\{b\}\,\varphi$

Példa

Határozzuk meg a $G \triangleleft G$ normálosztóhoz tartozó faktorcsoportot.

$$G/G = \{G\} \cong \{1\}$$

Definíció

Az $a \in G$ elem g-vel való **konjugáltján** a $g^{-1}ag$ elemet értjük. Az $\alpha_g\colon G \to G,\ x \mapsto g^{-1}xg$ leképezést g-vel való **konjugálásnak** nevezzük. Azt mondjuk, hogy a és b **konjugáltak**, ha létezik olyan $g \in G$ elem, amelyre $b = g^{-1}ag$.

Állítás

Minden $g \in G$-re α_g automorfizmusa G-nek; ezeket nevezzük **belső automorfizmusoknak**.

Biz.

[F] II/8. fejezet.

$\square$

Állítás

A konjugáltsági reláció ekvivalenciareláció; a megfelelő ekvivalenciaosztályokat **konjugáltosztályoknak** *nevezzük.*

Biz.

HF

$\square$

Állítás

Egy $N \subseteq G$ halmaz pontosan akkor normálosztó, ha részalgebrája a $(G; \cdot, 1, ^{-1}, \alpha_g \ (g \in G))$ algebrának. A részalgebrákról tanultakat erre az algebrára alkalmazva kapjuk az alábbiakat.

- *Normálosztók metszete normálosztó.*
- *Egy $B \subseteq G$ halmaz által* **generált normálosztón** *az összes B-t tartalmazó normálosztók metszetét értjük.*
- *A B halmaz által generált normálosztó a legszűkebb B-t tartalmazó normálosztó. Ez mindazokból az elemekből áll, amelyek megkaphatók B elemeiből szorzás, inverzképzés és konjugálások véges számú alkalmazásával.*

Biz.

HF □

Példa

- Abel-csoportban minden elem csak saját magával konjugált (a konjugáltsági reláció az egyenlőség reláció).
- Bármely csoportban az egységelem csak saját magához konjugált.
- Két mátrix akkor és csak akkor konjugált a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ csoportban, ha az $\mathbb{R}^n$ vektortér ugyanazon lineáris transzformációját adják meg (különböző bázisokban).

Állítás

Két S_n-beli permutáció akkor és csak akkor konjugált, ha ugyanaz a **ciklusszerkezetük** *(azaz minden ℓ-re ugyanannyi ℓ hosszúságú ciklust tartalmaznak).*

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.16. Állítás.
Legyen $\pi = (a_1\, a_2\, \dots\, a_k)(b_1\, b_2\, \dots\, b_l) \dots \in S_n$ és $\sigma \in S_n$. Állítjuk, hogy ekkor

$$\sigma^{-1}\pi\sigma \stackrel{?}{=} (a_1\sigma\, a_2\sigma\, \dots\, a_k\sigma)(b_1\sigma\, b_2\sigma\, \dots\, b_l\sigma) \dots .$$

Szorozzunk balról σ-val (ez ekvivalens átalakítás):

$$\pi\sigma \stackrel{?}{=} \sigma\,(a_1\sigma\, a_2\sigma\, \dots\, a_k\sigma)(b_1\sigma\, b_2\sigma\, \dots\, b_l\sigma) \dots .$$

Egy tetszőleges a_i elem képe a baloldali és a jobboldali permutáció mellett egyaránt $a_{i\oplus 1}\sigma$. (HF) □

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\mathrm{id}, (23)\} \leq S_3$ részcsoport által generált N normálosztót és az S_3/N faktorcsoportot.

A konjugáltak: id, (23), (12), (13).

A konjugáltak által generált részcsoport: $N = [(12), (13), (23)] = S_3$.

A faktorcsoport: $S_3/S_3 = \{S_3\} \cong \{1\}$.

Példa

Határozzuk meg az S_4 csoport összes normálosztóját.
A konjugáltosztályok:

- $\{\mathrm{id}\}$ (1 db)
- $(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (8 db)
- $(\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (6 db)
- $(\bullet\ \bullet)(\bullet\ \bullet)$ alakú permutációk (3 db)

Ha $N \lhd S_4$, akkor egyrészt $|N|$ a fenti számok közül néhánynak az összege (az 1-nek mindenképpen szerepelnie kell az összegben), másrészt $|N|$ osztója 24-nek. A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\mathrm{id}\}$;
- $|N| = 1 + 3 = 4, \quad N = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = V$;
- $|N| = 1 + 3 + 8 = 12, \quad N = \{\mathrm{id}, (12)(34), \dots, (123), \dots\} = A_4$;
- $|N| = 24$, $N = S_4$.

Mind a négy esetben valóban normálosztót kapunk.
(Ez nem automatikus, ellenőrizni kell!)

Példa

Határozzuk meg a $H = \{\text{id}, t\} \leq D_4$ részcsoport által generált N normálosztót és a D_4/N faktorcsoportot.

A konjugáltak:

$$\begin{array}{llll} \text{id}^{-1} \cdot t \cdot \text{id} & = t & t^{-1} \cdot t \cdot t & = t \\ f^{-1} \cdot t \cdot f & = tf^2 & (tf)^{-1} \cdot t \cdot tf & = tf^2 \\ f^{-2} \cdot t \cdot f^2 & = t & (tf^2)^{-1} \cdot t \cdot tf^2 & = t \\ f^{-3} \cdot t \cdot f^3 & = tf^2 & (tf^3)^{-1} \cdot t \cdot tf^3 & = tf^2 \end{array}$$

A konjugáltak által generált részcsoport:
$N = \left[t, tf^2\right] = \left\{\text{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong V$.

A faktorcsoport: $D_4/N = \left\{\left\{\text{id}, f^2, t, tf^2\right\}, \left\{f, f^3, tf, tf^3\right\}\right\} \cong \mathbb{Z}_2$.

Példa

Határozzuk meg a D_4 csoport összes normálosztóját.

A konjugáltosztályok: $\{\text{id}\}$, $\left\{f^2\right\}$, $\left\{f, f^3\right\}$, $\left\{t, tf^2\right\}$, $\left\{tf, tf^3\right\}$.

