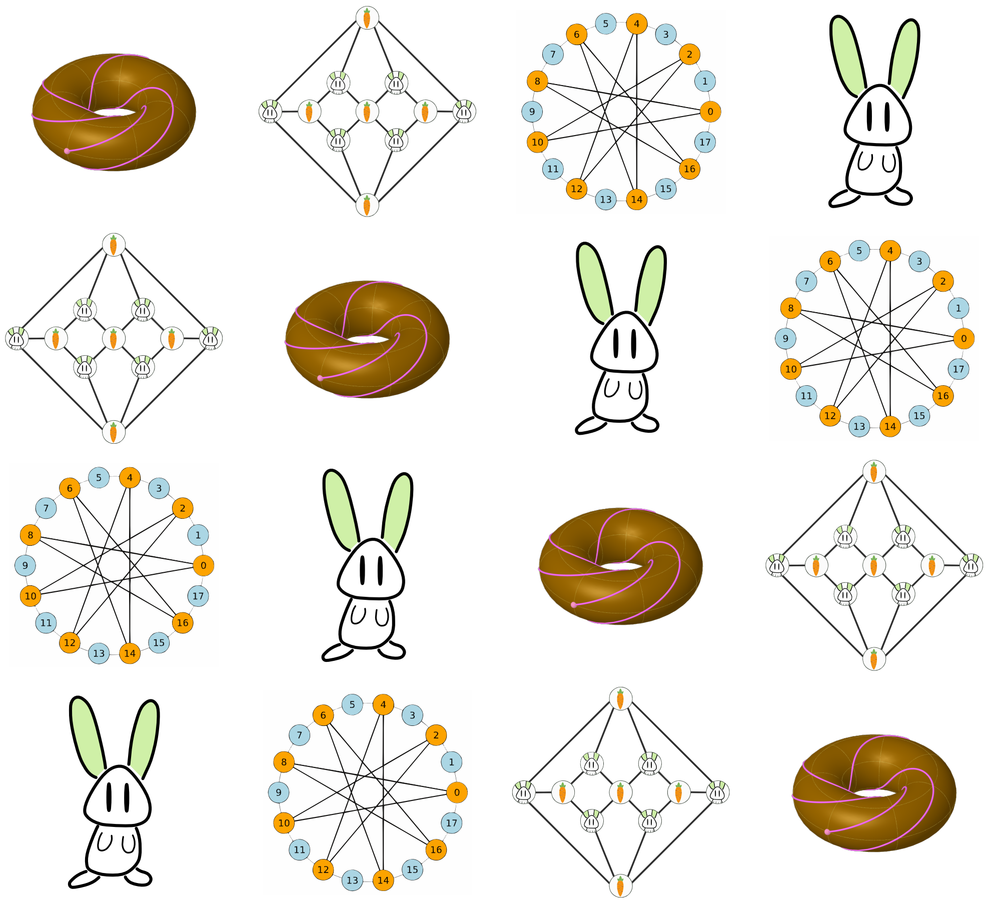
DISZKRÉT MATEMATIKA II

feladatgyűjtemény



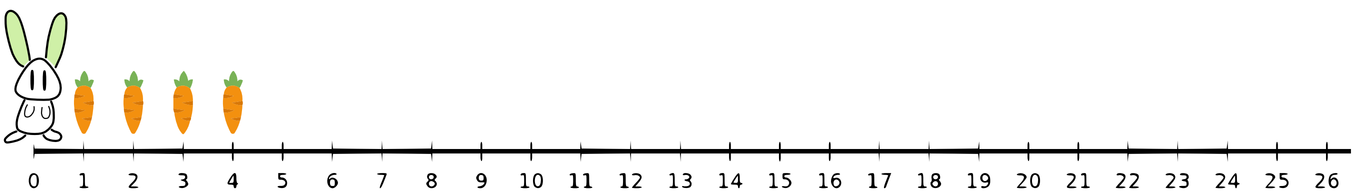
A feladatgyűjteményt az SZTE Bolyai Intézete Algebra és Számelmélet Tanszékének volt és jelenlegi tagjai által évek alatt készített és összegyűjtött feladatokból Waldhauser Tamás állította össze. A feladatokhoz tartozó videókat

Kátai-Urbán Kamilla	Maróti Miklós	Tóth Endre
Kulin Júlia	Szilák Zsófia	Varga Kristóf
Kunos Ádám	Torma Gábor	Waldhauser Tamás

készítette.

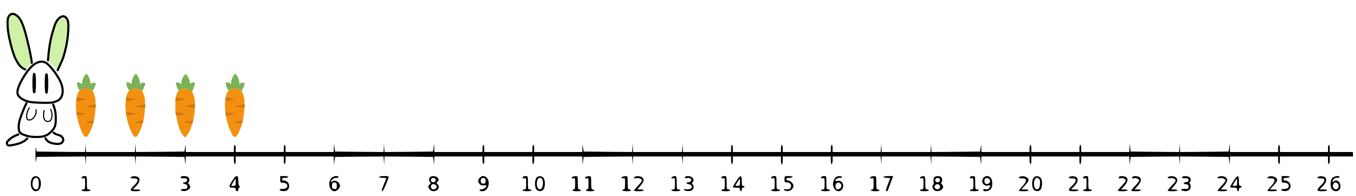
- Minden feladat sorszáma egy link, ami hátra, a feladat végeredményéhez vezet. Onnan ismét a feladat sorszámára kattintva lehet visszajutni a feladathoz.
- A csillagos feladatok nem részei a kötelező tananyagnak, de az érdeklődőbb hallgatók figyelmébe ajánljuk őket.
- A kamera azt jelzi, hogy ehhez a feladathoz van videó; a link hátul, a végereménynél található.

Tartalomjegyzék



nyuszi: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Conejo.svg

Tartalomjegyzék



répa: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Twemoji2_1f955.svg

FELADATOK

1. Számelmélet

1.1. Oszthatóság, legnagyobb közös osztó, euklideszi algoritmus

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

- https://youtu.be/3rAs_gBBHxU (oszthatság, prímszámok)
- https://youtu.be/mPigchEMSEk (legnagyobb közös osztó, euklideszi algoritmus)

1.1. feladat. Határozzuk meg mindazon x egész számok halmazát, amelyekre teljesülnek az alábbi feltételek.

(a) $28 \mid 36x$

(b) $140 \mid x$ és $84 \mid x$

(c) $144 \mid 108x$

(d) $x \mid 112$ és $x \mid 84$

1.2. feladat. Határozzuk meg mindazon x egész számok halmazát, amelyekre teljesülnek az alábbi feltételek.

(a) $105 \mid 45x$

(b) $88 \mid x$ és $66 \mid x$

(c) $x \mid 126$ és $x \mid 54$

(d) $75 \mid x$ és $60 \mid x$

(e) $x \mid 132$ és $x \mid 99$

1.3. feladat. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek pontosan 12 darab pozitív osztója van?

Kidolgozott feladat.

Határozzuk meg euklideszi algoritmussal 302 és 112 legnagyobb közös osztóját, és fejezzük ki $302u + 112v$ alakban (alkalmas u, v egész számokkal).

Megoldás. Használjuk az $a = 302$, $b = 112$ jelölést, és fejezzük ki az euklideszi algoritmus minden lépésénél a maradékot a és b segítségével:

$$
\begin{array}{rcl@{\quad}c@{\quad}rcl@{\quad}c@{\quad}l@{\quad}c@{\quad}l}
302 &=& 2\cdot 112 + 78 & \Longrightarrow & 78 &=& 302 - 2\cdot 112 & & & = & a - 2b \\
112 &=& 1\cdot 78 + 34 & \Longrightarrow & 34 &=& 112 - 78 & = & b - (a-2b) & = & -a + 3b \\
78 &=& 2\cdot 34 + 10 & \Longrightarrow & 10 &=& 78 - 2\cdot 34 & = & (a-2b) - 2(-a+3b) & = & 3a - 8b \\
34 &=& 3\cdot 10 + 4 & \Longrightarrow & 4 &=& 34 - 3\cdot 10 & = & (-a+3b) - 3(3a-8b) & = & -10a + 27b \\
10 &=& 2\cdot 4 + 2 & \Longrightarrow & 2 &=& 10 - 2\cdot 4 & = & (3a-8b) - 2(-10a+27b) & = & 23a - 62b \\
4 &=& 2\cdot 2 + 0 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Tehát $\mathrm{lnko}(a, b) = 2$, és ez így fejezhető ki a és b segítségével: $2 = 23a - 62b$, azaz $u = 23, v = -62$.

Az alábbi linken a számítógép még bármennyiszer türelmesen elmagyarázza az euklideszi algoritmust, lépésről lépésre: http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2021tavasz/euklideszialg.html

1.4. feladat. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját, és fejezzük ki $\mathrm{lnko}(a, b) = au + bv$ alakban (alkalmas u, v egész számokkal), majd adjuk meg a és b legkisebb közös többszörösét is.

(a) $a = 36$, $b = 28$

(b) $a = 78$, $b = 30$

(c) $a = -1253$, $b = -3241$

1.5. feladat. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját, és fejezzük ki $\mathrm{lnko}(a, b) = au + bv$ alakban (alkalmas u, v egész számokkal), majd adjuk meg a és b legkisebb közös többszörösét is.

(a) $a = 48$, $b = 34$

(b) $a = 368$, $b = 161$

(c) $a = 539$, $b = 1001$

(d) $a = -1183$, $b = 1573$

1.6. feladat. Melyek azok a z komplex számok, amelyekre $z^{100} = 1$ és $z^{76} = 1$ egyszerre teljesül?

1.2. Lineáris diofantoszi egyenletek

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

☞ https://youtu.be/Ouz2jiwxJeg

Kidolgozott feladat.

Oldjuk meg a $6x + 9y = 15$ diofantoszi egyenletet.

Megoldás. Hajtsuk végre az euklideszi algoritmust a 6 és 9 számokra:

$$\begin{aligned} 9 &= 1\cdot 6+3 \implies 3 = 9-6 \\ 6 &= 2\cdot 3+0 \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy $\text{lnko}(6, 9) = 3$ (ezt persze láthattuk volna ránézésre is), és az lnko így fejezhető ki 6 és 9 segítségével: $3 = 9 - 6$. Mivel nekünk nem 3-at, hanem 15-öt kell megkapnunk $6x + 9y$ alakban, szorozzunk be 5-tel, és alakítsuk $6x + 9y$ alakúra a kifejezést, hogy könnyebben leolvashassuk a megoldást:

$$15 = 5 \cdot (9 - 6) = 6 \cdot (-5) + 9 \cdot 5.$$

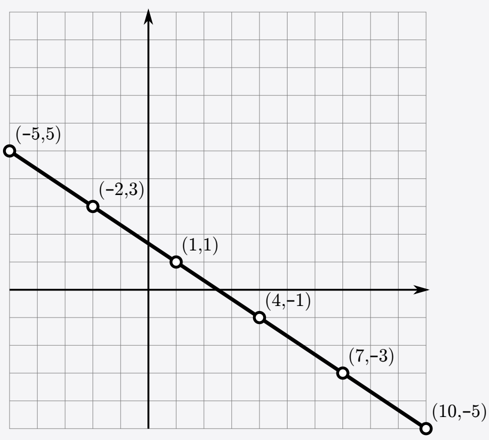
Innen látható, hogy $x_0 = -5$, $y_0 = 5$ egy megoldása az egyenletnek (partikuláris megoldás).
Hogy a többi megoldást is megkapjuk, ábrázoljuk a $6x + 9y = 15$ egyenletű egyenest, és nézzük meg, hogy milyen rácspontokon halad át. Ehhez rendezzük y-ra az egyenletet:

$$y = \frac{15-6x}{9} = \frac{15}{9} - \frac{6}{9}x = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x.$$

(Fontos, hogy a törteket egyszerűsítsük, amennyire csak lehet, különben a megoldások egy részét elveszítjük!) Tehát az egyenesünk meredeksége $-\frac{2}{3}$, és fent már kiszámoltuk, hogy átmegy az $(x_0, y_0) = (-5, 5)$ ponton. Ezért ebből a pontból „jobbra 3-at, lefele 2-t”, illetve „balra 3-at, fölfele 2-t” lépésekkel megkapjuk az összes rácsopontot az egyenesen, vagyis az egyenlet összes egész megoldását.

Az $(x_0, y_0) = (-5, 5)$ ponttól jobbra a t-edik rácspontot úgy kapjuk meg, hogy $3t$ egységet lépünk jobbra, és $2t$ egységet lépünk lefelé. Így az $(x_0 + 3t,\ y_0 - 2t)$ számpárt kapjuk, és ha itt negatív t értékeket is megengedünk, akkor megkapjuk az (x_0, y_0) ponttól balra lévő megoldásokat is. A diofantoszi egyenlet általános megoldása tehát

$$\begin{aligned} x_t &= x_0 + 3t = -5 + 3t \\ y_t &= y_0 - 2t = 5 - 2t \end{aligned} \qquad (t \in \mathbb{Z}).$$



Ez azt jelenti, hogy az egyenlet megoldáshalmaza az alábbi végtelen számpárhalmaz:

$$\begin{aligned} M &= \{\, (x_t, y_t) : t \in \mathbb{Z} \,\} = \\ &= \{\, (-5 + 3t,\ 5 - 2t) : t \in \mathbb{Z} \,\} = \\ &= \{\, \dots, (-11, 9), (-8, 7), (-5, 5), (-2, 3), (1, 1), \dots \,\}. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Utólag könnyű okosnak lenni: az $(1, 1)$ megoldást észrevehettük volna mindenféle számolás nélkül. Ha ezt tekintenénk kiindulópontnak (partikuláris megoldásnak), akkor az általános megoldás így festene:

$$\begin{aligned} x_t &= 1 + 3t \\ y_t &= 1 - 2t \end{aligned} \qquad (t \in \mathbb{Z}).$$

Ez látszólag különbözik attól, amit fent kaptunk, de valójában ekvivalens vele, mert ugyanazt a végtelen számpárhalmazt írja le, amint a t paraméter befutja az egész számok halmazát. Mindössze annyi a különbség, hogy a t paraméterek 2-vel el vannak csúszva, pl. a $(7, -3)$ megoldás fent $t = 4$ esetén jön ki, itt pedig $t = 2$ esetén (és hasonlóan az összes többi megoldásra).

Kidolgozott feladat.

Oldjuk meg a $6x - 9y = 15$ diofantoszi egyenletet.

Megoldás. Az előző feladatban kapott rendkívül bonyolult $3 = 9 - 6$ összefüggést megint 5-tel szorozzuk, de most úgy alakítjuk, hogy $6x - 9y$ alakú legyen:

$$15 = 5 \cdot (9 - 6) = 6 \cdot (-5) - 9 \cdot (-5).$$

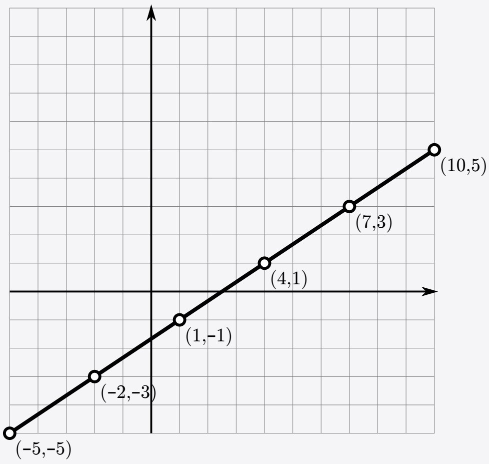
Innen látható, hogy $x_0 = -5$, $y_0 = -5$ jó lesz partikuláris megoldásnak. (Itt nagyon kell vigyázni az előjelekre, mert könnyű elrontani! A biztonság kedvéért ellenőrizzük a megoldást: $6x_0 - 9y_0 = 6 \cdot (-5) - 9 \cdot (-5) = -30 - (-45) = -30 + 45 = 15$. ✓)
Rendezzük az egyenletet úgy, hogy le tudjuk olvasni az egyenes meredekségét:

$$y = \frac{15 - 6x}{-9} = -\frac{15}{9} + \frac{6}{9}x = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}x.$$

Tehát az egyenesünk meredeksége $\frac{2}{3}$, ezért a fent kiszámolt $(-5, -5)$ pontból „jobbra 3-at, fölfele 2-t” illetve „balra 3-at, lefele 2-t” lépésekkel megkapjuk az összes rácsopontot az egyenesen, vagyis az egyenlet összes egész megoldását.

Az $(x_0, y_0) = (-5, -5)$ ponttól jobbra a t-edik rácspontot úgy kapjuk meg, hogy $3t$ egységet lépünk jobbra, és $2t$ egységet lépünk fölfelé. Így az $(x_0 + 3t,\ y_0 + 2t)$ számpárt kapjuk, és ha itt negatív t értékeket is megengedünk, akkor megkapjuk az (x_0, y_0) ponttól balra lévő megoldásokat is. A diofantoszi egyenlet általános megoldása tehát

$$\begin{aligned} x_t &= x_0 + 3t = -5 + 3t \\ y_t &= y_0 + 2t = -5 + 2t \end{aligned} \qquad (t \in \mathbb{Z}).$$



A változatosság kedvéért most táblázatban is megadjuk a megoldáshalmazt alkotó számpárokat:

t	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
x_t	$\cdots$	-14	-11	-8	-5	-2	1	4	7	$\cdots$
y_t	$\cdots$	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	$\cdots$

Figyeljük meg, hogy balról jobbra haladva az x értékek hármasával nőnek, az y értékek pedig kettesével.

Kidolgozott feladat.

Oldjuk meg a $150x - 54y = 18$ diofantoszi egyenletet.

Megoldás. Hajtsuk végre az euklideszi algoritmust a 150 és 54 számokra, és használjuk az $a = 150$ és $b = -54$ jelölést (kicsit kellemetlen, hogy b negatív, de ezzel a jelöléssel lesz az egyenletünk a tanult $ax + by = c$ alakú, és így könnyebb lesz felírni az általános megoldást):

$$\begin{array}{rclcl}
150 &=& 2\cdot 54 &+& 42 & \Longrightarrow & 42 &=& 150-2\cdot 54 & & & = & a+2b \\
54 &=& 1\cdot 42 &+& 12 & \Longrightarrow & 12 &=& 54-42 &=& -b-(a+2b) & = & -a-3b \\
42 &=& 3\cdot 12 &+& 6 & \Longrightarrow & 6 &=& 42-3\cdot 12 &=& (a+2b)-3(-a-3b) & = & 4a+11b \\
12 &=& 2\cdot 6 &+& 0 & & & & & & & &
\end{array}$$

Tehát $\mathrm{lnko}(a, b) = 6$, és ez így fejezhető ki a és b „lineáris kombinációjaként”: $6 = 4a + 11b$. Szorozzunk 3-mal, hogy megkapjuk 18-at is $ax + by$ alakban:

$$18 = 3 \cdot (4a + 11b) = 12a + 33b.$$

Innen látható, hogy $x_0 = 12$, $y_0 = 33$ egy megoldása az egyenletnek. (Célszerű visszahelyettesítéssel ellenőrizni!)
Írjuk fel az általános megoldás képletét:

$$\begin{aligned}
x_t &= x_0 + \frac{b}{\mathrm{lnko}(a,b)} \cdot t = x_0 + \frac{-54}{6} \cdot t = 12 - 9t \\
y_t &= y_0 - \frac{a}{\mathrm{lnko}(a,b)} \cdot t = y_0 - \frac{150}{6} \cdot t = 33 - 25t
\end{aligned} \qquad (t \in \mathbb{Z}).$$

Vigyázat: az általános megoldásra tanult képletben a t paramétert tartalmazó tagok egyike előtt $+$, másika előtt $-$ szerepel, de mivel $a = 150$ és $b = -54$ ellentétes előjelűek, végül egyforma előjelűek lettek a tagok. Ezt könnyű eltéveszteni, ezért célszerű ábrázolni, vagy legalább elképzelni az egyenest (pozitív a meredeksége, ezért x és y együtt csökken, együtt növekszik) vagy pedig visszahelyettesíteni az egyenletbe (a t paramétert tartalmazó tagoknak mindenképp ki kell ejteniük egymást).

Megjegyzés. Az $x_t = 12 + 9t$, $y_t = 33 + 25t$ $(t \in \mathbb{Z})$ általános megoldás is jó (és szebb is!), ez csak annyiban különbözik a fentitől, hogy nem jobbról balra, hanem balról jobbra indexezzük az egyenesen lévő rácspontokat. Helyes (és még szebb!) az $x_t = 3 + 9t$, $y_t = 8 + 25t$ $(t \in \mathbb{Z})$ általános megoldás is. (Végtelen sok rácspont van az egyenesen, és ezek bármelyikét választhatjuk partikuláris megoldásnak, ezért végtelen sokféleképpen fel lehet írni az általános megoldást.)

Kidolgozott feladat.

Oldjuk meg az $51x - 21y = 6$ diofantoszi egyenletet.

Megoldás. Az euklideszi algoritmusból azt kapjuk, hogy $\mathrm{lnko}(51, 21) = 3 = -2 \cdot 51 + 5 \cdot 21$. Beszorzunk 2-vel, és a jobb oldalt úgy alakítjuk, hogy $51x - 21y$ alakú legyen: $6 = 51 \cdot (-4) - 21 \cdot (-10)$. Ebből leolvasható egy megoldás: $x_0 = -4$, $y_0 = -10$. Az általános megoldás tehát

$$x_t = -4 + 7t,\ y_t = -10 + 17t \quad (t \in \mathbb{Z}).$$

Természetesen jó megoldás az is, hogy $x_t = -4 - 7t$, $y_t = -10 - 17t$ $(t \in \mathbb{Z})$ és $x_t = 3 + 7t$, $y_t = 7 + 17t$ $(t \in \mathbb{Z})$ is helyes.

1.7. feladat. Oldjuk meg az alábbi diofantoszi egyenleteket.

(a) $72x + 60y = 24$

(b) $21x - 15y = 12$

1.8. feladat. Oldjuk meg az alábbi diofantoszi egyenleteket.

(a) $48x + 34y = 20$

(b) $78x + 30y = 12$

(c) $18x + 21y = 9$

(d) $21x + 36y = 12$

(e) $6x - 10y = 22$

(f) $237x + 571y = 13$

(g) $197x + 418y = 17$

(h) $2021x + 1739y = 4750$

Kidolgozott feladat.

Soroljuk fel a $H = \big\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z})(32x - 14y = 6) \text{ és } 10 \le y \le 50\big\}$ halmaz elemeit.

Megoldás. Először írjuk fel a $32x - 14y = 6$ diofantoszi egyenlet általános megoldását, aztán majd kiválogatjuk a 10 és 50 közé eső y értékeket. Az euklideszi algoritmusból azt kapjuk, hogy $\text{lnko}(32, 14) = 2 = -3 \cdot 32 + 7 \cdot 14$. Beszorzunk 3-mal, és a jobb oldalt úgy alakítjuk, hogy $32x - 14y$ alakú legyen: $6 = 32 \cdot (-9) - 14 \cdot (-21)$. Ebből leolvasható egy megoldás: $x_0 = -9$, $y_0 = -21$. Az általános megoldás tehát

$$x_t = -9 + 7t,\ y_t = -21 + 16t \quad (t \in \mathbb{Z}).$$

A $10 \le y_t \le 50$ feltétel szerint $10 \le -21 + 16t \le 50$, amiből rendezés után azt kapjuk, hogy $\frac{31}{16} \le t \le \frac{71}{16}$. Mivel t egész szám, csak a $t = 2, 3, 4$ értékek jönnek szóba, így $H = \{y_2, y_3, y_4\} = \{11, 27, 43\}$.

Megjegyzés. Megúszhatjuk az egyenlőtlenségek megoldását, ha elkészítjük a megoldások táblázatát:

t	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
x_t	$\cdots$	-16	-9	-2	5	12	19	26	33	$\cdots$
y_t	$\cdots$	-37	-21	-5	11	27	43	59	75	$\cdots$

Innen is kiolvasható, hogy a 10 és 50 közé eső y értékek: 11, 27, 43.

1.9. feladat. Határozzuk meg az $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(11x - 8y = 3) \text{ és } 10 \le x \le 30\}$ halmaz elemszámát.

1.10. feladat. Határozzuk meg a következő halmazok elemszámát.

(a) $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(75x - 27y = 15) \text{ és } 30 \le x \le 60\}$

(b) $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(7x - 3y = 13) \text{ és } 10 \le x \le 30\}$

(c) $\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z})(7x - 19y = 10) \text{ és } 15 \le y \le 35)\}$

(d) $\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z})(13x - 20y = 7) \text{ és } 20 \le y \le 40)\}$

Kidolgozott feladat.

Vettem izéket és bigyókat, összesen 400 forintért. Az izének 36 forintba, a bigyónak pedig 28 forintba kerül darabja. Hány izét és hány bigyót vettem? Az összes lehetséges megoldást keressük meg!

Megoldás. Az izék számát x-szel, a bigyók számát y-nal jelölve a $36x + 28y = 400$ egyenletet írhatjuk fel, melynek a pozitív egész megoldásait keressük. Hajtsuk végre az euklideszi algoritmust az $a = 36$ és $b = 28$ számokra:

$$\begin{array}{rclcl}
36 &=& 1\cdot 28 &+& 8 & \Longrightarrow & 8 &=& 36-28 & & &=& a-b\\
28 &=& 3\cdot\ 8 &+& 4 & \Longrightarrow & 4 &=& 28-3\cdot 8 &=& b-3(a-b) &=& -3a+4b\\
8 &=& 2\cdot\ 4 &+& 0
\end{array}$$

Tehát $\operatorname{lnko}(a,b) = 4$, és ez így fejezhető ki a és b „lineáris kombinációjaként”: $4 = -3a + 4b$. Mindkét oldalt 100-zal szorozva kapjuk, hogy $-300a + 400b = 400$, vagyis $x_0 = -300$, $y_0 = 400$ egy partikuláris megoldása az egyenletünknek. A diofantoszi egyenlet általános megoldása:

$$x_t = -300 + 7t,\ y_t = 400 - 9t \quad (t \in \mathbb{Z}).$$

Keressük meg a pozitív megoldásokat:

$$x_t > 0 \iff t > \frac{300}{7} = 42{,}8\ldots \iff t \geq 43,$$
$$y_t > 0 \iff t < \frac{400}{9} = 44{,}4\ldots \iff t \leq 44.$$

Csak $t = 43$ és $t = 44$ esetén lesz x és y is pozitív, vagyis a pozitív megoldások a következők:

$$x_{43} = 1,\ y_{43} = 13 \quad \text{és} \quad x_{44} = 8,\ y_{44} = 4.$$

Tehát két megoldás van: vagy 1 izét és 13 bigyót vettem, vagy pedig 8 izét és 4 bigyót.

Megjegyzés. A diofantoszi egyenlet megoldásait táblázatba is foglalhatjuk, innen is kiolvashatók a pozitív megoldások:

t	$\cdots$	-1	0	1	2	$\cdots$	42	43	44	45	$\cdots$
x_t	$\cdots$	-307	-300	-293	-286	$\cdots$	-6	1	8	15	$\cdots$
y_t	$\cdots$	409	400	391	382	$\cdots$	22	13	4	-5	$\cdots$

1.11. feladat. Kukutyinban 20 és 45 petákos érmék vannak forgalomban. Hogyan lehet ezekre felváltani 245 petákot? (Az összes megoldást adjuk meg.)

1.12. feladat. Az alábbi linken elérhető játékban egy nyúl ugrál a számegyenesen a 0-ból indulva. Kétféle ugrásra képes, amelyek hossza a, illetve b egység.
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2021tavasz/nyul-szamegyenes.html

(a) Ha $a = 36$ és $b = 28$, akkor az $1, 2, 3, 4$ számoknál lévő répák közül melyeket tudja megenni?

(b) Ha $a = 36$ és $b = 28$, akkor hogyan jut el a lehető legkevesebb ugrással 12-be?

1.13. feladat. Az előző feladatbeli nyúl $a = 26$ és $b = 38$ esetén hogyan tud eljutni a lehető legkevesebb ugrással 1000-be úgy, hogy mindig csak előre (jobbra) haladhat? És ha szabad visszafelé (balra) is ugrania?

1.14. feladat. Hogyan lehet egy 21 centiméteres és egy 25 centiméteres mérőrúd segítségével kimérni 2 centimétert?

1.15. feladat. Gombóc Artúrt születésnapja alkalmából Föld körüli útra fizették be a barátai, és az útra ellátták 15 láda csokoládéval. Minden ládában pont annyi csoki volt, ahány éves Gombóc Artúr. Naponta 54 csokoládét evett meg, így még egy hétig sem tartott ki az ellátmány, és az utolsó napra már csak 39 csoki maradt (mármint az utolsó olyan napra, amelyikre még jutott egyáltalán csoki). Hány éves Gombóc Artúr?

1.16. feladat. Kati néni az utolsó tanítási napon megajándékozta a 2.d osztály 30 nebulóját: mindenki választhatott, hogy csokit vagy rágót kér. A csoki 69 Ft-tal drágább, mint a rágó, ezért Kati néni örült, hogy a gyerekek több mint fele rágót kért. Így is 2094 forintja bánja az ajándékozást. Mennyibe került a rágó, illetve a csoki, és melyiket hány gyerek választotta?

1.17. feladat. Háromféle bélyeget vásároltunk. Az első alkalommal az egyes fajtákból rendre 3, 5 és 7 darabot, a második alkalommal 11, 13 és 9 darabot. A számla első alkalommal 110 Ft, a második alkalommal 250 Ft volt. Milyen címletű bélyegeket vásároltunk?

1.18. feladat. Valaki a következőket mondta: „A barátnőm 22. születésnapjára 22 szál virágból álló csokrot vettem 2000 forintért. A csokor fréziából, nárciszból és rózsából állt, amelyekből egy szál 50 forintba, 70 forintba, illetve 130 forintba került" Hány szál virágot tartalmazott az egyes fajtákból a csokor, ha azt is tudjuk, hogy mindegyikből legalább két szál volt, és semelyik kettőből sem volt ugyanannyi?

1.19. feladat. Egy 5 m hosszú kerítés szegélyének elkészítéséhez 15 cm, 20 cm és 93 cm hosszúságú lécek állnak rendelkezésünkre. Az egyes lécfajták felszegeléséhez rendre 2, 3 és 9 szög kell. Mennyire van szükségünk a lécekből, ha 50 szegünk van, és ezeket mind fel is akarjuk használni?

1.3. A modulo m kongruenciareláció

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

https://youtu.be/_-h76rgIvgg

Kidolgozott feladat.

Mit ad maradékul 24-gyel osztva 242^{2023}?

Megoldás. A hatvány alapját csökkenthetjük, ha megfigyeljük, hogy $242 \equiv 2 \pmod{24}$, és ebből következik, hogy $242^{2023} \equiv 2^{2023} \pmod{24}$. Még 2^{2023} is túl nagy szám ahhoz, hogy kedvünk legyen kiszámolni, de írjuk fel 2 első néhány hatványának modulo 24 maradékát, hátha észreveszünk valami szabályszerűséget:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$2^k \bmod 24$	1	2	4	8	16	8	16	8	16	8	16	$\cdots$

A maradékok az első három tag után kettesével ismétlődnek: ha $k \geq 3$ páratlan szám, akkor $2^k \equiv 8 \pmod{24}$, ha pedig $k \geq 3$ páros szám, akkor $2^k \equiv 16 \pmod{24}$. Mivel 2023 páratlan (és persze $2023 \geq 3$), azt kapjuk, hogy

$$242^{2023} \equiv 2^{2023} \equiv 8 \pmod{24}.$$

Megjegyzés. A táblázat kitöltése során mindig a legutoljára kiszámolt érték dupláját, pontosabban annak a modulo 24 maradékát kell venni (hiszen $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$). Például a kilences oszlopban nem kell kiszámolni, hogy $2^9 = 512$, és hogy ez 8-at ad maradékul 24-gyel osztva; elég csak az előző számot (a nyolcas oszlopbeli 16-ost) megszorozni kettővel: $16 \cdot 2 = 32 \equiv 8 \pmod{24}$. Ebből a számolási módból látszik, hogy az empirikusan megfigyelt szabályszerűség valóban minden $k \geq 3$ esetén teljesül. Ezt persze be is lehetne (sőt, illene!) bizonyítani, például teljes indukcióval, de ettől most eltekintünk. Azt is be lehet(ne) bizonyítani, hogy akármilyen számot hatványozunk, és akármilyen modulus szerint vesszük a maradékokat, a sorozat egy véges „bevezető szakasz" után mindig periodikussá válik.

Kidolgozott feladat.

Mit ad maradékul 28-cal osztva 873^{2002}?

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan, először a hatvány alapját csökkentjük: $873 \equiv 5 \pmod{28}$, ezért $873^{2002} \equiv 5^{2002} \pmod{28}$. Készítsük el 5 hatványai modulo 28 maradékainak táblázatát, és reménykedjünk...

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	$\cdots$
$5^k \bmod 28$	1	5	25	13	9	17	1	5	25	13	9	17	1	5	25	13	9	17	$\cdots$

(Egy trükk: érdemes a legkisebb nemnegatív maradék helyett a legkisebb abszolút értékű maradékkal számolni. Például $5^2 \equiv 25 \equiv -3 \pmod{28}$, ezért $5^3 \equiv 5 \cdot (-3) \equiv -15 \equiv 13 \pmod{28}$. Így az egész számolást meg lehet úszni kétjegyű számokkal.) A maradékok már a legelejétől kezdve hatosával ismétlődnek. Ezért 5^k modulo 28 maradéka csak attól függ, hogy a k kitevő mit ad maradékul 6-tal osztva:

$$\begin{aligned}
k \equiv 0 \pmod{6} &\implies 5^k \equiv 1 \pmod{28}\\
k \equiv 1 \pmod{6} &\implies 5^k \equiv 5 \pmod{28}\\
k \equiv 2 \pmod{6} &\implies 5^k \equiv 25 \pmod{28}\\
k \equiv 3 \pmod{6} &\implies 5^k \equiv 13 \pmod{28}\\
k \equiv 4 \pmod{6} &\implies 5^k \equiv 9 \pmod{28}\\
k \equiv 5 \pmod{6} &\implies 5^k \equiv 17 \pmod{28}
\end{aligned}$$

Nekünk a $k = 2002$ esetre van szükségünk: $2002 \equiv 4 \pmod{6}$, ezért $5^{2002} \equiv 9 \pmod{28}$.

Megjegyzés. Ha a hatvány alapja és a modulus relatív prím (mint a mi példánkban: $\text{lnko}(5, 28) = 1$), akkor a sorozat mindig már a legelejétől kezdve periodikus lesz (nincs olyan „bevezető szakasz", mint az előző feladatban), és mindig akkor kezdődik a következő periódus, amikor 1-et kapunk maradékul (a mi példánkban: $5^6 \equiv 1 \pmod{28}$).

1.20. feladat. Mennyi lehet m értéke, ha $187 \equiv 5 \pmod{m}$ és $311 \equiv 3 \pmod{m}$?

1.21. feladat. Számítsuk ki az alábbi hatványok maradékát a megadott modulus szerint.

(a) $699^{1001} \equiv ? \pmod{7}$

(b) $2^{102} \equiv ? \pmod{7}$

(c) $3^{201} \equiv ? \pmod{7}$

(d) $3423^{3423} \equiv ? \pmod{20}$

1.22. feladat. Számítsuk ki az alábbi hatványok maradékát a megadott modulus szerint.

(a) $1992^{1991} \equiv ? \pmod{10}$

(b) $2616^{2021} \equiv ? \pmod{13}$

(c) $1522^{2023} \equiv ? \pmod{15}$

(d) $1841^{1814} \equiv ? \pmod{18}$

(e) $2022^{2022} \equiv ? \pmod{20}$

1.23. feladat. Bizonyítsuk be (kongruenciák segítségével), hogy $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ minden n természetes számra.

1.24. feladat. Bizonyítsuk be (kongruenciák segítségével), hogy $27 \mid 2^{5n+1} + 5^{n+2}$ minden n természetes számra.

1.4. Lineáris kongruenciák

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

☞ https://youtu.be/WVdonTsgGZU

Kidolgozott feladat.

Oldjuk meg a $6x \equiv 15 \pmod 9$ lineáris kongruenciát.

Megoldás. A kongruencia definíciója szerint $6x \equiv 15 \pmod 9$ azt jelenti, hogy $9 \mid 6x - 15$. Ez pedig az oszthatóság definíciója szerint azt jelenti, hogy $6x - 15 = 9y$, alkalmas y egész számmal. Tehát a lineáris kongruenciánk ekvivalens a $6x - 9y = 15$ lineáris diofantoszi egyenlettel (de most csak x-re van szükségünk). Korábban már megoldottuk ezt az egyenletet, és azt kaptuk, hogy általános megoldása $x = -5 + 3t$, $y = -5 + 2t$ $(t \in \mathbb{Z})$. Eszerint egy x egész szám akkor és csak akkor megoldása a kongruenciának, ha előáll $x = -5 + 3t$ alakban, vagyis a megoldáshalmaz egy mindkét irányba végtelen, 3-as differenciájú számtani sorozat:

$$M = \{3t - 5 : t \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -14, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}.$$

Ez a halmaz pontosan azokból a számokból áll, amelyek 3-mal osztva 1-et adnak maradékul (egy úgynevezett modulo 3 maradékosztály). Tehát egyetlen megoldás van modulo 3, és a megoldást tömören „kongruenciásan” így is felírhatjuk: $x \equiv 1 \pmod 3$. (Persze azt is írhatnánk, hogy $x \equiv -5 \pmod 3$, ha már -5 szerepelt a diofantoszi egyenlet megoldásában. Ez a két kongruencia ekivalens egymással, hiszen $-5 \equiv 1 \pmod 3$.)

Másik megoldás. A fenti módszerrel minden lineáris kongruencia visszavezethető lineáris diofantoszi egyenletre, de ennél gyakran rövidebb (és élvezetesebb!), ha kongruenciákkal számolunk. A $6x \equiv 15 \pmod 9$ kongruenciát jó lenne egyszerűsíteni 6-tal, de sajnos 15 nem osztható 6-tal (márpedig a kongruenciának csak egész számokra van értelme). Vegyük azonban észre, hogy $15 \equiv 6 \pmod 9$, és így a kongruenciánk ekvivalens a $6x \equiv 6 \pmod 9$ kongruenciával, amit már tudunk 6-tal egyszerűsíteni. Az egyszerűsítésnél vigyázni kell, mert a modulus megváltozhat! Az általános szabály így fest:

$$ca \equiv cb \pmod m \iff a \equiv b \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{\mathrm{lnko}(m,c)}\right).$$

Nálunk most $c = 6$ és $m = 9$ a „szereposztás” (és $a = x$, $b = 1$), tehát az új modulus $\frac{m}{\mathrm{lnko}(m,c)} = \frac{9}{\mathrm{lnko}(9,6)} = \frac{9}{3} = 3$ lesz. Egyszerűsítés után tehát az $x \equiv 1 \pmod 3$ megoldást kapjuk, akárcsak az előbb.