Ha $N \lhd D_4$, akkor N a fenti halmazok közül néhánynak az uniója ($\{\text{id}\}$ mindenképpen szerepel), másrészt $|N|$ osztója 8-nak.
A következő lehetőségek vannak:

- $|N| = 1, \quad N = \{\text{id}\}$;
- $|N| = 1 + 1 = 2, \quad N = \left\{\text{id}, f^2\right\} \cong \mathbb{Z}_2$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \left\{\text{id}, f^2, f, f^3\right\} \cong \mathbb{Z}_4$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \left\{\text{id}, f^2, t, tf^2\right\} \cong V$;
- $|N| = 1 + 1 + 2 = 4, \quad N = \left\{\text{id}, f^2, tf, tf^3\right\} \cong V$;
- $|N| = 8, \ N = D_4$.

Mind a hat esetben valóban normálosztót kapunk.
(Ez nem automatikus, ellenőrizni kell!)

Rajzoljuk fel a normálosztóhálót!

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] XII/4 és [F] II/9,10 fejezetekben található.

Legyen $\varphi\colon G \to H$ csoporthomomorfizmus. Általános algebrában φ magját így definiáltuk:

$$\ker \varphi = \{(a, b) : a\varphi = b\varphi\} \subseteq G \times G.$$

Ez egy kongruenciája a G csoportnak, ezért az egységelem osztálya egy N normálosztót alkot G-ben. Ez a normálosztó teljesen meghatározza a $\ker \varphi$ kongruenciát (ugyanis $(a, b) \in \ker \varphi \iff aN = bN$); csoportelméletben magon ezt a normálosztót értjük.

Definíció

A $\varphi\colon G \to H$ csoporthomomorfizmus **magja** :

$$\ker \varphi := \{g \in G : g\varphi = 1\}.$$

Az általános algebrai homomorfiatétel speciális eseteként kapjuk:

Tétel (Csoportelméleti homomorfiatétel)

Ha $\varphi\colon G \to H$ csoporthomomorfizmus, akkor $\ker \varphi \lhd G$ és

$$G/\ker \varphi \cong G\varphi \leq H.$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.11. Tétel. □

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$, $\overline{k} \mapsto \widehat{k}$ homomorfizmus.
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies k_1 \equiv k_2 \pmod 3$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = \widehat{k_1 + k_2} = \widehat{k_1} + \widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon \widehat{k} = \widehat{0}\right\} = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 3 \mid k\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\} \lhd \mathbb{Z}_6$
- értékkészlet: $\mathbb{Z}_6\varphi = \left\{\widehat{k} \colon \overline{k} \in \mathbb{Z}_6\right\} = \mathbb{Z}_3$
- izomorfizmus:
  $\psi\colon \mathbb{Z}_6 / \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\} \to \mathbb{Z}_3, \quad \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\} \mapsto \widehat{0}, \ \left\{\overline{1}, \overline{4}\right\} \mapsto \widehat{1}, \ \left\{\overline{2}, \overline{5}\right\} \mapsto \widehat{2}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$, $\overline{k} \mapsto 5\widehat{k}$ homomorfizmus.
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ jóldefiniált: $k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \implies 5k_1 \equiv 5k_2 \pmod{10}$
- φ homomorfizmus:
  $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = 5\widehat{k_1 + k_2} = 5\widehat{k_1} + 5\widehat{k_2} = \overline{k_1}\varphi + \overline{k_2}\varphi$
- mag:
  $\ker\varphi = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 5\widehat{k} = \widehat{0}\right\} = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}_6 \colon 10 \mid 5k\right\} = \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\} \lhd \mathbb{Z}_6$
- értékkészlet: $\mathbb{Z}_6\varphi = \left\{5\widehat{k} \colon \overline{k} \in \mathbb{Z}_6\right\} = \left\{\widehat{0}, \widehat{5}\right\} \leq \mathbb{Z}_{10}$
- izomorfizmus:
  $\psi\colon \mathbb{Z}_6 / \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\} \to \mathbb{Z}_{10}, \quad \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\} \mapsto \widehat{0}, \ \left\{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\right\} \mapsto \widehat{5}$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ homomorfizmus.
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:
  $(z \cdot w)\varphi = \frac{z \cdot w}{|z \cdot w|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|} = z\varphi \cdot w\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \left\{z \in \mathbb{C}^* \colon \frac{z}{|z|} = 1\right\} = \{z \in \mathbb{C}^* \colon z = |z|\} = \mathbb{R}^+ \lhd \mathbb{C}^*$
- értékkészlet: $\mathbb{C}^*\varphi = \left\{\frac{z}{|z|} \colon z \in \mathbb{C}^*\right\} = T \leq \mathbb{C}^*$
- izomorfizmus: $\psi\colon \mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ \to T, \quad F_\alpha \mapsto \operatorname{cis}(\alpha)$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$ homomorfizmus.
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus:
  $(x + y)\varphi = \operatorname{cis}(2\pi(x + y)) = \operatorname{cis}(2\pi x) \cdot \operatorname{cis}(2\pi y) = x\varphi \cdot y\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \{x \in \mathbb{R} \colon \operatorname{cis}(2\pi x) = 1\} = \mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$
- értékkészlet: $\mathbb{R}\varphi = \{\operatorname{cis}(2\pi x) : x \in \mathbb{R}\} = T \leq \mathbb{C}^*$
- izomorfizmus: $\psi\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to T, \quad x + \mathbb{Z} \mapsto \operatorname{cis}(2\pi x)$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det(A)$ homomorfizmus. Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus: $(A \cdot B)\,\varphi = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = A\varphi \cdot B\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
- értékkészlet: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\,\varphi = \{\det(A) : A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\} = \mathbb{R}^*$
- izomorfizmus: $\psi\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*, \quad D_\lambda \mapsto \lambda$

Példa

Ellenőrizzük, hogy $\varphi\colon G \to H$, $g \mapsto 1$ homomorfizmus (triviális homomorfizmus).
Határozzuk meg a magját és az értékkészletét, majd írjuk fel a homomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmust.

- φ homomorfizmus: $(g_1 \cdot g_2)\,\varphi = 1 = 1 \cdot 1 = g_1\varphi \cdot g_2\varphi$
- mag: $\ker\varphi = \{g \in G : g\varphi = 1\} = G \triangleleft G$
- értékkészlet: $G\varphi = \{g\varphi : g \in G\} = \{1\} \leq H$
- izomorfizmus: $\psi\colon G/G \to \{1\}, \quad G \mapsto 1$

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_7\varphi \leq S_5$. Ez lehetetlen, mert $7 \nmid 120$ (Lagrange).