Kidolgozott feladat.

Oldjuk meg a $114x \equiv 6 \pmod{52}$ lineáris kongruenciát.

Megoldás. A kongruencia tanult tulajdonságait használva, ekvivalens átalakításokkal jutunk el a megoldáshoz. Erre sok lehetőség van, íme egy levezetés:

$$\begin{array}{rll}
114x \equiv 6 & \pmod{52} & \text{egyszerűsítünk 6-tal: } \mathrm{lnko}(52,6)=2\\
19x \equiv 1 & \pmod{26} & 19 \equiv 45 \pmod{26} \text{ és } 1 \equiv -25 \pmod{26}\\
45x \equiv -25 & \pmod{26} & \text{egyszerűsítünk 5-tel: } \mathrm{lnko}(26,5)=1\\
9x \equiv -5 & \pmod{26} & -5 \equiv 21 \pmod{26}\\
9x \equiv 21 & \pmod{26} & \text{egyszerűsítünk 3-mal: } \mathrm{lnko}(26,3)=1\\
3x \equiv 7 & \pmod{26} & 7 \equiv 33 \pmod{26}\\
3x \equiv 33 & \pmod{26} & \text{egyszerűsítünk 3-mal: } \mathrm{lnko}(26,3)=1\\
x \equiv 11 & \pmod{26} & \text{kész!}
\end{array}$$

Másik megoldás. Ha c relatív prím az m modulushoz, akkor a c-vel való egyszerűsítés ekvivalens átalakítás (nem változik a modulus), mint például a fenti levezetésben az 5-tel és 3-mal való egyszerűsítésnél. Ezt „visszafelé” végrehajtva: a kongruencia mindkét oldalát c-vel szorozni ekvivalens átalakítás, feltéve, hogy $\mathrm{lnko}(m,c) = 1$. Ez a beszorzás első pillantásra nem tűnik jó ötletnek, mert (abszolút értékben) nagyobb számok jelennek meg, de ha ezeknek a nagyobb számoknak a modulo m maradéka kicsi, akkor jól járhatunk a beszorzással. Mutatunk egy levezetést, amiben kétszer is használjuk ezt a trükköt:

$$\begin{array}{rll}
114x \equiv 6 & \pmod{52} & \text{egyszerűsítünk 6-tal: } \mathrm{lnko}(52,6)=2\\
19x \equiv 1 & \pmod{26} & 19 \equiv -7 \pmod{26}\\
-7x \equiv 1 & \pmod{26} & \text{beszorzunk 3-mal: } \mathrm{lnko}(26,3)=1\\
-21x \equiv 3 & \pmod{26} & -21 \equiv 5 \pmod{26}\\
5x \equiv 3 & \pmod{26} & \text{beszorzunk 5-tel: } \mathrm{lnko}(26,5)=1\\
25x \equiv 15 & \pmod{26} & 25 \equiv -1 \pmod{26}\\
-x \equiv 15 & \pmod{26} & \text{egyszerűsítünk vagy beszorzunk } (-1)\text{-gyel: } \mathrm{lnko}(26,-1)=1\\
x \equiv -15 & \pmod{26} & \text{kész!}
\end{array}$$

Ez a megoldás ugyanaz, mint az előbbi, hiszen $-15 \equiv 11 \pmod{26}$.

Harmadik megoldás. A kongruenciát áírjuk a $114x - 52y = 6$ diofantoszi egyenletre, amelynek megoldásából $x = 11 + 26t$ adódik, ami azt jelenti, hogy $x \equiv 11 \pmod{26}$.

Kidolgozott feladat.

Oldjuk meg az $56x \equiv 48 \pmod{88}$ lineáris kongruenciát.

Megoldás. A kongruencia tanult tulajdonságait használva, ekvivalens átalakításokkal jutunk el a megoldáshoz:

$$\begin{array}{rl}
56x \equiv 48 & \pmod{88}\\
7x \equiv 6 & \pmod{11}\\
-4x \equiv 6 & \pmod{11}\\
-2x \equiv 3 & \pmod{11}\\
-2x \equiv 14 & \pmod{11}\\
x \equiv -7 & \pmod{11}\\
x \equiv 4 & \pmod{11}
\end{array}$$

(Találd ki, hogy melyik lépésben mit csináltunk! Meg tudnád oldani kevesebb lépésből?)

1.25. feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat.

(a) $3x \equiv 4 \pmod 5$

(b) $10x \equiv 26 \pmod{28}$

(c) $9x \equiv 15 \pmod{12}$

(d) $29x \equiv 17 \pmod{73}$

1.26. feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat.

(a) $6x \equiv 4 \pmod 8$

(b) $13x \equiv -3 \pmod{34}$

(c) $30x \equiv 9 \pmod{51}$

(d) $88x \equiv 42 \pmod{55}$

(e) $5x \equiv 24 \pmod{13}$

(f) $27x \equiv 9 \pmod{93}$

(g) $92x \equiv 20 \pmod{212}$

(h) $160x \equiv 60 \pmod{230}$

1.27. feladat. Az alábbi linken elérhető játékban egy nyúl ugrál egy szabályos 28 oldalú sokszög csúcsain.
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2021tavasz/nyul-sokszog.html
Mekkorákat ugorjon, hogy...

(a) a 10. ugrással a 26-os csúcsba jusson?

(b) a 12. ugrással a 26-os csúcsba jusson?

(c) a 16. ugrással a 20-as csúcsba jusson? (És hogy a 16. ugrással érkezzen *először* a 20-as csúcsba?)

Kidolgozott feladat.

Melyek azok a 32-re végződő négyjegyű számok, amelyek oszthatóak 47-tel? Határozzuk meg az összes megoldást!

Megoldás. A 32-re végződő négyjegyű számokat $100x+32$ alakban lehet felírni, ahol x kétjegyű szám. Tehát meg kell oldanunk a $100x+32 \equiv 0 \pmod{47}$ lineáris kongruenciát:

$$\begin{aligned}
100x + 32 &\equiv 0 &&\pmod{47}\\
100x &\equiv -32 &&\pmod{47}\\
50x &\equiv -16 &&\pmod{47}\\
3x &\equiv 78 &&\pmod{47}\\
x &\equiv 26 &&\pmod{47}
\end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy a $47t+26$ alakú számok elégítik ki a kongruenciát. Ezek közül csak 26 és 73 kétjegyű, tehát a feladatban kérdezett négyjegyű számra két lehetőség van: 2632 és 7332.

1.28. feladat. Melyik az a 4-re végződő háromjegyű szám, amely 63-mal osztva 1-et ad maradékul?

1.29. feladat. Határozzuk meg azt a legkisebb háromjegyű természetes számot, amelynek 12-szerese 6-ot ad maradékul 30-cal osztva.

1.5. Lineáris kongruenciarendszerek

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

https://youtu.be/m_J7XaKhQmE

Kidolgozott feladat.

Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciarendszert:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 7 \pmod{6} \\ x &\equiv 22 \pmod{9} \end{aligned}\right\}$$

Megoldás. Fogalmazzuk át mindkét kongruenciát oszthatóságra, majd „milyen alakú szám x" típusú állításra:

$$\begin{aligned} x \equiv 7 \pmod{6} &\iff 6 \mid x-7 \iff \exists y \in \mathbb{Z}\colon x = 6y+7; \\ x \equiv 22 \pmod{9} &\iff 9 \mid x-22 \iff \exists z \in \mathbb{Z}\colon x = 9z+22. \end{aligned}$$

Az x-re kapott két kifejezést egyenlővé téve a $6y+7 = 9z+22$ diofantoszi egyenletet kapjuk, amit rendezés után a $6y-9z = 15$ alakba írhatunk. Ezt az egyenletet már korábban megoldottuk (csak ott nem y és z, hanem x és y voltak az ismeretlenek). Az egyenlet megoldása $y = 4+3t$, $z = 1+2t$ ($t \in \mathbb{Z}$). Ebből kifejezhetjük x-et: $x = 6y+7 = 6\cdot(4+3t)+7 = 18t+31$ (ugyanezt megkaphattuk volna z-ből is). Tehát a kongruenciarendszer megoldásai az $x = 18t+31$ ($t \in \mathbb{Z}$) alakú számok, vagyis x akkor és csak akkor megoldás, ha $x \equiv 31 \pmod{18}$. Mivel $31 \equiv 13 \pmod{18}$, a megoldást így is felírhatjuk $x \equiv 13 \pmod{18}$.

Megjegyzés. A diofantoszi egyenletre való visszavezetés helyett kongruenciás számolással is meg lehet oldani ilyen kongruenciarendszereket. Ezt a következő feladatban mutatjuk be.

Kidolgozott feladat.

Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciarendszert.

$$\left.\begin{aligned} 8x &\equiv 6 \pmod{18} \\ 9x &\equiv 18 \pmod{42} \end{aligned}\right\}$$

Megoldás. Az első kongruencia megoldása: $x \equiv 3 \pmod{9}$, tehát x-et $x = 9y+3$ alakban keressük. Ezt beírva a második kongruenciába azt kapjuk, hogy $81y+27 \equiv 18 \pmod{42}$, azaz $-3y \equiv -9 \pmod{42}$. Ennek megoldása: $y \equiv 3 \pmod{14}$, tehát y-t $y = 14t+3$ alakba írhatjuk. Visszahelyettesítve x felírásába, azt kapjuk, hogy $x = 9y+3 = 9\cdot(14t+3)+3 = 126t+30$, azaz $x \equiv 30 \pmod{126}$.

Másik megoldás. Először oldjuk meg egyenként a kongruenciákat:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{9} \\ x &\equiv 2 \pmod{14} \end{aligned}\right\}$$

Ezt a kongruenciarendszert az előző feladat módszerével átírhatjuk a $9y+3 = 14z+2$ $(= x)$ diofantoszi egyenletre, amelynek megoldása $y = 3+14t$, $z = 2+9t$ ($t \in \mathbb{Z}$). Ezután x-et megkaphatjuk akár y-ból akár z-ből; most a változatosság kedvéért használjuk z-t: $x = 14z+2 = 14\cdot(2+9t)+2 = 126t+30$, azaz $x \equiv 30 \pmod{126}$.

Kidolgozott feladat.

Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciarendszert.

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{4} \\ x &\equiv 5 \pmod{6} \\ x &\equiv 2 \pmod{7} \end{aligned}\right\}$$

Megoldás. Megoldjuk az első két kongruenciából álló részrendszert (kongruenciás számolással vagy diofantoszi egyenletre való átírással):

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{4} \\ x &\equiv 5 \pmod{6} \end{aligned}\right\} \iff x \equiv 11 \pmod{12}$$

Ezt a kongruenciát „összerakjuk” az eredeti rendszer harmadik kongruenciájával, és megoldjuk ezt a rendszert is:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 11 \pmod{12} \\ x &\equiv 2 \pmod{7} \end{aligned}\right\} \iff x \equiv 23 \pmod{84}$$

Tehát a megoldás: $x \equiv 23 \pmod{84}$.

Kidolgozott feladat.

Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert:

$$\left.\begin{aligned} 6x &\equiv 2 \pmod{8} \\ 15x &\equiv 3 \pmod{18} \\ 16x &\equiv 4 \pmod{28} \end{aligned}\right\}$$

Megoldás. Megoldjuk az első kongruenciát, és a megoldását megfogalmazzuk „milyen alakú szám x” módon:

$$\begin{aligned} 6x \equiv 2 \pmod{8} &\iff x \equiv 3 \pmod{4} \\ &\iff x = 4y + 3 \quad \text{(alkalmas } y \text{ egész számmal).} \end{aligned}$$

Az x-re kapott kifejezést behelyettesítjük a második kongruenciába, és megoldjuk y-ra:

$$\begin{aligned} 15 \cdot (4y+3) \equiv 3 \pmod{18} &\iff 60y \equiv -42 \pmod{18} \\ &\iff y \equiv 2 \pmod{3} \\ &\iff y = 3z + 2 \quad \text{(alkalmas } z \text{ egész számmal).} \end{aligned}$$

Fejezzük ki x-et z segítségével: $x = 4y + 3 = 4 \cdot (3z + 2) + 3 = 12z + 11$. Ezt helyettesítjük be a harmadik kongruenciába, és megoldjuk z-re:

$$\begin{aligned} 16 \cdot (12z+11) \equiv 4 \pmod{28} &\iff 192z \equiv -172 \pmod{28} \\ &\iff z \equiv 1 \pmod{7} \\ &\iff z = 7t + 1 \quad \text{(alkalmas } t \text{ egész számmal).} \end{aligned}$$

(A számolást lehetett volna ügyesebben is csinálni: a zárójel felbontása előtt leoszthattunk volna 4-gyel, és utána már 12-t és 11-et redukálhattuk volna modulo 7. Így nem kellett volna kiszámolni olyan szörnyű dolgokat, mint $16 \cdot 12 = 192$.) Fejezzük ki x-et t segítségével: $x = 12z + 11 = 12 \cdot (7t + 1) + 11 = 84t + 23$. Tehát a végeredmény: $x \equiv 23 \pmod{84}$.

Másik megoldás. Először külön-külön megoldjuk a kongruenciákat:

$$\left.\begin{aligned} 6x \equiv 2 \pmod{8} &\iff x \equiv 3 \pmod{4} \\ 15x \equiv 3 \pmod{18} &\iff x \equiv 5 \pmod{6} \\ 16x \equiv 4 \pmod{28} &\iff x \equiv 2 \pmod{7} \end{aligned}\right\}$$

Megoldjuk az első két kongruenciából álló részrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{4} \\ x &\equiv 5 \pmod{6} \end{aligned}\right\} \iff x \equiv 11 \pmod{12}$$

Végül ezt a kongruenciát hasonló módon „összeolvasztjuk” az eredeti rendszer harmadik kongruenciájával:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 11 \pmod{12} \\ x &\equiv 2 \pmod{7} \end{aligned}\right\} \iff x \equiv 23 \pmod{84}$$

1.30. feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciarendszereket.

(a) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{14} \\ x &\equiv 7 \pmod{10} \end{aligned}\right\}$

(b) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 1 \pmod{6} \\ x &\equiv 7 \pmod{9} \end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} 10x &\equiv 16 \pmod{9} \\ 6x &\equiv 3 \pmod{21} \\ 3x &\equiv 2 \pmod{5} \end{aligned}\right\}$

1.31. feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciarendszereket.

(a) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{2} \\ x &\equiv 6 \pmod{5} \end{aligned}\right\}$

(b) $\left.\begin{aligned} 3x &\equiv 15 \pmod{24} \\ 4x &\equiv 11 \pmod{21} \end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 5 \pmod{6} \\ x &\equiv 3 \pmod{10} \\ x &\equiv 8 \pmod{45} \end{aligned}\right\}$

(d) $\left.\begin{aligned} 3x &\equiv 1 \pmod{5} \\ 5x &\equiv 3 \pmod{7} \\ 13x &\equiv 4 \pmod{9} \end{aligned}\right\}$

(e) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 7 \pmod{8} \\ x &\equiv 6 \pmod{7} \end{aligned}\right\}$

(f) $\left.\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \pmod{5} \\ 5x &\equiv -1 \pmod{6} \\ 4x &\equiv 11 \pmod{9} \end{aligned}\right\}$

(g) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 4 \pmod{7} \end{aligned}\right\}$

(h) $\left.\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod{6} \\ 7x &\equiv 9 \pmod{10} \end{aligned}\right\}$

(i) $\left.\begin{aligned} 2x &\equiv 18 \pmod{10} \\ 10x &\equiv 40 \pmod{12} \\ 15x &\equiv 9 \pmod{21} \end{aligned}\right\}$

Kidolgozott feladat.

A 3.d osztály kirándulni ment. Ötfős szobákban szállásolták el őket, így négy gyerek kénytelen volt Marcsi nénivel egy szobában aludni. Éjszaka Bence olyan rosszul viselkedett, hogy Marcsi néni felhívta a szüleit, akik már hajnalban hazavitték. Így a reggelinél szépen elfértek a gyerekek a hétszemélyes asztaloknál (Marcsi néni külön asztalnál ült). Panka gyomorrontást kapott a reggelitől, ezért délelőtt őt is hazavitték. Ebédnél az étteremben minden asztalnál kilenc gyerek ült (Marcsi néni külön asztalnál). Hányan járnak a 3.d osztályba?

Megoldás. Az osztály létszámát x-szel jelölve, az alábbi kongruenciarendszert írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 4 \pmod{5} \\ x-1 &\equiv 0 \pmod{7} \\ x-2 &\equiv 0 \pmod{9} \end{aligned}\right\} \quad \text{azaz} \quad \left.\begin{aligned} x &\equiv 4 \pmod{5} \\ x &\equiv 1 \pmod{7} \\ x &\equiv 2 \pmod{9} \end{aligned}\right\}$$

Az első kongruenciából kapjuk, hogy $x = 5y + 4$ (alkalmas y egész számmal). Ezt helyettesítjük a második kongruenciába, és megoldjuk y-ra:

$$\begin{aligned} 5y + 4 \equiv 1 \pmod{7} &\iff 5y \equiv -3 \pmod{7} \\ &\iff y \equiv -2 \pmod{7} \\ &\iff y = 7z - 2 \quad \text{(alkalmas } z \text{ egész számmal).} \end{aligned}$$

Fejezzük ki x-et z segítségével: $x = 5y + 4 = 5 \cdot (7z - 2) + 4 = 35z - 6$. Ezt helyettesítjük be a harmadik kongruenciába, és megoldjuk z-re:

$$\begin{aligned} 35z - 6 \equiv 2 \pmod{9} &\iff 35z \equiv 8 \pmod{9} \\ &\iff z \equiv 1 \pmod{9} \\ &\iff z = 9t + 1 \quad \text{(alkalmas } t \text{ egész számmal).} \end{aligned}$$

Fejezzük ki x-et t segítségével: $x = 35z - 6 = 35 \cdot (9t + 1) - 6 = 315t + 29$, azaz $x \equiv 29 \pmod{315}$. Ha $t < 0$, akkor x negatív lesz, $t > 0$ esetén meg több, mint 300-an járnának az osztályba. Tehát az egyetlen reális megoldást $t = 0$ adja: 29-en járnak a 3.d osztályba.

1.32. feladat. Egy labdarúgó mérkőzésre azonos számú férőhellyel rendelkező buszokkal érkeznek a szurkolók, akiket biztonsági okokból kisebb csoportokban engednek be a stadionba. Először 4 busznyi szurkoló érkezett, és 5 fős csoportokban engedték be őket, így az utolsó csoportban csak 3 szurkoló maradt. Máskor 13 busszal érkeztek, és 8-as csoportokban nyertek bebocsátást, és ekkor szintén 3 szurkoló maradt az utoljára beengedett csoportban. Amikor pedig 16 busszal érkeztek szurkolók, és egyszerre 9-et léptettek be, akkor végül 5 szurkoló maradt. Hány személyesek a buszok, ha tudjuk, hogy egy buszba legfeljebb 100-an férnek, és a buszok minden esetben tele voltak?