Példa

Létezik-e injektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_6\varphi \leq S_5$. Ekkor $\mathbb{Z}_6\varphi = [\pi]$, ahol $\pi \in S_5$ hatodrendű permutáció. Ilyen létezik, például $\pi = (123)(45)$, és ekkor $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_5$, $\overline{k} \mapsto \pi^k$ valóban injektív homomorfizmus:

- φ jóldefiniált és injektív: $\overline{k_1}\varphi = \overline{k_2}\varphi \iff \pi^{k_1} = \pi^{k_2} \iff k_1 \equiv k_2 \pmod 6 \iff \overline{k_1} = \overline{k_2}$
- φ homomorfizmus: $\left(\overline{k_1} + \overline{k_2}\right)\varphi = \overline{k_1 + k_2}\varphi = \pi^{k_1+k_2} = \pi^{k_1} \cdot \pi^{k_2} = \overline{k_1}\varphi \cdot \overline{k_2}\varphi$

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon \mathbb{Z}_{24} \to S_3$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $\mathbb{Z}_{24}/\ker\varphi \cong S_3$. Ez lehetetlen, mert $\mathbb{Z}_{24}$ Abel-csoport, és így minden faktorcsoportja is az.

Példa

Létezik-e szürjektív $\varphi\colon D_4 \to V$ homomorfizmus?

Ha létezik, akkor $D_4/\ker\varphi \cong V$. Ekkor $\ker\varphi$ kételemű normálosztó D_4-ben. Ilyen csak egy van: $\{\mathrm{id}, f^2\}$, és valóban, $D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \cong V$ például az alábbi ψ izomorfizmus mellett:

$$\psi\colon D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \to V, \quad \begin{array}{ll} \{\mathrm{id}, f^2\} \mapsto \mathrm{id}, & \{f, f^3\} \mapsto (12)(34), \\ \{t, tf^2\} \mapsto (13)(24), & \{tf, tf^3\} \mapsto (14)(23). \end{array}$$

Ebből kapjuk a kívánt $\varphi\colon D_4 \to V$ homomorfizmust:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{id}\,\varphi = \mathrm{id}, & f\,\varphi = (12)(34), & t\,\varphi = (13)(24), & tf\,\varphi = (14)(23), \\ f^2\,\varphi = \mathrm{id}, & f^3\,\varphi = (12)(34), & tf^2\,\varphi = (13)(24), & tf^3\,\varphi = (14)(23). \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

D_4 faktorcsoportjai:	$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:
(1) $D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$	(a) $\mathbb{Z}_4$
(2) $D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \cong V$	(b) $\{\overline{0}, \overline{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(3) $D_4/\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \cong \mathbb{Z}_2$	(c) $\{\overline{0}\} \cong \{1\}$
(4) $D_4/\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\} \cong \mathbb{Z}_2$	
(5) $D_4/\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong \mathbb{Z}_2$	
(6) $D_4/D_4 \cong \{1\}$	

(3) $\to$ (b): $\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \mapsto \overline{0}, \quad \{t, tf, tf^2, tf^3\} \mapsto \overline{2}$

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{id}\,\varphi = \overline{0} & f\,\varphi = \overline{0} & f^2\,\varphi = \overline{0} & f^3\,\varphi = \overline{0} \\ t\,\varphi = \overline{2} & tf\,\varphi = \overline{2} & tf^2\,\varphi = \overline{2} & tf^3\,\varphi = \overline{2} \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

D_4 faktorcsoportjai:	$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:
(1) $D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$	(a) $\mathbb{Z}_4$
(2) $D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \cong V$	(b) $\{\overline{0}, \overline{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(3) $D_4/\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \cong \mathbb{Z}_2$	(c) $\{\overline{0}\} \cong \{1\}$
(4) $D_4/\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\} \cong \mathbb{Z}_2$	
(5) $D_4/\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong \mathbb{Z}_2$	
(6) $D_4/D_4 \cong \{1\}$	

(4) $\to$ (b): $\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\} \mapsto \overline{0}, \quad \{f, f^3, tf, tf^3\} \mapsto \overline{2}$

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{id}\,\varphi = \overline{0} & f\,\varphi = \overline{2} & f^2\,\varphi = \overline{0} & f^3\,\varphi = \overline{2} \\ t\,\varphi = \overline{0} & tf\,\varphi = \overline{2} & tf^2\,\varphi = \overline{0} & tf^3\,\varphi = \overline{2} \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

D_4 faktorcsoportjai:	$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:
(1) $D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$	(a) $\mathbb{Z}_4$
(2) $D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \cong V$	(b) $\{\overline{0}, \overline{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(3) $D_4/\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \cong \mathbb{Z}_2$	(c) $\{\overline{0}\} \cong \{1\}$
(4) $D_4/\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\} \cong \mathbb{Z}_2$	
(5) $D_4/\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong \mathbb{Z}_2$	
(6) $D_4/D_4 \cong \{1\}$	

(5) $\to$ (b): $\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\} \mapsto \overline{0}, \quad \{f, f^3, t, tf^2\} \mapsto \overline{2}$

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{id}\,\varphi = \overline{0} & f\,\varphi = \overline{2} & f^2\,\varphi = \overline{0} & f^3\,\varphi = \overline{2} \\ t\,\varphi = \overline{2} & tf\,\varphi = \overline{0} & tf^2\,\varphi = \overline{2} & tf^3\,\varphi = \overline{0} \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon D_4 \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmust.

Mivel $D_4/\ker\varphi \cong D_4\varphi \leq \mathbb{Z}_4$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust D_4 faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai között.

D_4 faktorcsoportjai:	$\mathbb{Z}_4$ részcsoportjai:
(1) $D_4/\{\mathrm{id}\} \cong D_4$	(a) $\mathbb{Z}_4$
(2) $D_4/\{\mathrm{id}, f^2\} \cong V$	(b) $\{\overline{0}, \overline{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(3) $D_4/\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3\} \cong \mathbb{Z}_2$	(c) $\{\overline{0}\} \cong \{1\}$
(4) $D_4/\{\mathrm{id}, f^2, t, tf^2\} \cong \mathbb{Z}_2$	
(5) $D_4/\{\mathrm{id}, f^2, tf, tf^3\} \cong \mathbb{Z}_2$	
(6) $D_4/D_4 \cong \{1\}$	

(6) $\to$ (c): $\{\mathrm{id}, f, f^2, f^3, t, tf, tf^2, tf^3\} \mapsto \overline{0}$

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{id}\,\varphi = \overline{0} & f\,\varphi = \overline{0} & f^2\,\varphi = \overline{0} & f^3\,\varphi = \overline{0} \\ t\,\varphi = \overline{0} & tf\,\varphi = \overline{0} & tf^2\,\varphi = \overline{0} & tf^3\,\varphi = \overline{0} \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Mivel $\mathbb{Z}_{15}/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust $\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai között.

$\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai:	$\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai:
(1) $\mathbb{Z}_{15}/\{\overline{0}\} \cong \mathbb{Z}_{15}$	(a) $\mathbb{Z}_6$
(2) $\mathbb{Z}_{15}/\{\overline{0},\overline{5},\overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_5$	(b) $\{\widehat{0},\widehat{2},\widehat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$
(3) $\mathbb{Z}_{15}/\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\} \cong \mathbb{Z}_3$	(c) $\{\widehat{0},\widehat{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4) $\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$	(d) $\{\widehat{0}\} \cong \{1\}$

(3) $\to$ (b): $\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\}\mapsto\widehat{0}$, $\{\overline{1},\overline{4},\overline{7},\overline{10},\overline{13}\}\mapsto\widehat{2}$, $\{\overline{2},\overline{5},\overline{8},\overline{11},\overline{14}\}\mapsto\widehat{4}$

$$\begin{array}{lllll}
\overline{0}\varphi=\widehat{0} & \overline{3}\varphi=\widehat{0} & \overline{6}\varphi=\widehat{0} & \overline{9}\varphi=\widehat{0} & \overline{12}\varphi=\widehat{0}\\
\overline{1}\varphi=\widehat{2} & \overline{4}\varphi=\widehat{2} & \overline{7}\varphi=\widehat{2} & \overline{10}\varphi=\widehat{2} & \overline{13}\varphi=\widehat{2}\\
\overline{2}\varphi=\widehat{4} & \overline{5}\varphi=\widehat{4} & \overline{8}\varphi=\widehat{4} & \overline{11}\varphi=\widehat{4} & \overline{14}\varphi=\widehat{4}
\end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Mivel $\mathbb{Z}_{15}/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust $\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai között.

$\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai:	$\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai:
(1) $\mathbb{Z}_{15}/\{\overline{0}\} \cong \mathbb{Z}_{15}$	(a) $\mathbb{Z}_6$
(2) $\mathbb{Z}_{15}/\{\overline{0},\overline{5},\overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_5$	(b) $\{\widehat{0},\widehat{2},\widehat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$
(3) $\mathbb{Z}_{15}/\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\} \cong \mathbb{Z}_3$	(c) $\{\widehat{0},\widehat{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4) $\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$	(d) $\{\widehat{0}\} \cong \{1\}$

(3) $\to$ (b): $\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\}\mapsto\widehat{0}$, $\{\overline{1},\overline{4},\overline{7},\overline{10},\overline{13}\}\mapsto\widehat{4}$, $\{\overline{2},\overline{5},\overline{8},\overline{11},\overline{14}\}\mapsto\widehat{2}$

$$\begin{array}{lllll}
\overline{0}\varphi=\widehat{0} & \overline{3}\varphi=\widehat{0} & \overline{6}\varphi=\widehat{0} & \overline{9}\varphi=\widehat{0} & \overline{12}\varphi=\widehat{0}\\
\overline{1}\varphi=\widehat{4} & \overline{4}\varphi=\widehat{4} & \overline{7}\varphi=\widehat{4} & \overline{10}\varphi=\widehat{4} & \overline{13}\varphi=\widehat{4}\\
\overline{2}\varphi=\widehat{2} & \overline{5}\varphi=\widehat{2} & \overline{8}\varphi=\widehat{2} & \overline{11}\varphi=\widehat{2} & \overline{14}\varphi=\widehat{2}
\end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Mivel $\mathbb{Z}_{15}/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_{15}\varphi \leq \mathbb{Z}_6$, a feladatunk megtalálni az összes lehetséges izomorfizmust $\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai és $\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai között.

$\mathbb{Z}_{15}$ faktorcsoportjai:	$\mathbb{Z}_6$ részcsoportjai:
(1) $\mathbb{Z}_{15}/\{\overline{0}\} \cong \mathbb{Z}_{15}$	(a) $\mathbb{Z}_6$
(2) $\mathbb{Z}_{15}/\{\overline{0},\overline{5},\overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_5$	(b) $\{\widehat{0},\widehat{2},\widehat{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$
(3) $\mathbb{Z}_{15}/\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\} \cong \mathbb{Z}_3$	(c) $\{\widehat{0},\widehat{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$
(4) $\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_{15} \cong \{1\}$	(d) $\{\widehat{0}\} \cong \{1\}$

(4) $\to$ (d): $\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\ldots,\overline{14}\}\mapsto\widehat{0}$

$$\begin{array}{lllll}
\overline{0}\varphi=\widehat{0} & \overline{3}\varphi=\widehat{0} & \overline{6}\varphi=\widehat{0} & \overline{9}\varphi=\widehat{0} & \overline{12}\varphi=\widehat{0}\\
\overline{1}\varphi=\widehat{0} & \overline{4}\varphi=\widehat{0} & \overline{7}\varphi=\widehat{0} & \overline{10}\varphi=\widehat{0} & \overline{13}\varphi=\widehat{0}\\
\overline{2}\varphi=\widehat{0} & \overline{5}\varphi=\widehat{0} & \overline{8}\varphi=\widehat{0} & \overline{11}\varphi=\widehat{0} & \overline{14}\varphi=\widehat{0}
\end{array}$$

Példa

Határozzuk meg az összes $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ homomorfizmust.

Egy másik megoldás: határozzuk meg φ értékét egy generátorrendszeren.