1.33. feladat. Bizonyos megfigyelések szerint a varjak mindig azonos létszámú rajokban vándorolnak. Ha 11 varjúraj oly módon száll le egy fára, hogy a fa minden ágára 4 varjú kerül, akkor végül egy varjú egyedül marad. Ha 12 varjúraj száll le egy fa ágaira hetes csoportokban, akkor szintén egy varjú egyedül lesz egy ágon. Míg ha 13 varjúraj kilences csoportokban száll le egy fa ágaira, akkor az utolsó ágon 7 varjú lesz. Hány varjú van egy rajban, ha tudjuk, hogy ez a szám nem több, mint 100?

1.34. feladat. Ha 7 zacskó gumicukrot osztok el 10 gyerek között, akkor a végén 9 szem gumicukor marad meg. Ha 10 zacskót osztok el 14 gyerek között, akkor meg 6 marad. Hány darab gumicukor van egy-egy zacskóban, ha minden zacskóban ugyanannyi, mégpedig 50-nél több, de 150-nél kevesebb darab van?

1.35. feladat. Egy tizenhéttagú kalózcsapat egy zsák aranypént lopott. Amikor megpróbálták egyenlően elosztani, azt tapasztalták, hogy három aranypénz kimaradt. A kimaradt aranyak fölötti vitában egy kalózt megöltek. Ezután újraosztották egyenlő arányban a zsákmányt, s most tíz arany maradt ki. Az e fölötti vitában egy újabb kalózt öltek meg, s ezután már el tudták osztani a lopott aranyat úgy, hogy mindenki ugyanannyit kapott. Legkevesebb hány aranypénzt zsákmányoltak?

1.36. feladat. Ha egy kosár tojást 2, 3, 4, 5, vagy 6-osával ürítünk ki, rendre 1, 2, 3, 4, 5 tojás marad benne. Ha azonban 7-esével vesszük ki a tojásokat, akkor egy sem marad a kosárban. Legalább hány tojás lehet a kosárban?

★ **1.37. feladat.** Oldjuk meg a kínai maradéktétel segítségével az alábbi paraméteres kongruenciarendszert.

$$\left.\begin{array}{rcll} x & \equiv & c_1 & \pmod{11} \\ x & \equiv & c_2 & \pmod{6} \end{array}\right\}$$

★ **1.38. feladat.** Oldjuk meg a kínai maradéktétel segítségével az alábbi paraméteres kongruenciarendszereket.

(a) $$\left.\begin{array}{rcll} x & \equiv & c_1 & \pmod{10} \\ x & \equiv & c_2 & \pmod{7} \end{array}\right\}$$

(b) $$\left.\begin{array}{rcll} x & \equiv & c_1 & \pmod{3} \\ x & \equiv & c_2 & \pmod{4} \\ x & \equiv & c_3 & \pmod{5} \end{array}\right\}$$

1.6. Maradékosztályok

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

- https://youtu.be/1t_OUyU8-Xk (maradékosztályok és maradékrendszerek)
- https://youtu.be/O8GhI3fdAbI (számolás maradékosztályokkal)

1.39. feladat. Teljes maradékrendszert alkotnak-e az alábbi számok a megadott modulus szerint?

(a) $1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000$ modulo 7

(b) $2, 8, 14, \ldots, 302$ modulo 51

(c) $3, 18, 33, \ldots, 678$ modulo 46

1.40. feladat. Teljes maradékrendszert alkotnak-e az alábbi számok a megadott modulus szerint?

(a) $10, -1, 25, -13, 28, 38, 12$ modulo 7

(b) $11, 22, 33, \ldots, 154$ modulo 14

(c) $11, 21, 31, \ldots, 911$ modulo 91

(d) $4, 9, 14, \ldots, 239$ modulo 49

1.41. feladat. Végezzük el $\mathbb{Z}_m$-ben a számításokat. A végeredmény $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}$ valamelyike legyen.

(a) $\overline{8} + \overline{10}, \overline{8} - \overline{10}, \overline{8} \cdot \overline{10} \in \mathbb{Z}_{15}$

(b) $\overline{10} + \overline{15}, \overline{10} - \overline{15}, \overline{10} \cdot \overline{15} \in \mathbb{Z}_{18}$

1.42. feladat. Végezzük el $\mathbb{Z}_m$-ben a számításokat. A végeredmény $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}$ valamelyike legyen.

(a) $\overline{10} + \overline{15}, \overline{10} - \overline{15}, \overline{10} \cdot \overline{15} \in \mathbb{Z}_{21}$

(b) $\overline{17} + \overline{15}, \overline{9} - \overline{15}, \overline{6} \cdot \overline{7} \in \mathbb{Z}_{21}$

(c) $\overline{23} + \overline{25}, \overline{0} - \overline{21}, \overline{9} \cdot \overline{12} \in \mathbb{Z}_{33}$

Kidolgozott feladat.

Oldjuk meg $\mathbb{Z}_{84}$-ben az alábbi egyenleteket. (Az összes megoldást keressük meg és a megoldásokat $\overline{a}$ alakban adjuk meg, ahol $a \in \{0, 1, \ldots, 83\}$.)

(a) $\overline{16} \cdot \overline{x} = \overline{12}$

(b) $\overline{16} \cdot \overline{x} = \overline{10}$

Megoldás.

(a) Az egyenlet a $16x \equiv 12 \pmod{84}$ kongruenciára vezet, aminek a megoldása $x \equiv 6 \pmod{21}$. Soroljuk fel az x értékeket, és nézzük meg, hogy milyen maradékokat adnak 84-gyel osztva:

x	$\cdots$	-36	-15	6	27	48	69	90	111	$\cdots$
x mod 84	$\cdots$	48	69	6	27	48	69	6	27	$\cdots$

Látjuk, hogy a kongruencia megoldásai négyféle maradékot tudnak adni 84-gyel osztva, ezért az egyenletnek $\mathbb{Z}_{84}$-ben négy megoldás van: $\overline{6}$, $\overline{27}$, $\overline{48}$, $\overline{69}$.

Megjegyzés. Nem véletlen, hogy négy megoldást kaptunk, hiszen a kongruencia megoldása során a modulus a negyedére csökkent. Általában is hasonló a helyzet: az $ax \equiv b \pmod{m}$ kongruencia megoldásai egyetlen modulo $\frac{m}{\operatorname{lnko}(a,m)}$ maradékosztályt alkotnak (ha van megoldás egyáltalán), és ez a halmaz $\operatorname{lnko}(a, m)$ darab modulo m maradékosztályra „hasad”.

(b) Az egyenlet a $16x \equiv 10 \pmod{84}$ kongruenciára vezet, ennek pedig nincs megoldása, mert $\operatorname{lnko}(16, 84) = 4 \nmid 10$.

1.43. feladat. Oldjuk meg $\mathbb{Z}_m$-ben az alábbi egyenleteket (az összes megoldást keressük meg!)

(a) $\overline{10} \cdot \overline{x} = \overline{8}$ $\quad \mathbb{Z}_{15}$-ben

(b) $\overline{9} \cdot \overline{x} = \overline{6}$ $\quad \mathbb{Z}_{15}$-ben

(c) $\overline{7} \cdot \overline{x} = \overline{6}$ $\quad \mathbb{Z}_{15}$-ben

(d) $\overline{6} \cdot \overline{x} = \overline{4}$ $\quad \mathbb{Z}_{8}$-ban

(e) $\overline{88} \cdot \overline{x} = \overline{42}$ $\quad \mathbb{Z}_{55}$-ben

1.44. feladat. Oldjuk meg $\mathbb{Z}_m$-ben az alábbi egyenleteket (az összes megoldást keressük meg!)

(a) $\overline{9} \cdot \overline{x} = \overline{15}$ $\quad \mathbb{Z}_{12}$-ben

(b) $\overline{5} \cdot \overline{x} = \overline{11}$ $\quad \mathbb{Z}_{13}$-ban

(c) $\overline{28} \cdot \overline{x} = \overline{23}$ $\quad \mathbb{Z}_{40}$-ben

(d) $\overline{28} \cdot \overline{x} = \overline{24}$ $\quad \mathbb{Z}_{40}$-ben

(e) $\overline{3} \cdot \overline{x} = \overline{4}$ $\quad \mathbb{Z}_{5}$-ben

(f) $\overline{10} \cdot \overline{x} = \overline{26}$ $\quad \mathbb{Z}_{28}$-ban

(g) $\overline{25} \cdot \overline{x} = \overline{35}$ $\quad \mathbb{Z}_{90}$-ben

(h) $\overline{30} \cdot \overline{x} = \overline{9}$ $\quad \mathbb{Z}_{51}$-ben

1.7. Redukált maradékosztályok, multiplikatív inverz, multiplikatív rend

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

☞ https://youtu.be/na257Lu75CU

Kidolgozott feladat.

Számítsuk ki $\mathbb{Z}_{21}$-ben az alábbi elemeket. (A végeredményt mindig $\overline{a}$ alakban adjuk meg, ahol $a \in \{0, 1, \ldots, 20\}$.)

(a) $\overline{5}^{-2} = ?$

(b) $\overline{6}^{-5} = ?$

(c) $\overline{6!} = ?$

Megoldás.

(a) Az $\overline{5}^{-2}$ hatványt kétféleképpen is ki tudjuk számolni: $\overline{5}^{-2} = \left(\overline{5}^{-1}\right)^2 = \overline{-4}^2 = \overline{16}$ (itt az $\overline{5}^{-1}$ hatványt, vagyis $\overline{5}$ multiplikatív inverzét, az $5x \equiv 1 \pmod{21}$ lineáris kongruencia megoldásával kaptuk), vagy pedig $\overline{5}^{-2} = \left(\overline{5}^2\right)^{-1} = \overline{4}^{-1} = \overline{16}$ (itt a $\overline{4}^{-1}$ hatványt a $4x \equiv 1 \pmod{21}$ lineáris kongruencia megoldásával kaptuk).

(b) A $\overline{6}^{-5}$ hatvány nem értelmezett, mert 6 nem relatív prím 21-hez, ezért nincs modulo 21 multiplikatív inverze.

(c) A $\overline{6!}$ maradékosztályt megkaphatjuk úgy, hogy a $6! = 720$ számot maradékosan osztjuk 21-gyel, de kisebb lépésekben haladva nem kell ilyen nagy számmal dolgoznunk: $\overline{6!} = \overline{2} \cdot \overline{3} \cdot \overline{4} \cdot \overline{5} \cdot \overline{6} = \overline{24} \cdot \overline{30} = \overline{3} \cdot \overline{9} = \overline{27} = \overline{6}$.

1.45. feladat. Határozzuk meg a megadott maradékosztály multiplikatív inverzét.

(a) $\overline{88}^{-1} \in \mathbb{Z}_{55}$

(b) $\overline{5}^{-1} \in \mathbb{Z}_{13}$

1.46. feladat. Határozzuk meg a megadott maradékosztály multiplikatív inverzét.

(a) $\overline{5}^{-1} \in \mathbb{Z}_{14}$

(b) $\overline{9}^{-1} \in \mathbb{Z}_{12}$

(c) $\overline{3}^{-1} \in \mathbb{Z}_{5}$

(d) $\overline{29}^{-1} \in \mathbb{Z}_{73}$

1.47. feladat. Soroljuk fel $\mathbb{Z}_m^*$ elemeit, és állítsuk az elemeket párba az inverzükkel.

(a) $m = 15$

(b) $m = 9$

1.48. feladat. Soroljuk fel $\mathbb{Z}_m^*$ elemeit, és állítsuk az elemeket párba az inverzükkel.

(a) $m = 7$

(b) $m = 8$

(c) $m = 10$

(d) $m = 11$

Kidolgozott feladat.

Határozzuk meg $\mathbb{Z}_{18}^*$-ban a megadott elemek multiplikatív rendjét és hatványaikat. (A hatványokat mindig $\overline{a}$ alakban adjuk meg, ahol $a \in \{0, 1, \ldots, 17\}$.)

(a) $o(\overline{5}) =?$, $\overline{5}^{100} =?$

(b) $o(\overline{8}) =?$, $\overline{8}^{100} =?$

Megoldás.

(a) Kezdjük el hatványozni az $\overline{5} \in \mathbb{Z}_{18}$ elemet:

k	$\cdots$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$\overline{5}^k$	$\cdots$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{-1}$	$\overline{-5}$	$\overline{-7}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\cdots$

A hatodik hatványra jött ki először $\overline{1}$, ezért $o(\overline{5}) = 6$, és így $\overline{5}$ hatványozásakor a kitevőt modulo 6 kell figyelembe venni. Ezért 100-at maradékosan osztjuk 6-tal: azt kapjuk, hogy $100 \equiv 4 \pmod 6$. Tehát $\overline{5}^{100} = \overline{5}^4 = \overline{-5} = \overline{13}$ (a táblázatból kiolvasható).

(b) Mivel 8 nem relatív prím 18-hoz, azaz $\overline{8} \notin \mathbb{Z}_{18}^*$, az $o(\overline{8})$ multiplikatív rend nem értelmezett (bármeddig hatványozzuk is a $\overline{8} \in \mathbb{Z}_{18}$ elemet, soha nem fog kijönni $\overline{1}$). Ennek ellenére $\overline{8}^{100}$ értelmezett, és kiszámításához segít, ha megfigyeljuk $\overline{8}$ hatványainak sorozatában a szabályszerűséget:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$\overline{8}^k$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\cdots$

Innen látható, hogy $\overline{8}$ pozitív egész kitevős hatványainál csak a kitevő paritása számít, tehát $\overline{8}^{100} = \overline{10}$.

1.49. feladat. Határozzuk meg a megadott maradékosztály multiplikatív rendjét és számítsuk ki a hatványait.

(a) $\mathbb{Z}_7^*$-ban $o(\overline{2}) =?$, $\overline{2}^{102} =?$, $\overline{2}^{2021} =?$

(b) $\mathbb{Z}_{10}^*$-ban $o(\overline{3}) =?$, $\overline{3}^{402} =?$, $\overline{3}^{2021} =?$

1.50. feladat. Határozzuk meg a megadott maradékosztály multiplikatív rendjét és számítsuk ki a hatványait.

(a) $\mathbb{Z}_{11}^*$-ban $o(\overline{4}) =?$, $\overline{4}^{200} =?$, $\overline{4}^{2023} =?$

(b) $\mathbb{Z}_{15}^*$-ban $o(\overline{13}) =?$, $\overline{13}^{-102} =?$, $\overline{13}^{2023} =?$

(c) $\mathbb{Z}_{10}^*$-ban $o(\overline{2}) =?$, $\overline{2}^{402} =?$, $\overline{2}^{2024} =?$

(d) $\mathbb{Z}_{25}^*$-ban $o(\overline{21}) =?$, $\overline{21}^{153} =?$, $\overline{21}^{2024} =?$

(e) $\mathbb{Z}_{18}^*$-ban $o(\overline{5}) =?$, $\overline{5}^{908} =?$, $\overline{5}^{-1} =?$

(f) $\mathbb{Z}_{25}^*$-ban $o(\overline{6}) =?$, $\overline{6}^{912} =?$, $\overline{6}^{-67} =?$

1.8. Az Euler-féle φ függvény

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

https://youtu.be/tul3OaZJnyc

Kidolgozott feladat.

Számítsuk ki $\varphi(7!)$ értékét.

Megoldás. Készítsük el 7! prímhatványtényezős felbontását: $7! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Az Euler–féle φ függvény képletét használva azt kapjuk, hogy

$$\varphi(7!) = \varphi(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) = \varphi(2^4) \cdot \varphi(3^2) \cdot \varphi(5) \cdot \varphi(7) =$$
$$= (2^4 - 2^3) \cdot (3^2 - 3^1) \cdot (5 - 1) \cdot (7 - 1) = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 = 1152.$$

1.51. feladat. Számítsuk ki az Euler-féle φ függvény alábbi értékeit.

(a) $\varphi(1000) =?$

(b) $\varphi(360) =?$

(c) $\varphi(2021) =?$

1.52. feladat. Számítsuk ki az Euler-féle φ függvény alábbi értékeit.

(a) $\varphi(60) =?$

(b) $\varphi(88) =?$

(c) $\varphi(20) =?$

(d) $\varphi(30) =?$

(e) $\varphi(75) =?$

(f) $\varphi(128) =?$

1.53. feladat. Oldjuk meg az egyenletet a természetes számok halmazán.

(a) $\varphi(x) = 4$

(b) $\varphi(x) = 5$

(c) $\varphi(x) = 6$

(d) $2\varphi(x) = x$

(e) $\varphi(x) = x - 8$

(f) $\varphi(x) = x - 10$

(g) $\varphi(x^2) = 2x$

(h) $\varphi(x^2) = x\varphi(x)$

1.9. Az Euler–Fermat-tétel

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

- https://youtu.be/21jdmZsFfG0 (az Euler–Fermat-tétel)
- https://youtu.be/Qld3r2pkbs8 (az Euler–Fermat-tétel bizonyítása)

Kidolgozott feladat.

Mennyit ad 98^{272} maradékul 27-tel osztva? (A végeredmény egy 0 és 26 közötti szám legyen.)

Megoldás.

1. Először csökkentsük a hatvány alapját: $98 \equiv 17 \pmod{27}$, ezért $98^{272} \equiv 17^{272} \pmod{27}$.
2. Az Euler–Fermat-tételt fogjuk használni, ezért ellenőrizzük, hogy teljesül a tétel feltétele, azaz a hatvány alapja és a modulus relatív prím: $\mathrm{lnko}(17, 27) = 1$.
3. Szükségünk lesz a modulus φ-értékére: $\varphi(27) = \varphi(3^3) = 3^3 - 3^2 = 18$.
4. Az Euler–Fermat-tétel szerint $17^{18} \equiv 1 \pmod{27}$; ezt a következőképpen használjuk a hatvány kiszámítására:
$$17^{272} \equiv 17^{15\cdot 18+2} \equiv (17^{18})^{15} \cdot 17^2 \equiv 1^{15} \cdot 17^2 \equiv 17^2 \equiv 289 \equiv 19 \pmod{27}.$$
(A kitevőben az történt, hogy 272-t elosztottuk maradékosan $\varphi(27) = 18$-cal. Kiderült, hogy a hányados nem is fontos, mert az úgyis csak az 1-es kitevőjében szerepel. A végeredményhez csak arra volt szükség, hogy 272 kettőt ad maradékul 18-cal osztva.)

Tehát 98^{272} tizenkilencet ad maradékul 27-tel osztva.

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a hatvány alapját modulo 27 kellett figyelembe venni, a kitevő viszont nem modulo 27, hanem modulo $\varphi(27)$ számít. Ez általában is így van: ha $\mathrm{lnko}(a, m) = 1$ és $k \equiv \ell \pmod{m}$, akkor, az Euler–Fermat-tételnek köszönhetően, $a^k \equiv a^\ell \pmod{m}$.

Kidolgozott feladat.

Mennyit ad 873^{2002} maradékul 28-cal osztva? (A végeredmény egy 0 és 27 közötti szám legyen.)

Megoldás. Az előző feladat gondolatmenetének lépéseit követjük:

1. alap redukálása: $873 \equiv 5 \pmod{28}$;
2. feltétel ellenőrzése: $\mathrm{lnko}(5, 28) = 1$;
3. a modulos φ-értékének kiszámítása: $\varphi(28) = \varphi(2^2 \cdot 7) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(7) = 2 \cdot 6 = 12$;
4. kitevő redukálása: $2002 \equiv 10 \pmod{12}$.