Ha $\overline{1}\varphi = \widehat{k} \in \mathbb{Z}_6$, akkor minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{15}$ esetén $\overline{a}\varphi = \widehat{ak}$.

Milyen $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ értékekre lesz

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6,\ \overline{a} \mapsto \widehat{ak}$$

valóban homomorfizmus?

- φ jóldefiniált: Minden $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$-re teljesülnie kell, hogy $a_1 \equiv a_2 \pmod{15} \implies ka_1 \equiv ka_2 \pmod{6}$.
  Tehát $k = 0, 2, 4$ lehet csak.
- φ homomorfizmus:
  $(\overline{a_1}+\overline{a_2})\varphi = \overline{a_1+a_2}\varphi = k\widehat{(a_1+a_2)} = \widehat{ka_1}+\widehat{ka_2} = \overline{a_1}\varphi+\overline{a_2}\varphi$

Emlékeztető:

(1) Ha $N \lhd G$, akkor $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ a **természetes homomorfizmus** .

(2) Homomorfizmusnál részcsoport képe részcsoport:
ha $\varphi\colon G \to \widetilde{G}$ homomorfizmus és $H \leq G$, akkor

$$H\varphi = \{h\varphi \colon h \in H\} \leq \widetilde{G}.$$

(3) Homomorfizmusnál részcsoport teljes inverz képe részcsoport:
ha $\varphi\colon G \to \widetilde{G}$ homomorfizmus és $\widetilde{H} \leq \widetilde{G}$, akkor

$$\widetilde{H}\varphi^{-1} = \{g \in G \colon g\varphi \in \widetilde{H}\} \leq G.$$

Tétel (I. izomorfiatétel)

Ha $H \leq G$ és $N \lhd G$, akkor $N \lhd HN \leq G$ és $H \cap N \lhd H \leq G$, továbbá

$$HN/N \cong H/H{\cap}N.$$

Biz.

Tekintsük a $\nu\colon G \to G/N$, $g \mapsto gN$ természetes homomorfizmus H-ra való megszorítását:

$$\nu|_H \colon H \to G/N,\ h \mapsto hN.$$

Alkalmazzuk erre a homomorfizmusra a homomorfiatételt.

- mag:
  $\ker \nu|_H = \{h \in H \colon h\nu = N\} = \{h \in H \colon hN = N\} = H \cap N \lhd H$
- értékkészlet:
  $H\nu|_H = \{h\nu \colon h \in H\} = \{hN \colon h \in H\} = HN/N \leq G/N$
- izomorfizmus: $H/H{\cap}N \cong HN/N$ □

Miért lesz HN részcsoport G-ben?
1. válasz: $HN = (H\nu)\,\nu^{-1}$
2. válasz: $HN \cdot HN = HHNN = HN$ és $(HN)^{-1} = N^{-1}H^{-1} = NH = HN$

$HN = [H \cup N] = H \vee N$ a legszűkebb részcsoport, ami H-t és N-et is tartalmazza.

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = \mathbb{Z}_{24}$, $H = [\overline{4}]$, $N = [\overline{6}]$ szereposztással.

- $H \cap N = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\} \cap \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\} = \{\overline{0}, \overline{12}\} = [\overline{12}]$
- $H/H{\cap}N = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\} \,/\, \{\overline{0}, \overline{12}\}$
  $= \{\{\overline{0}, \overline{12}\}, \{\overline{4}, \overline{16}\}, \{\overline{8}, \overline{20}\}\} \cong \mathbb{Z}_3$
- $H + N = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\} + \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\}$
  $= \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}\} = [\overline{2}]$
- $(H+N)/N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}\} \,/\, \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\}$
  $= \{\{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\}, \{\overline{2}, \overline{8}, \overline{14}, \overline{20}\}, \{\overline{4}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{22}\}\} \cong \mathbb{Z}_3$
- izomorfia:
  $$\varphi\colon [\overline{2}]\,/\,[\overline{6}] \to [\overline{4}]\,/\,[\overline{12}], \qquad \begin{aligned} \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\} &\mapsto \{\overline{0}, \overline{12}\} \\ \{\overline{2}, \overline{8}, \overline{14}, \overline{20}\} &\mapsto \{\overline{8}, \overline{20}\} \\ \{\overline{4}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{22}\} &\mapsto \{\overline{4}, \overline{16}\} \end{aligned}$$

$G =$

$\overline{18}$	$\overline{22}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{21}$	$\overline{23}$
$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$
$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{13}$	$\overline{15}$	$\overline{17}$
$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$

$N =$

$\overline{18}$	$\overline{22}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{21}$	$\overline{23}$
$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$
$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{13}$	$\overline{15}$	$\overline{17}$
$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$

$G/N =$

$\overline{18}$	$\overline{22}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{21}$	$\overline{23}$
$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$
$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{13}$	$\overline{15}$	$\overline{17}$
$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$

$$H = \begin{array}{cccccc} \overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\ \overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\ \overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{array}$$

$$H + N = \begin{array}{cccccc} \overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\ \overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\ \overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{array}$$

$$(H + N)/N = \begin{array}{cccccc} \overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\ \overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\ \overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{array}$$

$$H = \begin{array}{cccccc} \overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\ \overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\ \overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{array}$$

$$H \cap N = \begin{array}{cccccc} \overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\ \overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\ \overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{array}$$

$$H/H \cap N = \begin{array}{cccccc} \overline{18} & \overline{22} & \overline{2} & \overline{19} & \overline{21} & \overline{23} \\ \overline{6} & \overline{10} & \overline{14} & \overline{7} & \overline{9} & \overline{11} \\ \overline{12} & \overline{16} & \overline{20} & \overline{13} & \overline{15} & \overline{17} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} \end{array}$$

Az első izomorfiatétel által szolgáltatott izomorfizmus:

$$\begin{array}{cccc} (H+N)/N = & \boxed{\begin{array}{c} \overline{18} \\ \overline{6} \\ \overline{12} \\ \overline{0} \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} \overline{22} \\ \overline{10} \\ \overline{16} \\ \overline{4} \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} \overline{2} \\ \overline{14} \\ \overline{20} \\ \overline{8} \end{array}} \\ \varphi \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ H/H \cap N = & \boxed{\begin{array}{c} \overline{12} \\ \overline{0} \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} \overline{16} \\ \overline{4} \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} \overline{20} \\ \overline{8} \end{array}} \end{array}$$

Példa

Alkalmazzuk az első izomorfiatételt a $G = S_4$, $H = S_3$, $N = V$ szereposztással.

- $H \cap N = S_3 \cap V = \{\mathrm{id}\}$
- $H/H \cap N = S_3/\{\mathrm{id}\}$
- $HN = S_3 V = S_4$
- $HN/N = S_4/V$
- izomorfia: $S_4/V \cong S_3/\{\mathrm{id}\} \cong S_3$

Láttuk, hogy ha $H \leq G$, akkor $H\nu = HN/N \leq G/N$, és itt HN egy N-et tartalmazó részcsoportja G-nek.

Legyen most $N \leq K \leq G$. Ekkor $F := K\nu = KN/N = K/N \leq G/N$.

Fordítva, ha $F \leq G/N$, akkor $K := F\nu^{-1}$ olyan részcsoportja G-nek, ami tartalmazza N-et.

Tétel (Megfeleltetési tétel)

Ha $N \lhd G$, akkor G/N részcsoportjai kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a G csoport N-et tartalmazó részcsoportjainak. A $K \leq G$ részcsoportnak (ahol $N \leq K$) az $F := K/N \leq G/N$ részcsoport felel meg.

Tétel (II. izomorfiatétel)

Ha $K \leq G$ és $F \leq G/N$ a fentiek szerint egymásnak megfelelő részcsoportok, akkor $K \lhd G \iff F \lhd G/N$. Ha ez teljesül, akkor $(G/N)/F \cong G/K$, azaz $(G/N)/(K/N) \cong G/K$.

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] XII/5 és [F] II/12 fejezetekben található.

Definíció

A nemüres A halmaz összes permutációi alkotta S_A szimmetrikus csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 5.2. Tétel.
A következő ρ leképezés beágyazza a G csoportot az S_G szimmetrikus csoportba:

$$\rho\colon G \to S_G,\ g \mapsto \rho_g.$$

- Minden $g \in G$ esetén $\rho_g \in S_G$ (láttuk korábban, hogy ez következik a kancellativitásból és az invertálhatóságból).
- ρ injektív: $g \neq h \implies 1 \cdot g = 1\rho_g \neq 1\rho_h = 1 \cdot h \implies \rho_g \neq \rho_h$
- ρ homomorfizmus: $\rho_{gh} \stackrel{?}{=} \rho_g \circ \rho_h$
  $\forall x \in G : x\rho_{gh} = x(gh) = (xg)h = (xg)\rho_h = (x\rho_g)\rho_h = x(\rho_g \circ \rho_h)$

Legyen $H = G\rho \leq S_G$; ekkor ρ izomorfizmus G és H között. $\square$

Példa

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_6$ csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\overline{a} \in \mathbb{Z}_6$ esetén $\rho_a\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $\overline{x} \mapsto \overline{x} + \overline{a}$.

$$\rho_{\overline{0}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\rho_{\overline{1}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{2}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{2}\,\overline{4})\,(\overline{1}\,\overline{3}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{3}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{3})\,(\overline{1}\,\overline{4})\,(\overline{2}\,\overline{5})$$

$$\rho_{\overline{4}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{4} & \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{4}\,\overline{2})\,(\overline{1}\,\overline{5}\,\overline{3})$$

$$\rho_{\overline{5}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \end{pmatrix} = (\overline{0}\,\overline{5}\,\overline{4}\,\overline{3}\,\overline{2}\,\overline{1})$$

Példa

Írjuk fel az S_3 csoport Cayley-reprezentációját.

Minden $\pi \in S_3$ esetén $\rho_\pi : S_3 \to S_3$, $x \mapsto x \cdot \pi$.

$$\rho_{\mathrm{id}} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\rho_{(12)} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ (12) & \mathrm{id} & (132) & (123) & (23) & (13) \end{pmatrix}$$

$$= \big(\mathrm{id}\ (12)\big)\big((13)\ (132)\big)\big((23)\ (123)\big)$$

$$\rho_{(123)} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ (123) & (13) & (23) & (12) & (132) & \mathrm{id} \end{pmatrix}$$

$$= \big(\mathrm{id}\ (123)\ (132)\big)\big((12)\ (13)\ (23)\big)$$

$$\vdots$$

Tétel

Egy S_n-beli permutáció transzpozíciók szorzataként való felírásában a tényezők számának paritása egyértelműen meghatározott.

Biz.

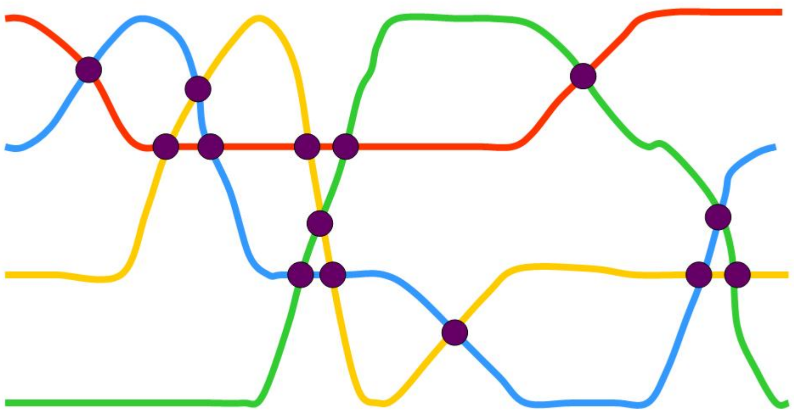
[Sz] XII/5. fejezet.
Tegyük fel, hogy

$$\tau_1\tau_2\cdots\tau_{2k+1} = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2l},$$

ahol mindegyik τ_i és σ_j transzpozíció. Ekkor az identikus permutáció előáll páratlan sok transzpozíció szorzataként:

$$\mathrm{id} = \tau_1\tau_2\cdots\tau_{2k+1}\sigma_{2l}\cdots\sigma_2\sigma_1.$$

Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen.



metszéspontok: $0 \equiv$ cserék száma $\pmod 2$

Állítás

Permutációk szorzatának a paritása a következőképpen alakul:

páros	$\cdot$	*páros*	$=$	*páros*	*páros*	$\cdot$	*páratlan*	$=$	*páratlan*
páratlan	$\cdot$	*páratlan*	$=$	*páros*	*páratlan*	$\cdot$	*páros*	$=$	*páratlan*

Biz.