Az Euler–Fermat-tételt használva a fentiek alapján ezt kapjuk: $873^{2002} \equiv 5^{10} \pmod{28}$. Ugyan 5^{10} elég nagy szám, de a modulo 28 maradékát kis ügyeskedéssel könnyen kiszámíthatjuk számológép nélkül is:

$$5^{10} \equiv (5^2)^5 \equiv 25^5 \equiv (-3)^5 \equiv (-3)^3 \cdot (-3)^2 = (-27) \cdot 9 \equiv 1 \cdot 9 \equiv 9 \pmod{28}.$$

Tehát 873^{2002} kilencet ad maradékul 28-cal osztva.

Másik megoldás. Jobban járnánk, ha a 4. pontban inkább a legkisebb abszolút értékű maradékot vennénk: $2002 \equiv -2 \pmod{12}$; így 5^{10} helyett az $5^{-2} \equiv 25^{-1}$ hatványt kell kiszámítanunk modulo 28. Tehát 25 multiplikatív inverzét keressük modulo 28. Ehhez a $25x \equiv 1 \pmod{28}$ lineáris kongruenciát kell megoldanunk. A megoldás: $x \equiv 9 \pmod{28}$.

Megjegyzés. Ezt a feladatot korábban már megoldottuk. Ott azt figyeltük meg, hogy 5 hatványainak modulo 28 maradékai hatosával ismétlődnek, azaz $o(\overline{5}) = 6$ teljesül az $\overline{5} \in \mathbb{Z}_{28}$ maradékosztályra. Az Euler–Fermat-tétel ennél valamivel gyengébb állítást, 12-es periodicitást adott, viszont itt nem kellett próbálgatással megfigyelnünk a hatványok alakulását, „kapásból” tudtuk a 2002-es kitevőt 10-re (illetve (-2)-re) redukálni.

1.54. feladat. Határozzuk meg a hatvány maradékát a megadott modulus szerint.

(a) $63^{42} \equiv ? \pmod{50}$

(b) $123^{765} \equiv ? \pmod{11}$

1.55. feladat. Határozzuk meg a hatvány maradékát a megadott modulus szerint.

(a) $111^{50} \equiv ? \pmod{52}$

(b) $3^{65} \equiv ? \pmod{128}$

(c) $19^{81} \equiv ? \pmod{75}$

(d) $42^{62} \equiv ? \pmod{25}$

1.56. feladat. Határozzuk meg a hatvány maradékát a megadott modulus szerint.

(a) $6^{418} \equiv ? \pmod{29}$

(b) $4447^{2018} \equiv ? \pmod{44}$

1.57. feladat. Határozzuk meg a hatvány maradékát a megadott modulus szerint.

(a) $557^{517} \equiv ? \pmod{53}$

(b) $15^{159} \equiv ? \pmod{34}$

(c) $20^{449} \equiv ? \pmod{31}$

(d) $3^{298} \equiv ? \pmod{25}$

Kidolgozott feladat.

Mi az utolsó két számjegye a 2003^{2004} számnak?

Megoldás. Az utolsó két számjegyet a moulo 100 maradék adja meg. A szokásos előkészítő lépéseket tesszük az Euler–Fermat-tétel felhasználása előtt:

1. $2003 \equiv 3 \pmod{100}$;
2. $\text{lnko}(3, 100) = 1$;
3. $\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(5^2) = 2 \cdot 20 = 40$;
4. $2004 \equiv 4 \pmod{40}$.

Most jöhet az Euler–Fermat-tétel: $2003^{2004} \equiv 3^4 \equiv 81 \pmod{100}$. Tehát 2003^{2004} utolsó két számjegye 8 és 1.

1.58. feladat. Mi az utolsó két számjegye az 1997^{1998} számnak?

★ **1.59. feladat.** Milyen nap lesz $\underbrace{11\ldots11}_{99}$ nap múlva?

★ **1.60. feladat.** Mit ad maradékul 87-tel osztva $13^{(321^{50})}$?

★ **1.61. feladat.** Határozzuk meg a hatványok maradékát a megadott modulus szerint. (Az emeletes hatványokat $a^{(b^c)}$ zárójelezéssel értelmezzük.)

(a) $91^{441^{222}} \equiv ? \pmod{88}$

(b) $80^{111^{50}} \equiv ? \pmod{53}$

(c) $95^{81^{99}} \equiv ? \pmod{46}$

★ **1.62. feladat.** Milyen nap lesz $711^{185^{937}}$ nap múlva?

★ **1.63. feladat.** Mit ad maradékul *googolplex* 21-gyel osztva?

2. Kombinatorika

2.1. Összeszámlálási feladatok

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

- https://youtu.be/wGia9AUMkzo (bevezetés)
- https://youtu.be/I1JsnGOxTTU (összeszámlálási alapelvek)
- https://youtu.be/Y8EFT24JAxY (a hat alapfeladat)

Kidolgozott feladat.

A 2.d osztály Dönci szülinapját ünnepli. Dönci anyukája sütött egy 12-szeletes tortát, 6 áfonyás muffint és 8 kókuszkockát az osztálynak.

(a) Hányféleképpen oszthatja el a tanító néni a süteményeket a 26 gyerek között? (A tanító néni szerint a tortaszeletek mind egyformák, és a muffinok, illetve a kókuszkockák között sincs különbség.)

(b) A gyerekek szerint nem egyformák a tortaszeletek: egyik kicsit nagyobb, mint a másik, valamelyiken van marcipánvirág, valamelyiken meg nincs, és így tovább. A muffinokon és a kókuszkockákon is képesek lennének összeveszni. Hányféle süti-kiosztás lehetséges a gyerekek szemszögéből nézve?

Megoldás.

(a) A tanító néni készít 26 cédulát, amelyek közül 12-re T betűt ír, 6-ra M betűt, 8-ra pedig K betűt, és beteszi őket egy kalapba. A gyerekek valamilyen sorrendben (mondjuk névsor szerint) húznak egy-egy cédulát, ebből kiderül, hogy ki milyen süteményt kap. Így a kiosztások kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a 12 db T betűből, 6 db M betűből és 8 db K betűből álló „szavaknak” (betűsorozatoknak). Ezeknek a száma

$$\frac{26!}{12! \cdot 6! \cdot 8!}.$$

tehát ennyiféleképpen lehet kiosztani a süteményeket.

(b) Hasonlóan gondolkodhatunk, mint az (a) részben, de most mind a 26 betű különböző (pl. 12 különböző színnel vannak írva a T betűk, stb.), így a lehetőségek száma 26!.

Kidolgozott feladat.

Egy cukrászdában kilencféle fagylalt kapható. Négy gombócot szeretnék enni, mégpedig különböző ízűeket.

(a) Hány lehetőségem van, ha tölcsérbe kérem a fagyit? (Fontos, hogy milyen sorrendben kerülnek a gombócok a tölcsérbe, hiszen ez meghatározza, hogy milyen sorrendben fogom megenni őket.)

(b) Hány lehetőségem van, ha kehelybe kérem a fagyit? (Itt nem számít a sorrend, hiszen a kehelyből bármilyen sorrendben kiehetem a gombócokat.)

Megoldás.

(a) Az első (alsó) gombócra 9 lehetőség van, a másodikat már csak 8-féleképpen választhatom (hiszen nem akarok két egyformát), a harmadikra 7 lehetőségem van, a negyedikre pedig 6. Tehát a tölcsér-összeállítások száma
$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6.$$

(b) Minden egyes fagyikehely esetén $4! = 24$ különböző sorrendben lehetne a gombócokat a kehelyből tölcsérbe pakolni (ha mégis tölcsérből szeretném enni a fagyit). Ezért itt a lehetőségek száma 24-ed része az (a) részben kapott értéknek. Tehát a fagyikelyhek száma
$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = \binom{9}{4}.$$

Megjegyzés. Az előző feladat „cédulás" módszerét is használhattuk volna. Készítek 9 cédulát, amelyek közül négyre az 1, 2, 3, 4 számokat írom, a maradék ötre pedig egy-egy X-et írok, és elhelyezem a cédulákat a pultban a fagyikra. Ez kicsit furcsa módja a rendelés leadásának, de kiderül belőle, hogy annyi lehetőségem van a négygombócos tölcsér összeállítására, ahány sorrendje van az 1, 2, 3, 4, X, X, X, X, X karaktereknek, azaz $\frac{9!}{5!}$. (Ellenőrizd, hogy ez tényleg ugyanannyi, mint amit fent az (a) résznél kaptunk!) Ha kehelybe kérem a gombócokat, akkor 1, 2, 3, 4 helyett I betűket írok (I, mint „Igen, ezt kérem!"), tehát itt az I, I, I, I, X, X, X, X, X karakterek sorrendjei kódolják a választási lehetőségeket. Innen láthatjuk, hogy a lehetőségek száma $\frac{9!}{4! \cdot 5!}$ (Ellenőrizd, hogy ez tényleg ugyanannyi, mint amit fent a (b) résznél kaptunk!)

Kidolgozott feladat.

Egy ötfős család betér egy pizzériába, ahol 12-féle pizza van az étlapon. Hányféleképpen rendelhetnek? (Mindenki egy pizzát kér, és kérhetnek többen is ugyanolyan pizzát.)

(a) Vizsgáljuk a kérdést először a pincér szemszögéből: neki tudnia kell, hogy melyik pizzát melyik vendég elé kell tennie.

(b) Vizsgáljuk most a szakács szemszögéből a dolgot: neki elég azt tudnia, hogy melyik fajta pizzából hányat készítsen (hogy melyiket ki fogja megenni, az neki mindegy).

Megoldás.

(a) Anya 12-féleképpen választhat, tőle függetlenül apa is 12-féleképpen dönthet, és Piroska, Farkas és Nimród is 12-12 pizza közül választhat. Ezért a lehetséges rendelések száma
$$12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^5.$$

(b) A szakács szemszögéből a rendeléseket célszerű a „karika-pálcika" módszerrel kódolni. Öt karikát írunk le, ezek jelképezik a pizzákat. Ezt a karika-sort 12 részre vágjuk 11 pálcika segítségével. Ahány karika van az első pálcikától balra, annyit kell készíteni az 1-es számú pizzából (tegyük fel, hogy az étlapon meg vannak számozva a pizzák). Az első két pálcika közötti karikák száma mutatja, hogy hányat kell készíteni a 2-es számú pizzából, ..., az utolsó pálcikától jobbra lévő karikák mutatják, hogy hányat kell készíteni a 12-es számú pizzából. Például a $\bigcirc||\bigcirc\bigcirc||||||\bigcirc\bigcirc|||$ sorozat azt jelenti, hogy az 1-es pizzából egyet, a 3-as és 9-es pizzából pedig kettőt-kettőt rendeltek. A rendelések tehát bijektíven megfelelnek 5 karika és 11 pálcika sorrendjeinek, ezek száma pedig
$$\frac{16!}{5! \cdot 11!} = \binom{16}{5}.$$

2.1. feladat. Az előző három feladatban az összeszámlálási problémák mind a hat alapesete megjelent (ismétléses és ismétlés nélküli kombináció, variáció és permutáció). Melyik feladatnál melyik alapeset lépett fel?

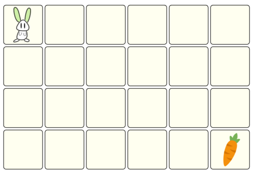
2.2. feladat. Hányféle sorrendben lehet leírni a TETTETTETEK szó betűit?

2.3. feladat. Hányféleképpen helyezhetünk el tizenegy embert három szobában, ha a szobák hat-, négy- és egyszemélyesek?

2.4. feladat. Öt diák vizsgázik. Hányféle eredménye lehet a vizsgának, ha tudjuk, hogy egy diák sem bukott meg, és a vizsgaértékelés ötfokozatú?

2.5. feladat. Egy bizottságnak 7 tagja van, elnököt és elnökhelyettest választanak. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha a tagok egyike sem vállalhat egynél több feladatot?

2.6. feladat. Hányféle útvonalon juthat el a nyúl a répához, ha csak jobbra és lefelé ugorhat?



2.7. feladat. Az ötös lottón 90 számból 5 számot húznak ki. Hányféle 3-találatos szelvény lehetséges egy héten? (Egy szelvényen 1-től 90-ig szerepelnek a számok, melyek közül a fogadó ötöt jelöl meg.)

2.8. feladat. Egy négytagú társaság a következőképpen akar feljutni egy tetőteraszra: ketten lifttel mennek egyszerre, ketten pedig egymás után mászva a villámhárítón jutnak fel. Hányféle sorrendben érkezhetnek meg a teraszra, ha feltesszük, hogy a lifttel utazó két személy egyszerre érkezik, de ezt leszámítva nincs egyidejű érkezés?

2.9. feladat. Az ajándékboltban ötféle mesekönyv, háromféle csokoládé és hatféle játék kapható. Hányféleképpen vásárolhat egy szülő gyermekének 4 különböző ajándékot úgy, hogy pontosan 2 mesekönyv legyen köztük?

2.10. feladat. Hányféle sorrendben haladhat át a forgóajtón egy 8 házaspárból álló társaság, ha a házastársak közvetlenül egymás után mennek?

2.11. feladat. Öt házaspár foglal helyet egy kerek asztalnál. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni? (Két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk azonosnak, ha mindenkinek ugyanaz a bal, illetve jobb oldali szomszédja.)

2.12. feladat. Öt házaspár foglal helyet egy kör alakú asztalnál. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni, de sem két férfi, sem két nő nem ülhet egymás mellé?

Kidolgozott feladat.

Egy cukrászdában 14-féle süteményt árulnak: 3-féle pitét, 6-féle rétest és 5-féle tortaszeletet.

(a) Hányféleképpen vásárolhatunk 4 különböző süteményt?

(b) Hányféleképpen vásárolhatunk 4 különböző süteményt úgy, hogy legfeljebb két tortaszelet legyen között-tük?

Megoldás.

(a) Mivel a sorrend nem számít, és egy fajtából legfeljebb egyet vehetünk, a lehetőségek száma $\binom{14}{4}$.

(b) Három egymást kizáró esetet különböztethetünk meg:

1. Nem veszünk egyetlen tortaszeletet sem. Ekkor mind a négy sütit a maradék 9 fajtából választjuk, ezért a lehetőségek száma $\binom{9}{4}$
2. Egy tortaszeletet veszünk. Ezt $\binom{5}{1}$-féleképpen választhatjuk ki, a maradék 9 fajtából hármat pedig $\binom{9}{3}$-féleképpen választhatunk, így a lehetőségek száma $\binom{5}{1} \cdot \binom{9}{3}$.
3. Két tortaszeletet veszünk. Ezt $\binom{5}{2}$-féleképpen választhatjuk ki, a maradék 9 fajtából kettőt pedig $\binom{9}{2}$-féleképpen választhatunk, így a lehetőségek száma $\binom{5}{2} \cdot \binom{9}{2}$.

A végeredményt a fentiek összegeként kapjuk:

$$\binom{5}{0} \cdot \binom{9}{4} + \binom{5}{1} \cdot \binom{9}{3} + \binom{5}{2} \cdot \binom{9}{2}.$$

2.13. feladat. Hat óvodás és öt iskolás gyerek közül szeretnénk úgy kiválasztani négy gyereket, hogy legalább két óvodás legyen közöttük. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

2.14. feladat. Húsz láda áruból 15 láda első osztályú, a többi másodosztályú. Hányféleképpen választhatunk ki 5 ládát úgy, hogy legfeljebb 2 másodosztályú legyen köztük?

2.15. feladat. Egy csomag francia kártya 52 lapból áll, 4-féle színből 13-13 lapot tartalmaz.

(a) Hányféleképpen húzhatunk a pakliból négy olyan lapot, amelyek közül pontosan két lap színe egyezik meg?

(b) Hányféleképpen húzhatunk ki négy olyan lapot, amelyek között pontosan két szín fordul elő?

2.16. feladat. Van 2 sárga, 3 fehér és 1 lila golyónk. Hányféleképpen állíhatunk össze ezekből egy 5 golyóból álló sorozatot?

Kidolgozott feladat.

Albert idén eddig 9 jegyet szerzett biológiából.

(a) Hányféleképpen alakulhattak Albert jegyei, ha figyelembe vesszük, hogy milyen sorrendben kapta őket?

(b) Hányféleképpen alakulhatott Albert jegyeinek eloszlása, ha csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy hány ötöst, hány négyest, stb. szerzett?

Megoldás.

(a) Az első jegyére 5 lehetőség van, a másodikra is 5 lehetőség van, és így tovább. Ezért Albert jegyei a sorrendet is figyelembe véve $5 \cdot \ldots \cdot 5 = 5^9$-féleképpen alakulhattak.

(b) Ha csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy az 1, 2, 3, 4, 5 osztályzatokból hányat szerezett, akkor kódolhatjuk karika-pálcika sorozatokkal a jegyek eloszlását. Kilenc karikánk lesz, ezek jelképezik a kilenc jegyet, amit Albert kapott. Ezt a karika-sort 5 részre vágjuk 4 pálcika segítségével; az egyes részekbe eső karikák száma mutatja, hogy melyik osztályzatból hányat szerzett Albert. Például a ◯ | | ◯◯ | ◯◯ | ◯◯◯◯ sorozat azt jelenti, hogy egy 1-est, két 3-ast, két 4-est és négy 5-öst kapott. Tehát annyiféle eloszlása lehetséges Albert jegyeinek, ahány sorrendje van 9 karikának és 4 pálcikának, vagyis

$$\frac{13!}{9! \cdot 4!} = \binom{13}{9} = \binom{5+9-1}{9}.$$

Kidolgozott feladat.

Gipsz Jakab dimat2 gyakorlatot tart. Tegnap íratta a zh-t; 28 dolgozatot kell kijavítania.

(a) Hányféleképpen alakulhatnak a pontszámok?

(b) Öt nap alatt kellene a dolgozatokat kijavítani. Ha nagyon nekidurálja magát Jakab, akkor akár egy nap is ki tudná javítani az összes dolgozatot, de úgy döntött, hogy legalább három dolgozatot javít mind az öt napon. Hányféleképpen oszthatja be a munkát? (Csak az számít, hogy melyik napra hány dolgozat jut, az mindegy, hogy pontosan mely dolgozatok, és az egy napon javított dolgozatok sorrendje is irreleváns).

Megoldás.

(a) A dolgozat 40 pontos, így minden dolgozatnál 41-féle pontszám képzelhető el (0-tól 40-ig). Az egyes dolgozatoknál egymástól függetlenül bármilyen pontszám előfordulhat, ezért a lehetőségek száma $41 \cdot \ldots \cdot 41 = 41^{28}$.

(b) A munkabeosztást olyan karika-pálcika sorozatokkal kódolhatjuk, amelyekben 28 karika van (ezek jelképezik a dolgozatokat), és a karikák sorát 4 pálcikával osztjuk öt szakaszra (a pálcikák adják a napok közötti határvonalakat). Figyelnünk kell arra, hogy mind az öt napra legalább három dolgozat jusson. Ezért „elspájzolunk” $3 \cdot 5 = 15$ karikát, ezután a maradék 13 karikát és 4 pálcikát leírjuk valamilyen sorrendben, majd mind az öt szakaszhoz hozzáadunk még 3 karikát az elspájzoltakból. Ilyen módon (bijektíven) megfeleltettük a lehetséges munkabeosztásokat 13 karika és 4 pálcika sorrendjeinek, így a lehetőségek száma
$$\frac{17!}{13! \cdot 4!}.$$

2.17. feladat. Egy boltban 6-féle CD-t lehet kapni. Hányféleképpen lehet 4 CD-t vásárolni, ha egyféle CD-ből többet is vehetünk?