Szorzáskor a permutációt előállító transzpozíciók száma összeadódik. $\square$

Következmény

A páros hosszúságú ciklusok páratlan permutációk, míg a páratlan hosszúságú ciklusok páros permutációk.

Biz.

Láttuk korábban, hogy egy k hosszúságú ciklus felírható $k-1$ transzpozíció szorzataként. $\square$

Példa
Határozzuk meg az alábbi permutációk paritását.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$: páros
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$: páratlan
- $(123)\,(4567)$: páratlan
- $(12)\,(3456)\,(78)$: páratlan
- $(12)\,(345)\,(6789)$: páros

Következmény
A páros permutációk részcsoportot (sőt, normálosztót) alkotnak S_n-ben. Ezt a csoportot n-edfokú **alternáló csoportnak** *nevezzük, és A_n-nel jelöljük.*

Biz.
Értelmezzük egy π permutáció előjelét a következőképpen:

$$\operatorname{sgn}\pi := \begin{cases} 1, & \text{ha } \pi \text{ páros;} \\ -1, & \text{ha } \pi \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ekkor $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ homomorfizmus, és magja éppen A_n.

$\square$

Következmény
$[S_n : A_n] = 2$ *és így* $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

Tétel
Az alternáló csoportot generálják a 3 hosszúságú ciklusok.

Biz.
$(ab)\,(ac) = (abc)\,, \qquad (ab)\,(cd) = (ab)\,(ac)\cdot(ac)\,(cd) = (abc)\,(acd)$ $\square$

Tétel
Ha $n \geq 5$, akkor A_n egyszerű csoport.

Megjegyzés
Ha $n = 4$, akkor A_n nem egyszerű, mert $V \lhd A_4$. Az A_3,A_2 csoportok persze egyszerűek, mert prímrendűek.

Következmény
Ha $n \neq 4$, akkor S_n egyetlen nemtriviális normálosztója A_n.

Biz.
Legyen N nemtriviális normálosztója S_n-nek ($n \neq 4$).
Ekkor $N \cap A_n \lhd A_n$, így A_n egyszerűsége miatt két eset lehetséges:

- $N \cap A_n = A_n$ esetén $A_n \leq N$, ezért $N = A_n$.
- $N \cap A_n = \{\mathrm{id}\}$ esetén $|N| = 2$, mert

  $$N \cong N/\{\mathrm{id}\} \cong N/N\cap A_n \cong NA_n/A_n = S_n/A_n.$$

  Ez viszont lehetetlen, hiszen ekkor $N \setminus \{\mathrm{id}\}$ egyelemű konjugáltosztály lenne S_n-ben. $\square$

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] X/4 és [F] II/13,14 fejezetekben található.

Definíció
Az A és B csoportok **külső direkt szorzatán** azt a csoportot értjük, melynek tartóhalmaza $A \times B$, művelete pedig a következőképpen van definiálva:
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) .$$

Állítás
Csoportok külső direkt szorzata csoport.

Biz.
Az asszociativitás világos, az egységelem $(1_A, 1_B)$, az $(a, b) \in A \times B$ elem inverze pedig $\left(a^{-1}, b^{-1}\right)$.

□

Példa
- Síkbeli vektorok az összeadás műveletével: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) ; \Delta) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Állítás
Az $A \times B$ külső direkt szorzatban az $A_1 := \{(a, 1_B) : a \in A\}$ és $B_1 := \{(1_A, b) : b \in B\}$ részcsoportokra teljesülnek a következők:

(1) $A_1, B_1 \lhd A \times B$;

(2) $A_1 \vee B_1 = A_1 B_1 = A \times B$;

(3) $A_1 \wedge B_1 = A_1 \cap B_1 = \{(1_A, 1_B)\}$.

Biz.
[F] II/13. fejezet.

□

Definíció
Azt mondjuk, hogy a G csoport az A és B részcsoportjainak **belső direkt szorzata**, ha

(1) $A, B \lhd G$;

(2) $A \vee B = AB = G$;

(3) $A \wedge B = A \cap B = \{1_G\}$.

Tétel
A G csoport az A és B részcsoportjainak belső direkt szorzata akkor és csak akkor, ha

(a) *G minden eleme előáll ab $(a \in A, b \in B)$ alakban;*

(b) *a fenti előállítás egyértelmű;*

(c) $\forall a \in A \, \forall b \in B : \; ab = ba$.

Biz.
[F] II/13. fejezet.

□

Tétel
A külső és a belső direkt szorzat „lényegében" ugyanaz:
$$G \cong A \times_k B \iff \exists A_1, B_1 \leq G : \; A_1 \cong A, \; B_1 \cong B \text{ és } G = A_1 \times_b B_1 .$$

Biz.
[F] II/13. fejezet.

□

Definíció
Azt mondjuk, hogy a G csoport az $A_1, \ldots, A_n$ részcsoportjainak **belső direkt szorzata**, ha

(1) $A_1, \ldots, A_n \lhd G$;

(2) $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n = G$;

(3) $A_i \cap (A_1 \cdot \ldots \cdot A_{i-1} \cdot A_{i+1} \cdot \ldots \cdot A_n) = \{1_G\}$ minden i-re.