2.18. feladat. Egy üzletben ötféle szaloncukrot lehet kapni: kókuszos, vajkaramellás, zselés, gumicukros és marcipános ízűt. Hányféleképpen lehet tíz szaloncukrot vásárolni, ha minden szaloncukorból van legalább tíz?

2.19. feladat. Hányféleképpen választhatunk 30 darabot 100, 200 és 500 forintos bankjegyekből, ha feltételezzük, hogy mindegyikből van legalább 30 darab?

2.20. feladat. Mikulás puttonyában 50 szaloncukor van, ezt fogja kiosztani 10 gyereknek.

(a) Hányféleképpen oszthatja ki a szaloncukrokat, ha semmiféle megkötés nics, akár kaphatja egy gyerek is mind az ötvenet?

(b) Hányféleképpen oszthatja ki a szaloncukrokat úgy, hogy minden gyerek legalább kettőt kapjon?

(A szaloncukrok egyformák, de a gyerekek persze nem. A kiosztás sorrendje nem fontos, csak az, hogy ki hány szaloncukrot kap.)

2.21. feladat. Egy turistacsoport egy város 20 nevezetességét szeretné meglátogatni 4 nap alatt. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha 1 nap alatt akár az összes nevezetesség megtekinthető, és számít az, hogy egy adott napon milyen sorrendben tekintik meg a látnivalókat?

2.22. feladat. Összesen 15 különböző csomagot kell házhoz vitetnünk 3 kézbesítővel. Hányféleképpen osztható szét a munka, ha egy kézbesítő akár 15 csomagot is elbír, és számít az is, hogy egy-egy kézbesítő milyen sorrendben viszi ki a neki kiosztott csomagokat?

2.23. feladat. Hányféleképpen helyezhetünk el 24 különböző könyvet egy 7-polcos szekrényben, ha bármelyik polcon elfér mind a 24 könyv?

Kidolgozott feladat.

(a) Hányféle sorrendben lehet leírni az ILLIBERALIZMUS szó betűit?

(b) Hányféle sorrendben lehet leírni az ILLIBERALIZMUS szó betűit úgy, hogy két magánhangzó ne kerüljön egymás mellé?

Megoldás.

(a) Összesen 14 betű van, ebből 3 I betű és 3 L betű, ezért a sorrendek száma

$$\frac{14!}{3! \cdot 3!}.$$

(b) Először írjuk le a 8 mássalhangzót; erre $\frac{8!}{3!}$ lehetőségünk van. A leírt betűk között 7 „köz” van, és van még egy-egy hely az elején és a végén. Ebből a 9 helyből kell kiválasztanunk 6 helyet a magánhangzók számára; ezt $\binom{9}{6}$-féleképpen tehetjük meg. Ezután a kiválasztott 6 helyre $\frac{6!}{3!}$-féle sorrendben írhatjuk be a magánhangzókat. A végeredmény tehát

$$\binom{9}{6} \cdot \frac{6!}{3!} \cdot \frac{8!}{3!}.$$

2.24. feladat. Hányféleképpen lehet 5 (egyforma) fehér és 10 (egyforma) zöld golyót úgy sorbarendezni, hogy két fehér ne kerüljön egymás mellé?

2.25. feladat. Egy állatszelídítő 5 oroszlánt és 4 tigrist szeretne bevezetni egymás után a porondra úgy, hogy 2 tigris nem jöhet egymás után. Hányféleképpen teheti ezt meg? (Az állatszelídítő természetesen meg tudja különböztetni az állatait.)

2.26. feladat. Hány olyan (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető a KARIKA szó betűiből, ahol 2 magánhangzó nem kerülhet egymás mellé?

2.27. feladat. Hányféle olyan „szó” képezhető a KOMBINATORIKA szó betűiből, melyben nem áll egymás mellett két

(a) mássalhangzó,

(b) magánhangzó?

2.2. Szita-formula

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

☞ https://youtu.be/e4ucRzt98lA

2.28. feladat. Egy kutatóintézetben 67-en dolgoznak. Angolul 47-en, németül 35-en, franciául 20-an beszélnek, németül és angolul 23-an, angolul és franciául 12-en, németül és franciául 11-en, mindhárom nyelven 5-en beszélnek. Hányan vannak, akik egy nyelvet sem beszélnek?

2.29. feladat. Egy 50 fős osztályból 25-en járnak matematika, 19-en fizika és 30-an kémia szakkörre. 10-en járnak matematika és fizika, 12-en matematika és kémia, 16-an fizika és kémia szakkörre, valamint 8-an járnak mindhárom szakkörre. Hányan vannak, akik egyik szakkörre sem járnak?

Kidolgozott feladat.

A magyar kártyában négyféle szín van (zöld, piros, makk, tök), minden színből 8 lap.

(a) Hányféleképpen választhatunk 5 lapot úgy, hogy legyen köztük zöld?

(b) Hányféleképpen választhatunk 5 lapot úgy, hogy legyen köztük zöld is és piros is?

(A választott lapok sorrendje nem számít.)

Megoldás.

(a) Összesen $\binom{32}{5}$-féleképpen tudunk a 32 lapból 5-öt választani. Ezek között $\binom{24}{5}$ olyan választás van, ahol nem szerepel zöld (hiszen a nem zöld lapok száma 24). Ezért a legalább egy zöld lapot tartalmazó kiválasztások száma

$$\binom{32}{5}-\binom{24}{5}.$$

(b) Az összes lehetőségek száma $\binom{32}{5}$, ezen belül kétféle „rossz” lehetőség van: amikor nincs zöld (ilyen lehetőségből $\binom{24}{5}$ van), illetve amikor nincs piros (ebből is $\binom{24}{5}$ van). Azon esetek száma, amikor se zöld se piros lap nincs a kiválasztottak között $\binom{16}{5}$, hiszen a makk és tök lapok száma 16. Mindezeket felhasználva a szita-formula segítségével kapjuk a megoldást:

$$\binom{32}{5}-\binom{24}{5}-\binom{24}{5}+\binom{16}{5}.$$

Kidolgozott feladat.

Gipsz Jakab elveszítette a dolgozatokat, így találomra fog gyakjegyeket osztani a 28 hallgatónak.

(a) Hányféleképpen oszthatja ki a gyakjegyeket?

(b) Hányféleképpen oszthatja ki a gyakjegyeket úgy, hogy legyen köztük egyes, kettes és hármas is?

Megoldás.

(a) Minden hallgatónál 5-féle jegy közül választhat Jakab egymástól függetlenül, ezért a lehetőségek száma $5 \cdot \ldots \cdot 5 = 5^{28}$.

(b) A szita-formulát fogjuk használni az alábbi halmazokkal: legyen U az összes jegykiosztások halmaza, ezen belül pedig R_1, R_2, illetve R_3 azon jegykiosztások halmaza, amelyekben nem szerepel egyes, kettes, illetve hármas. A feladat megoldásához az $|\overline{R_1 \cup R_2 \cup R_3}|$ halmaz elemszámát kell meghatároznunk. Azt már láttuk, hogy $|U| = 5^{28}$, és hasonlóan kapjuk, hogy

- $|R_1| = |R_2| = |R_3| = 4^{28}$ (pl. R_1-nél csak 2-es, 3-as, 4-es és 5-ös jegyek szerepelhetnek),
- $|R_1 \cap R_2| = |R_1 \cap R_3| = |R_2 \cap R_3| = 3^{28}$ (pl. $R_1 \cap R_2$-nél csak 3-as, 4-es és 5-ös jegyek szerepelhetnek),
- $|R_1 \cap R_2 \cap R_3| = 2^{28}$ (csak 4-es és 5-ös jegyek szerepelhetnek).

Behelyettesítve a szita-formulába, megkapjuk a választ a feladat kérdésére:

$$\begin{aligned}|\overline{R_1 \cup R_2 \cup R_3}| &= |U| - |R_1| - |R_2| - |R_3| + |R_1 \cap R_2| + |R_1 \cap R_3| + |R_2 \cap R_3| - |R_1 \cap R_2 \cap R_3| = \\ &= 5^{28} - 4^{28} - 4^{28} - 4^{28} + 3^{28} + 3^{28} + 3^{28} - 2^{28} = \\ &= 5^{28} - 3 \cdot 4^{28} + 3 \cdot 3^{28} - 2^{28}.\end{aligned}$$

2.30. feladat. Hányféleképpen ültetheti le Hófehérke a hét törpét egy padra úgy, hogy Tudor és Morgó ne üljön egymás mellett?

2.31. feladat. Az a, b, c, d, e, f, g betűk permutációi között hány olyan van, amelyben…

(a) az a, b, c betűk nem egymás mellett állnak (bármely kettő állhat egymás mellett, de mind a három már nem)?

(b) az a, b, c betűk közül semelyik kettő nincs egymás mellett?

2.32. feladat. Egy cukrászdában 14-féle süteményt árulnak: 3-féle pitét, 6-féle rétest és 5-féle tortaszeletet.

(a) Hányféleképpen vásárolhatunk 4 különböző süteményt úgy, hogy legyen köztük pite is és rétes is?

(b) Hányféleképpen vásárolhatunk 4 különböző süteményt úgy, hogy legyen köztük pite, rétes és tortaszelet is?

2.33. feladat. Hány olyan háromjegyű szám van, amely nem osztható se 2-vel, se 3-mal, se 5-tel?

2.34. feladat. Hány olyan háromjegyű szám van, amely…

(a) nem osztható se 5-tel, se 7-tel?

(b) nem osztható se 4-gyel, se 5-tel, se 6-tal?

(c) nem osztható se 6-tal, se 7-tel, és 2-esre végződik?

(d) nem osztható se 6-tal, se 7-tel, és nem 2-esre végződik?

2.35. feladat. Hány olyan 7-betűs „szó” készíthető az A, B, C, D betűkből, amelyben mind a négy betű szerepel?

2.36. feladat. Hány olyan 8-karakteres jelszó létezik, amely kisbetűkből, számjegyekből és szimbólumokból áll, és mindháromból legalább egyet valóban tartalmaz is? (Kisbetűből 26, számjegyből 10, szimbólumból pedig 32 áll rendelkezésre.)

2.37. feladat. Határozzuk meg az $\{a, b, c, d, e, f\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ leképezések számát. Hány szürjektív és hány injektív van ezek között?

2.38. feladat. Határozzuk meg az $\{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c, d, e, f\}$ leképezések számát. Hány szürjektív és hány injektív van ezek között?

2.39. feladat. Hányféleképpen festhetünk ki n szobát 2-féle színnel, ha minden színt legalább egyszer felhasználunk?

2.40. feladat. Hányféleképpen festhetünk ki n szobát 3-féle színnel, ha minden színt legalább egyszer felhasználunk?

2.3. Binomiális tétel

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

☞ https://youtu.be/udp1Zw1Azws

Kidolgozott feladat.

A totóban 14 mérkőzésnél kell 1-est, 2-est vagy X-et tippelni, aszerint, hogy szerintünk a hazai vagy a vendég csapat fog nyerni, vagy pedig döntetlen lesz az eredmény.

(a) Hányféleképpen lehet kitölteni egy totószelvényt?

(b) Hány olyan kitöltés van, ahol k darab mérkőzéshez teszünk X-et ($k = 0, 1, \ldots, 14$)?

(c) Hasonlítsuk össze az (a) és a (b) rész eredményét. Milyen következtetést vonhatunk le?

Megoldás.

(a) Mind a 14 meccsnél egymástól függetlenül háromféleképpen tippelhetünk, ezért a kitöltések száma 3^{14}.

(b) Először válasszuk ki azt a k darab mérkőzést, ahova X-et teszünk; erre $\binom{14}{k}$ lehetőségünk van. A maradék $14-k$ hely mindegyikére 1-est vagy 2-est tehetünk, így ezeket 2^{14-k}-féle módon tölthetjük ki. A k darab X-et tartalmazó kitöltések száma tehát $\binom{14}{k} \cdot 2^{14-k}$.

(c) Ha a (b) résznél kapott számokat összeadjuk k minden lehetséges értékére, akkor az összes kitöltést megszámoltuk (az X-ek száma szerinti csoportosításban), ezért ugyanazt kell kapnunk, mint az (a) részben:

$$\sum_{k=0}^{14} \binom{14}{k} \cdot 2^{14-k} = 3^{14}.$$

A bal oldali összeg nem más, mint a $3^{14} = (1+2)^{14}$ hatvány binomiális tétel szerinti kifejtése.

Kidolgozott feladat.

Számítsuk ki az alábbi együtthatókat a $\left(7x^5 + \dfrac{5}{x^7}\right)^9$ hatvány kifejtésében.

(a) x^{27} együtthatója

(b) $\dfrac{1}{x^{27}}$ együtthatója

Megoldás. A binomiális tétellel kifejtve a hatványt,

$$\binom{9}{i} \cdot \left(7x^5\right)^i \cdot \left(\frac{5}{x^7}\right)^{9-i}$$

alakú tagokat kapunk ($i = 0, 1, \ldots, 9$). Alakítsuk át ezt a tagot úgy, hogy jobban látszódjon x kitevője és az együttható:

$$\binom{9}{i} \cdot \left(7x^5\right)^i \cdot \left(\frac{5}{x^7}\right)^{9-i} = \binom{9}{i} \cdot 7^i \cdot 5^{9-i} \cdot x^{12i-63}.$$

(a) A $12i - 63$ kitevő 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, ezért soha nem lesz 27, így x^{27} együtthatója 0.

(b) A -27-es kitevőt megkapjuk $i = 3$ esetén, tehát $\frac{1}{x^{27}}$ együtthatója $\binom{9}{3} \cdot 7^3 \cdot 5^6$.

2.41. feladat. Állapítsuk meg minél kevesebb számolással (ránézésre) az alábbi összegek értékét.

(a) $\binom{6}{0} \cdot 3^6 + \binom{6}{1} \cdot 3^5 \cdot 7 + \binom{6}{2} \cdot 3^4 \cdot 7^2 + \binom{6}{3} \cdot 3^3 \cdot 7^3 + \binom{6}{4} \cdot 3^2 \cdot 7^4 + \binom{6}{5} \cdot 3^1 \cdot 7^5 + \binom{6}{6} \cdot 7^6$

(b) $\binom{5}{0} - \binom{5}{1} \cdot 3 + \binom{5}{2} \cdot 3^2 - \binom{5}{3} \cdot 3^3 + \binom{5}{4} \cdot 3^4 - \binom{5}{5} \cdot 3^5$

Bónusz feladat: adjunk kombinatorikai értelmezést az (a) részre (a fenti totós feladathoz hasonlóan).

2.42. feladat. Mi a $\left(3x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$ kifejezésben a konstans tag a hatványozás elvégzése és a rendezés után?

2.43. feladat. Számítsuk ki az alábbi tagok együtthatóját a $\left(3x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^5$ hatvány kifejtésében.

(a) x^{-5}

(b) x^0

(c) x^3

(d) x^5

2.44. feladat. Számítsuk ki x^{19} együtthatóját az $(1 + x^3 - x^4)^{12}$ hatvány kifejtésében.

2.45. feladat. Számítsuk ki x^{18} és x^{31} együtthatóját az $(1 + x^3 - x^4)^{12}$ hatvány kifejtésében.

2.46. feladat. Számítsuk ki az alábbi tagok együtthatóját a $\left(2x^2 - x + \frac{1}{x}\right)^{12}$ hatvány kifejtésében.

(a) x^0

(b) x^1

(c) x^2

(d) x^{-1}

3. Gráfelmélet

3.1. Fokszám, izomorfizmus

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

https://youtu.be/dc0as9b9hPA

3.1. feladat. Lehetséges-e, hogy egy...

(a) 5-tagú társaságban mindenkinek pontosan 3 ismerőse van?

(b) 6-tagú társaságban mindenkinek pontosan 4 ismerőse van?

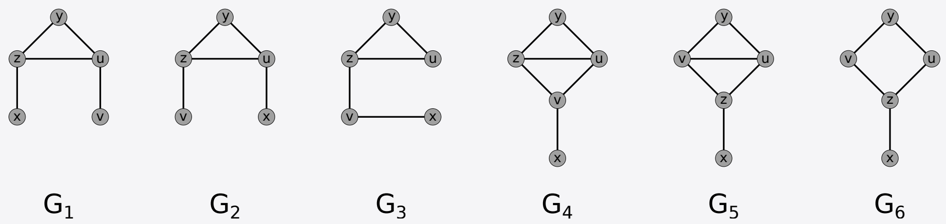
Kidolgozott feladat.

A G egyszerű gráfról a következőket tudjuk:

- $V(G) = \{x, y, z, u, v\}$;
- $\{y, u\} \in E(G)$ és $\{z, u\} \in E(G)$;
- G összefüggő gráf;
- $d(x) = 1$, $d(y) = 2$, $d(z) = 3$, $d(u) \leq 3$, $d(v) \leq 3$.

Adjuk meg (rajzoljuk le) az összes gráfot, ami megfelel ezeknek a feltételeknek. Ha az izomorf gráfokat nem különböztetnénk meg, akkor hány megoldás lenne?

Megoldás. Összesen hat ilyen gráf van:



Az ábráról látszik, hogy $G_1 \cong G_2$ és $G_4 \cong G_5$. Megszámolva, hogy melyik gráfban melyik fokszám hányszor fordul elő, majdnem minden más izomorfiát ki lehet zárni, csak G_3 és G_6 rendelkeznek egyforma „fokszám-statisztikával". De G_3-ban van három hosszúságú kör, míg G_6 ban nincs, így ők sem lehetnek izomorfak. Izomorfia erejéig tehát 4 lehetőség van (pl. G_1, G_3, G_4, G_6).

Kidolgozott feladat.

A G egyszerű gráfnak 6 csúcsa és 8 éle van. A csúcsok fokszámait egy kivételével ismerjük: $2, 2, 2, 3, 4$.

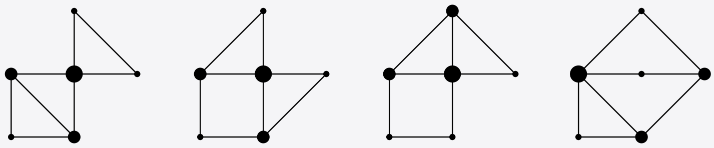
(a) Mekkora hiányzó fokszám?

(b) Izomorfia erejéig hány ilyen gráf van?

Megoldás.

(a) A fokszámok összege az élek számának kétszerese, vagyis 16. A megadott fokszámok összege $2 + 2 + 2 + 3 + 4 = 13$, ezért a hiányzó fokszám 3.

(b) Izomorfia erejéig négy ilyen gráf van:



Hogy a négy gráf között nincsenek izomorfak, az belátható úgy, hogy megvizsgáljuk, hogy milyen fokszámú csúcsok milyen fokszámúakkal vannak összekötve, pl. össze van-e kötve a két harmadfokú csúcs, megy-e él másodfokú csúcsok között, stb. A csúcsokat a fokszámuknak megfelelően kisebb-nagyobb pöttyökkel ábrázoltuk, hogy jobban látszódjon mindez.

3.2. feladat. A G egyszerű gráfnak 5 csúcsa van, a csúcsok fokszámait egy kivételével ismerjük: $3, 3, 4, 4$. Mekkora lehet a hiányzó fokszám? Izomorfia erejéig hány ilyen gráf van?

3.3. feladat. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a csúcsok fokszámai az alábbiak? Ha van, rajzoljunk egy ilyen gráfot, sőt, próbáljuk megadni izomorfia erejéig az összes ilyen gráfot.

(a) $1, 2, 2, 2, 3$

(b) $2, 2, 2, 2, 4, 4$

(c) $0, 2, 2, 4, 4, 4$

(d) $1, 1, 2, 2, 3, 3$

(e) $2, 2, 3, 3, 5, 5$

(f) $1, 2, 2, 2, 4, 5, 7, 7$

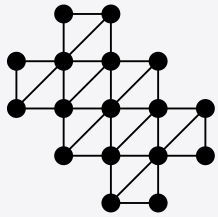
3.2. Euler-vonal, Hamilton-kör

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

☞ https://youtu.be/wyi4wDMBdzo

Kidolgozott feladat.

Tekintsük az alábbi G gráfot.



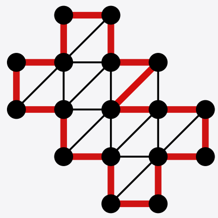
(a) Van-e benne nyílt, illetve zárt Euler-vonal?

(b) Van-e benne Hamilton-út, illetve Hamilton-kör?

Megoldás.

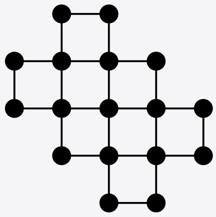
(a) Mivel G-ben több, mint két páratlan fokú csúcs van (a 17 csúcsból 10-nek a foka 3 vagy 5), nincs benne se zárt se nyílt Euler-vonal.

(b) Az ábra mutat egy Hamilton-kört a gráfban, ami egyúttal persze Hamilton-út is.



Kidolgozott feladat.

Tekintsük az alábbi G gráfot.



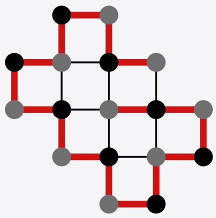
(a) Van-e benne nyílt, illetve zárt Euler-vonal?

(b) Van-e benne Hamilton-út, illetve Hamilton-kör?

Megoldás.

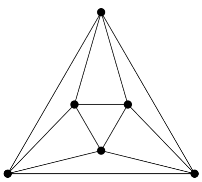
(a) Mivel G összefüggő, és minden csúcs foka páros (2 vagy 4), van benne zárt Euler-vonal, de nincs benne nyílt Euler-vonal.

(b) Az ábra mutat egy Hamilton-utat a gráfban. Az ábra azt is mutatja, hogy a gráf csúcsait ki lehet színezni két színnel úgy, hogy szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek (az ilyen gráfot páros gráfnak nevezzük). Ha lenne Hamilton-kör, annak hossza 17 lenne (hiszen G-nek 17 csúcsa van), márpedig az lehetetlen, hogy egy páratlan hosszúságú kör mentén felváltva legyenek fekete és szürke csúcsok. Tehát nincs Hamilton-kör G-ben.

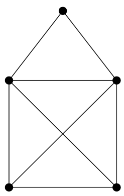


3.4. feladat. Keressünk (zárt vagy nyílt) Euler-vonalat az alábbi gráfokban. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-euler.html

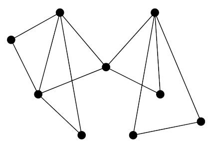
(a)



(b)

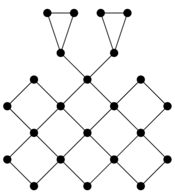


(c)

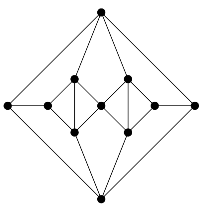


3.5. feladat. Keressünk (zárt vagy nyílt) Euler-vonalat az alábbi gráfokban. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-euler.html

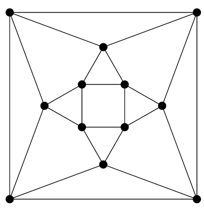
(a)



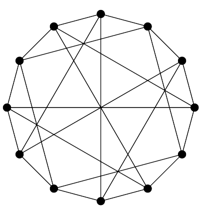
(c)



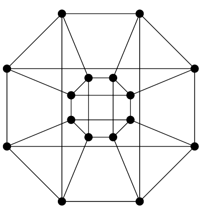
(e)



(b)

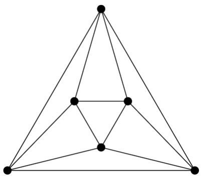


(d)

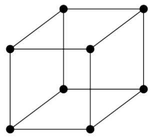


3.6. feladat. Keressünk Hamilton-utat és Hamilton-kört az alábbi gráfokban. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-hamilton.html

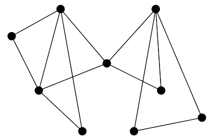
(a)



(b)

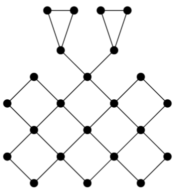


(c)

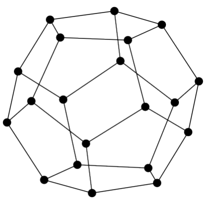


3.7. feladat. Keressünk Hamilton-utat és Hamilton-kört az alábbi gráfokban. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-hamilton.html

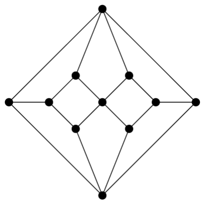
(a)



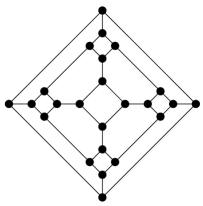
(b)



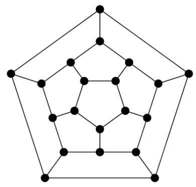
(c)



(d)



(e)



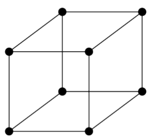
3.3. Síkgráfok

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

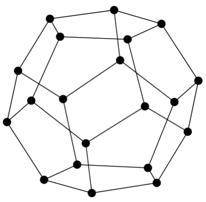
https://youtu.be/FyIR_GT_J74

3.8. feladat. Síkgráfok-e alábbi gráfok? (Amelyik igen, azt rajzoljuk le metszéspontok nélkül; amelyik nem, abban keressük meg $K_{3,3}$ vagy K_5 egy felosztását.) A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt: http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-sik.html

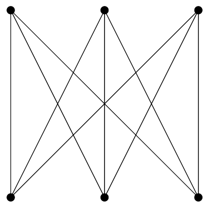
(a)



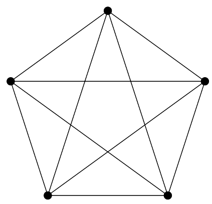
(b)



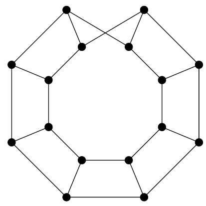
(c)



(d)

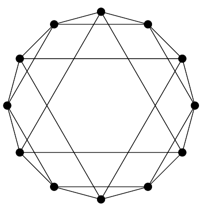


(e)

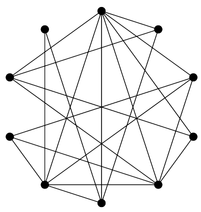


3.9. feladat. Síkgráfok-e alábbi gráfok? (Amelyik igen, azt rajzoljuk le metszéspontok nélkül; amelyik nem, abban keressük meg $K_{3,3}$ vagy K_5 egy felosztását.) A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt: http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-sik.html

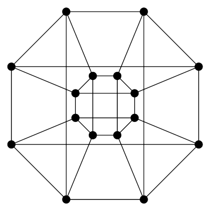
(a)



(b)



(c)



3.4. Fák és erdők

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

https://youtu.be/bV7uhWyf6wQ

Kidolgozott feladat.

A G gráf egy fa, melynek hat csúcsa van. A legnagyobb fokszámú csúcs harmadfokú (csak egy harmadfokú csúcs van).

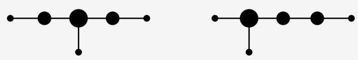
(a) Mekkorák lehetnek a csúcsok fokszámai?

(b) Rajzoljuk le az összes ilyen fát (izomorfia erejéig).

Megoldás.

(a) Minden fának van legalább két elsőfokú csúcsa (kivéve, ha egyetlen csúcsból áll a fa), pl. a leghosszabb út két végpontja. Így a fokszámok közül már hármat tudunk: $1, 1, 3$. Fában az élek száma mindig eggyel kisebb a csúcsok számánál, ezért öt él van, és így a fokszámok összege 10. Ezért a hiányzó három fokszám összege $10 - (1 + 1 + 3) = 5$. Csak egyetlen módon lehe az 5-öt háromnál kisebb pozitív egészek összegére felbontani: $5 = 1 + 2 + 2$. Tehát a fokszámok (nagyság szerinti sorrendben): $1, 1, 1, 2, 2, 3$.

(b) Izomorfia erejéig két ilyen fa van:



Hogy ezek nem izomorfak, az például abból következik, hogy az egyikben nincs éllel összekötve a két másodfokú csúcs, a másikban pedig össze vannak kötve.

3.10. feladat. Izomorfia erejéig…

(a) hány 5-csúcsú fa van?

(b) hány 5-élű fa van?

3.11. feladat. Izomorfia erejéig…

(a) hány 3-csúcsú fa van?

(b) hány 4-csúcsú fa van?

(c) hány 6-csúcsú fa van?

(d) hány 3-élű fa van?

(e) hány 4-élű fa van?

(f) hány 6-élű fa van?

(g) hány 3-csúcsú erdő van?

(h) hány 4-csúcsú erdő van?

3.12. feladat. Egy 20-csúcsú fának 18 darab elsőfokú csúcsa van.

(a) Mennyi lehet a további két csúcs fokszáma?

(b) Milyen hosszú lehet a leghosszabb útja?

(c) Hány ilyen fa van izomorfia erejéig?

Kidolgozott feladat.

Hány éle van annak az erdőnek, ami 3 fából áll, és 8 csúcsa van?

Megoldás. Jelölje az egyes fák csúcsszámát v_1, v_2 és v_3, az élszámokat pedig e_1, e_2 és e_3. Egy fának mindig eggyel kevesebb éle van, mint ahány csúcsa, ezért $e_i = v_i - 1$ $(i = 1, 2, 3)$. Az élek száma tehát összesen

$$e_1 + e_2 + e_3 = (v_1 - 1) + (v_2 - 1) + (v_3 - 1) = v_1 + v_2 + v_3 - 3 = 8 - 3 = 5.$$

3.13. feladat. Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány csúcsa van az erdőnek?

3.14. feladat. Hány fából állhat egy olyan erdő, aminek 10 csúcsa és 7 éle van?

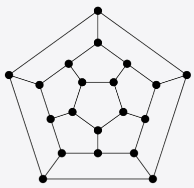
3.5. Páros gráfok

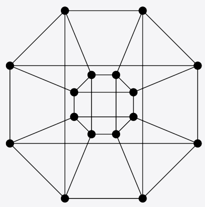
A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

☞ https://youtu.be/W-VujGiJYkA

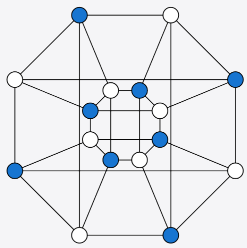
Kidolgozott feladat.

Párosak-e alábbi gráfok? (Amelyik igen, azt színezzük ki két színnel; amelyik nem, abban keressünk páratlan hosszúságú kört.)

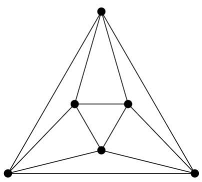


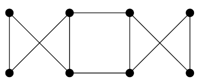


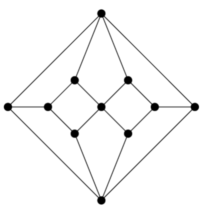
Megoldás. Az első gráf nem páros, mert van benne páratlan hosszúságú kör (például a külső ötszög). A második gráf páros, mert ki lehet színezni két színnel úgy, hogy az éllel összekötött csúcsok különböző színűek legyenek. Lényegében csak egy ilyen színezés van (a két szín felcserélésétől eltekintve):

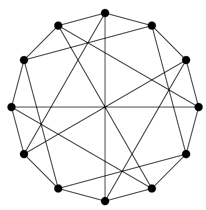


3.15. feladat. Párosak-e alábbi gráfok? (Amelyik igen, azt színezzük ki két színnel; amelyik nem, abban keressünk páratlan hosszúságú kört.) A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-paros.html

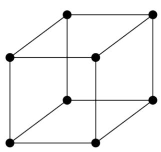
(a) 

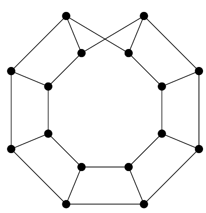
(c) 

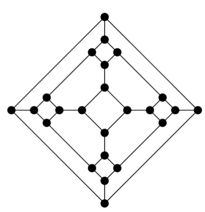
(b) 

(d) 

3.16. feladat. Párosak-e alábbi gráfok? (Amelyik igen, azt színezzük ki két színnel; amelyik nem, abban keressünk páratlan hosszúságú kört.) A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-paros.html

(a) 

(b) 

(c) 

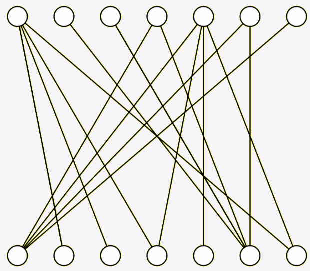
3.6. Párosítások

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

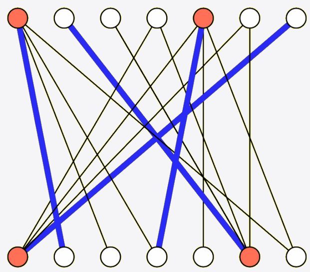
- https://youtu.be/XwMXixtGgbc (párosítások, lefogó csúcshalmazok, javító utak)
- https://youtu.be/LqEAbojRueo (a magyar módszer)

Kidolgozott feladat.

Keressünk maximális elemszámú párosítást és minimális elemszámú lefogó csúcshalmazt az alábbi gráfban.

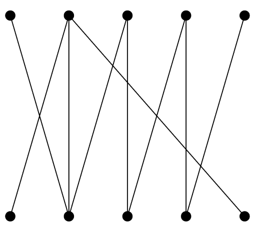


Megoldás. A lenti ábrán a kék élek egy párosítást, a piros csúcsok egy lefogó csúcshalmazt adnak meg. Mivel a párosítás és a lefogó csúcshalmaz ugyanakkora (4 élből, illetve 4 csúcsból áll), a párosítás maximális elemszámú, a lefogó csúcshalmaz pedig minimális elemszámú (azaz $\nu(G) = \tau(G) = 4$).

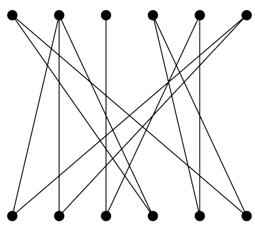


3.17. feladat. Keressünk (a magyar módszerrel) maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfokban. Igazoljuk a párosítás optimális voltát egy megfelelő lefogó csúcshalmaz megadásával. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2023tavasz/parositas

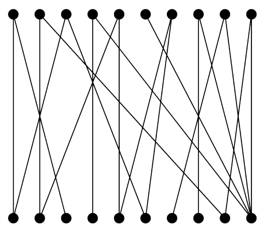
(a)



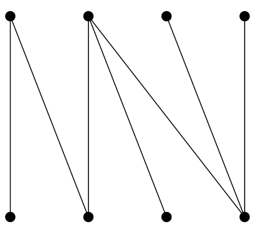
(c)



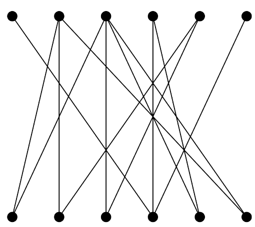
(e)



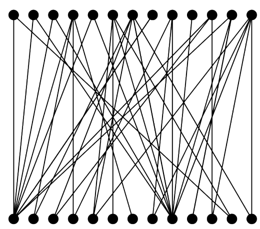
(b)



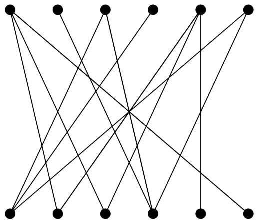
(d)

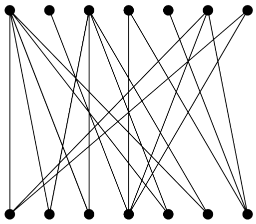


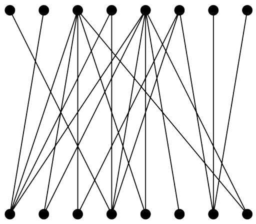
(f)



3.18. feladat. Keressünk (a magyar módszerrel) maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfokban. Igazoljuk a párosítás optimális voltát egy megfelelő lefogó csúcshalmaz megadásával. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:
`http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2023tavasz/parositas`

(a)


(b)


(c)


4. Absztrakt algebra

4.1. Műveletek, műveleti tulajdonságok

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

☞ https://youtu.be/yPbBhgA11Is

Kidolgozott feladat.

Művelet-e ...

(a) a szorzás a racionális számok halmazán?

(b) a szorzás az irracionális számok halmazán?

Megoldás.

(a) Igen, mert két racionális szám szorzata mindig értelmezett, egyértelműen meghatározott, és a szorzat értéke is mindig racionális szám lesz.

(b) Nem, mert két irracionális szám szorzata nem mindig irracionális, például $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ nem irracionális.

4.1. feladat. Művelet-e ...

(a) az összeadás a hárommal osztható egész számok halmazán?

(b) az összeadás a hárommal nem osztható egész számok halmazán?

(c) az osztás a pozitív egész számok halmazán?

(d) az összeadás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon?

(e) $x * y = \sqrt{xy}$ a valós számok halmazán?

(f) $x * y = \sqrt{xy}$ a komplex számok halmazán?

(g) a metszés az $\big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\big\}$ halmazon?

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html

4.2. feladat. Művelet-e ...

(a) a szorzás a hárommal osztható egész számok halmazán?

(b) a szorzás a hárommal nem osztható egész számok halmazán?

(c) az összeadás a $[0, 1]$ intervallumon?

(d) a szorzás a $[0, 1]$ intervallumon?

(e) a szorzás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon?

(f) az egyesítés az $\big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\big\}$ halmazon?

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html

Kidolgozott feladat.

Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából a következő táblázattal megadott műveletet.

$*$	a	b	c	d	e
a	b	a	d	e	c
b	a	b	c	d	e
c	e	c	a	b	d
d	c	d	e	a	b
e	d	e	b	c	a

(a) Kancellatív-e a művelet?

(b) Kommutatív-e a művelet?

(c) Van-e zéruselem?

(d) Van-e egységelem?

(e) Mely elemeknek van inverze?

Megoldás.

(a) Kancellatív, mert semelyik sorban és semelyik oszlopban sincs ismétlődés.

(b) Nem kommutatív, mert pl. $a * c = d$ és $c * a = e$.

(c) Nincs zéruselem.

(d) Van egységelem, mégpedig a b elem.

(e) Az a elem inverze saját maga (hiszen $a * a = b =$ egységelem), a b elem is önmagának az inverze (az egységelem mindig saját magának az inverze), a többi elemnek pedig nincs inverze (pl. c sorában ugyan megtaláljuk az egységelemet: $c * d = b$, de mivel $d * c \neq b$, nem lesz c és d egymás inverze).

4.3. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok (kommutativitás, asszociativitás, zéruselem, egységelem, inverzek, kancellativitás) szempontjából az alábbi műveleteket. (Írjuk fel a művelettáblázatot, ha nincs megadva!)