Tétel
A G csoport az $A_1, \ldots, A_n$ részcsoportjainak belső direkt szorzata akkor és csak akkor, ha

(a) *G minden eleme előáll $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ $(a_i \in A_i)$ alakban;*

(b) *a fenti előállítás egyértelmű;*

(c) $\forall a_i \in A_i \, \forall a_j \in A_j : \; a_i a_j = a_j a_i$ *minden $i \neq j$ esetén.*

Tétel
Ha n és m relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.
[Sz] X/4.5. Tétel. (gyűrűkre, kínai maradéktétel segítségével)

Egy másik bizonyítás: megfigyeltük, hogy $\mathbb{Z}_\ell$ részcsoporthálója (azaz normálosztóhálója) éppen a D_k hálónak (k osztói oszthatóság szerint rendezve) a „fejreállítottja” (hivatalosan: duálisa). Minden részcsoport előáll $[\overline{a}]$ alakban (ahol $a \mid \ell$),és

$$[\overline{a}] \wedge [\overline{b}] = \left[\overline{\mathrm{lkkt}\,(a,b)}\right], \qquad [\overline{a}] \vee [\overline{b}] = \left[\overline{\mathrm{lnko}\,(a,b)}\right].$$

Tegyük fel, hogy $\mathrm{lnko}\,(m,n) = 1$, és legyen $\ell = nm$, $a = n$, $b = m$. Ekkor

$$[\overline{a}] \wedge [\overline{b}] = \left[\overline{\mathrm{lkkt}\,(n,m)}\right] = [\overline{nm}] = [\overline{0}], \quad [\overline{a}] \vee [\overline{b}] = \left[\overline{\mathrm{lnko}\,(n,m)}\right] = [\overline{1}] = \mathbb{Z}_{nm}.$$

Tehát $\mathbb{Z}_{nm}$ az $[\overline{n}]$ és $[\overline{m}]$ részcsoportok belső direkt szorzata, és $[\overline{n}] \cong \mathbb{Z}_m$, $[\overline{m}] \cong \mathbb{Z}_n$. □

Következmény
Ha n prímhatványtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}}.$$

Biz.
$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}} \cong \cdots \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

□

Állítás
Ha n és m nem relatív prímek, akkor $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \ncong \mathbb{Z}_{nm}$.

Biz.
Legyen $d = \mathrm{lnko}\,(n,m) > 1$; ekkor $\mathrm{lkkt}\,(n,m) = \frac{nm}{d} < nm$.
Tetszőleges $(\overline{a},\overline{b}) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ elemre

$$\frac{nm}{d}\left(\overline{a},\overline{b}\right) = \left(\frac{m}{d}\cdot n\overline{a}, \frac{n}{d}\cdot m\overline{b}\right) = \left(\overline{0},\overline{0}\right),$$

ezért $(\overline{a},\overline{b})$ rendje legfeljebb $\mathrm{lkkt}\,(n,m)$.
Tehát $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ nem tartalmaz nm-ed rendű elemet, így nem is ciklikus. □

Tétel (Véges Abel-csoportok alaptétele)
Minden véges Abel-csoport felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára. Ez a felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű.

Példa
Határozzuk meg az összes n-elemű Abel-csoportot (izomorfia erejéig).

- $n = 4$: $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 8$: $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 10$: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ (izomorf $\mathbb{Z}_{10}$-zel)
- $n = 16$: $\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $n = 100$: $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

Példa
Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2$?
Az alaptétel szerinti „kanonikus” felbontások:

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \quad \text{és} \quad \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2.$$

Ezek csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát izomorfak.

Példa
Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$?
Az alaptétel szerinti „kanonikus” felbontások:

$$\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \text{ és } \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4.$$

Ezek nem csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát nem izomorfak (az alaptétel unicitási része szerint).

Másik megoldás: nem izomorfak, mert $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$-ben van negyedrendű elem, például $(\overline{0},\overline{3})$, míg $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6$-ban nincs negyedrendű elem (miért?).

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{21}^* \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$?

Nem, mert $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$, de $\mathbb{Z}_{21}^*$ nem ciklikus.

(Másik megoldás: meghatároztuk $\mathbb{Z}_{21}^*$ összes részcsoportját, és nem volt közöttük 4-elemű.)

Példa

Igaz-e, hogy $\mathbb{Z}_{25}^* \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$?

Igen, mert $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{20}$, és $\mathbb{Z}_{25}^*$ valóban 20-elemű ciklikus csoport.

Példa

Igaz-e, hogy $D_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$?

Nem, mert $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ kommutatív, de D_4 nem az.

Példa

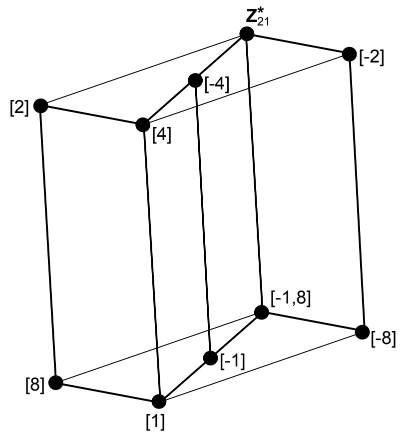
Igaz-e, hogy $V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?

Igen, $V = A \times_{\mathrm{b}} B$, ahol $A = \{\mathrm{id}, (12)(34)\}$ és $B = \{\mathrm{id}, (13)(24)\}$

Példa

Direkt felbontható-e a $\mathbb{Z}_{21}^*$ csoport?

A válasz leolvasható a normálosztóhálóról:

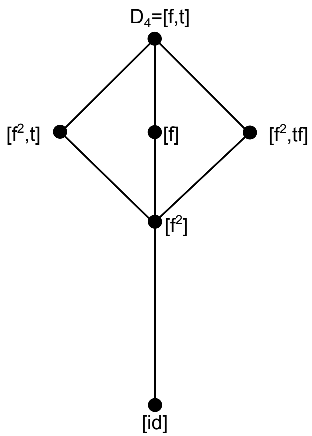


Legyen $A = \left[\overline{2}\right]$ és $B = \left[\overline{-8}\right]$. Ekkor $A \wedge B = \left[\overline{1}\right] = \left\{\overline{1}\right\}$ és $A \vee B = \mathbb{Z}_{21}^*$, tehát $\mathbb{Z}_{21}^* = A \times_{\mathrm{b}} B \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$.

Példa

Direkt felbontható-e a D_4 csoport?

A válasz leolvasható a normálosztóhálóról:



Nincs két nemtriviális normálosztó, melyek metszete $\{\mathrm{id}\}$ lenne, ezért D_4 direkt felbonthatatlan.

Példa

Direkt felbontható-e a $\mathbb{C}^*$ csoport?

Igen $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^+ \times_{\mathrm{b}} T$, hiszen minden nemnulla z komplex szám felírható egy pozitív valós szám és egy egységnyi abszolút értékű komplex szám szorzataként:

$$z = |z| (\cos \arg z + i \sin \arg z),$$

és ez a felírás egyértelmű.