(a) az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon a lenti táblázattal definiált $*$ művelet

(b) az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon a lenti táblázattal definiált $\circ$ művelet

(c) a $\mathbb{Z}_5$ halmazon a szorzás művelete

(d) a $\mathcal{P}(\{u, v\})$ halmazon az egyesítés művelete

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

$\circ$	a	b	c	d
a	c	a	b	b
b	a	b	c	d
c	b	c	b	a
d	b	d	c	a

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html

4.4. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok (kommutativitás, asszociativitás, zéruselem, egységelem, inverzek, kancellativitás) szempontjából az alábbi műveleteket. (Ha nincs megadva a művelettáblázat, akkor írjuk fel!)

(a) az $\{1, -1, i, -i\}$ halmazon a szorzás művelete

(b) az $\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}$ halmazon az implikáció művelete

(c) az $\{1, 2, 3\}$ halmazon az $x \sqcap y = \min\{x, y\}$ művelet

(d) az $A = \{u, v, w\}$ halmazon a lenti táblázattal definiált $\diamond$ művelet

$\diamond$	u	v	w
u	v	w	u
v	w	u	v
w	u	v	w

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html

Kidolgozott feladat.

Definiáljunk a valós számok halmazán egy műveletet a következő képlettel: $a * b = 7a + 7b + 2ab + 21$.

(a) Határozzuk meg az $(\mathbb{R}; *)$ grupoid zéruselemét.

(b) Határozzuk meg az $(\mathbb{R}; *)$ grupoid egységelemét.

(c) Határozzuk meg az $(\mathbb{R}; *)$ grupoidban az elemek inverzeit.

Megoldás.

(a) Olyan z valós számot keresünk, amelyre minden x esetén $x*z = z$ teljesül (mivel a művelet szemlátomást kommutatív, nem szükséges külön felírni azt is, hogy $z*x = z$). Ebből a $7x+7z+2xz+21 = z$ egyenlőséget kapjuk, amit rendezve az adódik, hogy $(7 + 2z)x = -6z - 21$. Mivel a jobb oldal nem függ x-től, az egyenlőség csak akkor teljesülhet minden x esetén, ha a bal oldalon x együtthatója nulla, azaz $z = -7/2$. Szerencsére $z = -7/2$ esetén a jobb oldal is nulla, így $-7/2$ zéruselem.

(b) Olyan e valós számot keresünk, amelyre minden x esetén $x * e = x$ teljesül (mivel a művelet kommutatív, nem szükséges külön felírni azt is, hogy $e * x = x$). Ebből a $7x + 7e + 2xe + 21 = x$ egyenlőséget kapjuk, amit rendezve az adódik, hogy $(6 + 2e)x = -7e - 21$. Mivel a jobb oldal nem függ x-től, az egyenlőség csak akkor teljesülhet minden x esetén, ha a bal oldalon x együtthatója nulla, azaz $e = -3$. Szerencsére $e = -3$ esetén a jobb oldal is nulla, így -3 egységelem.

(c) Az x és y elemek akkor és csak akkor egymás inverzei, ha $x*y = -3$ teljesül (mivel a művelet kommutatív, nem szükséges külön felírni azt is, hogy $y * x = -3$). Ebből a $7x + 7y + 2xy + 21 = -3$ egyenlőséget kapjuk, amit rendezve az adódik, hogy $(7 + 2x)y = -24 - 7x$. Ha $x \neq -7/2$, akkor $7 + 2x$ nem nulla, ezért leoszthatunk vele. Így azt kapjuk, hogy $x \neq -7/2$ esetén x-nek van inverze, mégpedig $\frac{-24-7x}{7+2x}$. A $-7/2$ számnak nincs inverze, ami nem meglepő hiszen ő a zéruselem. (Nem nehéz meggondolni, hogy az egyelemű grupoidokat leszámítva a zéruselemnek nem lehet inverze.)

Kidolgozott feladat.

Definiáljunk a $\mathbb{Z}_{15}$ halmazon egy műveletet a következő képlettel: $a * b = 6a + 10b$.

(a) Kommutatív-e a művelet?

(b) Kancellatív-e a művelet?

(c) Asszociatív-e a művelet?

Megoldás.

(a) Nem kommutatív a művelet, mert pl. $\overline{0} * \overline{1} = \overline{10}$ és $\overline{1} * \overline{0} = \overline{6}$ (ez a kettő valóban különbözik, mert $10 \not\equiv 6 \pmod{15}$).

(b) Nem kancellatív a művelet, mert pl. $\overline{0} * \overline{0} = \overline{0}$ és $\overline{5} * \overline{0} = \overline{30} = \overline{0}$, azaz $\overline{0} * \overline{0} = \overline{5} * \overline{0}$ annak ellenére, hogy $\overline{0}$ és $\overline{5}$ két különböző elem.

(c) Számítsuk ki az $(a * b) * c$ és $a * (b * c)$ kifejezéseket tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}_{15}$ esetén):

$$(a * b) * c = (6a + 10b) * c = 6\,(6a + 10b) + 10c = 36a + 60b + 10c;$$
$$a * (b * c) = a * (6b + 10c) = 6a + 10\,(6b + 10c) = 6a + 60b + 100c.$$

Mivel $36 \equiv 6 \pmod{15}$, minden $a \in \mathbb{Z}_{15}$ elemre teljesül, hogy $36a = 6a$. Hasonlóan, minden $c \in \mathbb{Z}_{15}$ elemre $10c = 100c$. Ez a fenti számolással együtt mutatja, hogy a művelet asszociatív.

4.5. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok (kommutativitás, asszociativitás, zéruselem, egységelem, inverzek, kancellativitás) szempontjából az alábbi műveleteket.

(a) az egész számok halmazán értelmezett $a \bullet b = a + b + 23$ művelet

(b) az egész számok halmazán értelmezett $a \otimes b = b + 2$ művelet

(c) a valós számok halmazán értelmezett $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$ művelet

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html

4.6. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok (kommutativitás, asszociativitás, zéruselem, egységelem, inverzek, kancellativitás) szempontjából az alábbi műveleteket.

(a) az egész számok halmazán értelmezett $a \oplus b = a$ művelet

(b) a komplex számok halmazán a kivonás művelete

(c) a valós számok halmazán értelmezett $a \triangle b = ab - 2(a + b) + 6$ művelet

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html

4.2. Algebrai struktúrák

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

https://youtu.be/o_Sn3pdlkQg

Kidolgozott feladat.

Grupoidot, félcsoportot, monoidot, csoportot, Abel-csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok a megadott műveletTel?

(a) $A := \{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det(M) = 1\}$ a szorzás műveletével

(b) $\mathbb{Z}_{14}$ a szorzás műveletével

(c) $\mathbb{R}^-$ a kivonás műveletével

Megoldás.

(a) Ha $M, N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, akkor $M \cdot N$ értelmezett, és ő is 2×2-es valós mátrix, továbbá ha $\det(M) = 1$ és $\det(N) = 1$, akkor $\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N) = 1 \cdot 1 = 1$. Így az A halmaz zárt a szorzásra, tehát grupoidot alkot. Tudjuk, hogy a mátrixok szorzása asszociatív, ezért a $(A; \cdot)$ félcsoport. Van egységelem is, hiszen az egységmátrix benne van az A halmazban (nyilván 1 a determinánsa), tehát egységelemes félcsoportról, azaz monoidról van szó. Ha $\det(M) = 1$, akkor az M mátrixnak van inverze, és persze M^{-1} is 2×2-es valós mátrix lesz, amelynek determinánsa $\det(M^{-1}) = \det(M)^{-1} = 1^{-1} = 1$. Ez mutatja, hogy az A halmaz minden elemének van inverze az A halmazban, és így $(A; \cdot)$ csoport. A 2×2-es mátrixok szorzása nem kommutatív (adjunk ellenpéldát!), ezért a csoportunk nem Abel-csoport.

(b) A $\mathbb{Z}_{14}$ halmaz zárt a szorzásra ($\Longrightarrow$ grupoid), a szorzás asszociatív ($\Longrightarrow$ félcsoport), az $\overline{1}$ maradékosztály egységelem ($\Longrightarrow$ monoid). Inverze azonban csak a redukált maradékosztályoknak van, így pl. $\overline{2}$-nak nincs inverze (hiszen a $2x \equiv 1 \pmod{14}$ kongruenciának nincs megoldása). Tehát $(\mathbb{Z}_{14}; \cdot)$ „csak” monoid, de nem csoport (és így nem is Abel-csoport).

(c) A negatív számok halmaza nem zárt a kivonásra: pl. $(-3) - (-5) = 2$, ezért $\mathbb{R}^-$ nem alkot grupoidot a kivonás műveletével (és így persze nem is félcsoport, nem is monoid, nem is csoport, nem is Abel-csoport).

4.7. feladat. Grupoidot, félcsoportot, monoidot, csoportot, Abel-csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok a megadott művelettel?

(a) $\mathbb{N}$ az összeadás műveletével

(b) $\mathbb{Z}$ az összeadás műveletével

(c) $\mathbb{Z}$ a szorzás műveletével

(d) $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a szorzás műveletével

(e) $\mathbb{Z}_5$ az összeadás műveletével

(f) $\mathbb{Z}_5$ a szorzás műveletével

(g) $\mathbb{Z}_5 \setminus \{\overline{0}\}$ a szorzás műveletével

(h) $\mathbb{Z}_5 \setminus \{\overline{0}\}$ az összeadás műveletével

(i) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ az összeadás műveletével

(j) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a szorzás műveletével

(k) $\mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \{\mathbf{0}\}$ a szorzás műveletével

(l) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det(A) \neq 0\}$ a szorzás műveletével

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra2-strukturak.html

4.8. feladat. Grupoidot, félcsoportot, monoidot, csoportot, Abel-csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok a megadott művelettel?

(a) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ az összeadás műveletével

(b) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ a szorzás műveletével

(c) $\mathbb{Q}^+$ az összeadás műveletével

(d) $\mathbb{Q}^+$ a szorzás műveletével

(e) $\mathbb{Z}^-$ az összeadás műveletével

(f) $\mathbb{Z}_6 \setminus \{\overline{0}\}$ a szorzás műveletével

(g) $\mathbb{N}$ a szorzás műveletével

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra2-strukturak.html

4.9. feladat. Milyen algebrai struktúrák az alábbiak?

(a) $(\{a, b, c, d\}; \circ)$, ahol $\circ$ a lenti táblázattal definiált művelet

(b) $(\mathcal{P}(\{u, v\}); \cup)$

(c) $(\{1, -1, i, -i\}; \cdot)$

(d) $(\{u, v, w\}; \diamond)$, ahol $\diamond$ a lenti táblázattal definiált művelet

(e) $(\{a, b, c, d\}; *)$, ahol $*$ a lenti táblázattal definiált művelet

(f) $(\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}; \rightarrow)$

$\diamond$	u	v	w
u	v	w	u
v	w	u	v
w	u	v	w

$\circ$	a	b	c	d
a	c	a	b	b
b	a	b	c	d
c	b	c	b	a
d	b	d	c	a

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra2-strukturak.html

4.10. feladat.

(a) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{C}; \diamond)$, ahol $a \diamond b = a - b$?

(b) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Z}; \bullet)$, ahol $a \bullet b = a + b + 23$?

(c) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Z}; \otimes)$, ahol $a \otimes b = b + 2$?

(d) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Z}; \oplus)$, ahol $a \oplus b = a$?

(e) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Q}; \star)$, ahol $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$?

(f) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Q} \setminus \{3\}; \star)$, ahol $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$?

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra2-strukturak.html

4.11. feladat.

(a) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{R}; \triangle)$, ahol $a \triangle b = ab - 2(a + b) + 6$?

(b) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{R} \setminus \{2\}; \triangle)$, ahol $a \triangle b = ab - 2(a + b) + 6$?

Kidolgozott feladat.

Gyűrűt, illetve testet alkotnak-e az alábbi halmazok az összeadás és a szorzás műveletével?

(a) a páros számok halmaza

(b) az irracionális számok halmaza

(c) $\mathbb{Z}_{23}$

Megoldás.

(a) Mivel páros számok összege, különbsége, szorzata is páros szám, ezért a páros számok gyűrűt alkotnak. Multiplikatív inverze nem csak a nullának nincs, hanem pl. a 2-nek sincs (hiszen 1/2 nem páros szám), ezért a páros számok nem alkotnak testet, „csak” gyűrűt.

(b) Az irracionális számok halmaza nem zárt az összeadásra: pl. $\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1$, ezért az irracionális számok nem alkotnak gyűrűt, és így testet sem.

(c) Tudjuk, hogy $\mathbb{Z}_n$ minden n esetén gyűrű, és ha n prímszám, akkor (és csak akkor) test is. Mivel 23 prím, ezért $\mathbb{Z}_{23}$ test, és persze gyűrű is.

4.12. feladat. Gyűrűt, illetve testet alkotnak-e az alábbi halmazok a szokásos összeadással és szorzással?

(a) $\mathbb{Q}$

(b) $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$

(c) $\mathbb{R}^{2\times 3}$

4.13. feladat. Gyűrűt, illetve testet alkotnak-e az alábbi halmazok a szokásos összeadással és szorzással?

(a) $\mathbb{C}$

(b) $\mathbb{R}$

(c) $\mathbb{Z}$

(d) $\mathbb{N}$

(e) $\mathbb{Z}_{10}$

(f) $\mathbb{Z}_{11}$

(g) $\mathbb{Z}_{12}$

(h) $\mathbb{Z}_{13}$

(i) $\mathbb{R}^{2\times 2}$

4.14. feladat. Gyűrűt, illetve testet alkot-e $\mathcal{P}(U)$ (az U halmaz hatványhalmaza) a szimmetrikus differencia (mint összeadás) és a metszés (mint szorzás) műveletével?

4.3. Izomorfia

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

https://youtu.be/C6aePdjTdyo

Kidolgozott feladat.

Adjunk meg izomorfizmust az $\mathbb{A} = (\{u, v, w\}; \diamond)$ grupoidról a $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_3; +)$ grupoidra.

$\diamond$	u	v	w
u	v	w	u
v	w	u	v
w	u	v	w

Megoldás. Az $\mathbb{A}$ grupoidban w egységelem, $\mathbb{B}$-ben pedig $\overline{0}$ egységelem. Ezért, ha tényleg izomorf a két grupoid, akkor az izomorfizmusnak w-hez mindenképpen $\overline{0}$-t kell rendelnie. A másik két elem leképezésére két lehetőség van; nézzük meg mondjuk ezt:

$$\varphi\colon \{u, v, w\} \to \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}, \qquad u \mapsto \overline{1},\ v \mapsto \overline{2},\ w \mapsto \overline{0}.$$

Írjuk át az elemeket ennek a φ leképezésnek megfelelően $\mathbb{A}$ művelettáblázatában:

	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$

Ha jól megnézzük, ez éppen a modulo 3 összeadás (csak nem a szokásos sorrendben szerepelnek a sorok és az oszlopok). Ez azt mutatja, hogy a φ leképezés izomorfizmus $\mathbb{A}$-ról $\mathbb{B}$-re. (Egyébként az $u \mapsto \overline{2},\ v \mapsto \overline{1},\ w \mapsto \overline{0}$ leképezés is izomorfizmus.)

Megjegyzés. A 4.4(d) és 4.9(d) feladatokban már megvizsgáltuk az $(\{u, v, w\}; \diamond)$ grupoidot. A most belátott izomorfia fényében nem meglepő, hogy ez a grupoid Abel-csoport, hiszen $(\mathbb{Z}_3; +)$ is az, márpedig izomorf grupoidok pontosan ugyanazokkal az algebrai tulajdonságokkal rendelkeznek. (A $\diamond$ művelet asszociativitását a 4.4(d). feladat megoldásában kissé körülményes volt ellenőrizni, de az $(\{u, v, w\}; \diamond) \cong (\mathbb{Z}_3; +)$ izomorfiából ez is triviálisan következik.)

Kidolgozott feladat.

A $\mathbb{D}$ grupoid izomorf az $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ grupoidok közül az egyikkel. Melyikkel, és miért? Amelyikkel izomorf, ahhoz adjuk meg az izomorfizmust; amelyikkel nem, ott indokoljuk meg, hogy miért nem.

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & b & b \\ c & a & b & c \end{array} \qquad \mathbb{B} = \begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & c & b & a \\ b & b & b & b \\ c & a & b & c \end{array} \qquad \mathbb{C} = \begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & a & b & c \\ c & c & c & c \end{array} \qquad \mathbb{D} = \begin{array}{c|ccc} * & x & y & z \\ \hline x & x & x & x \\ y & x & y & z \\ z & x & z & y \end{array}$$

Megoldás. Nézzük meg először alaposan a $\mathbb{D}$ grupoidot: x zéruselem, y egységelem, a harmadik elem pedig saját magának az inverze ($z * z = y =$ egységelem). Ezek az információk már egyértelműen meg is határozzák $\mathbb{D}$ szerkezetét. Figyeljük meg, hogy a $\mathbb{B}$ grupoidnak ugyanilyen a szerkezete: b zéruselem, c egységelem, a harmadik elem pedig saját magának az inverze ($a * a = c =$ egységelem). Ebből következik, hogy $\mathbb{D}$ izomorf $\mathbb{B}$-vel a $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{B}$, $x \mapsto b$, $y \mapsto c$, $z \mapsto a$ izomorfizmus mellett.

Az $\mathbb{A}$ grupoidnak is hasonló a szerkezete, de nem pont ugyanilyen: a zéruselem, c egységelem, de a harmadik elem nem inverze saját magának ($b*b = b \neq$ egységelem), sőt, egyáltalán nincs is inverze. Ezért $\mathbb{D}$ nem izomorf $\mathbb{A}$-val.

A $\mathbb{C}$ grupoidban ugyan van zéruselem, de nincs egységelem (csak bal oldali egységelemek vannak), ezért $\mathbb{C}$ biztosan nem izomorf $\mathbb{D}$-vel. (Egy másik indoklás: $\mathbb{D}$ kommutatív, de $\mathbb{C}$ nem az.)

4.15. feladat. Adjunk meg izomorfizmust az $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ grupoidok között.

(a) $\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}; \leftrightarrow)$, $\quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; +)$

(b) $\mathbb{A} = (\{1, -1, i, -i\}; \cdot)$, $\quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; +)$

A feladatban szereplő grupoidok műveletttáblázatai interaktív formában megtalálhatóak ebben a „színezőben”:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2023tavasz/szinezo.html

4.16. feladat. Adjunk meg izomorfizmust az $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ grupoidok között.

(a) $\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}; \wedge)$, $\quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; \cdot)$

(b) $\mathbb{A} = (\{-1, 1\}; \cdot)$, $\quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; +)$

(c) $\mathbb{A} = (\{a, b, c, d\}; *)$, $\quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; \cdot)$
(lásd a műveletttáblázatot jobbra)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

A feladatban szereplő grupoidok műveletttáblázatai interaktív formában megtalálhatóak ebben a „színezőben”:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2023tavasz/szinezo.html

4.17. feladat. Izomorf-e az $\mathbb{A}$ grupoid $\mathbb{B}$ és $\mathbb{C}$ közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjunk meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem.

(a) $\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}; \rightarrow)$, $\quad \mathbb{B} = (\{0, 1\}; \circ)$ $\quad \mathbb{C} = (\{0, 1\}; *)$

$\circ$	0	1
0	1	1
1	0	1

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

(b) $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\{1, 2\}); \cup)$, $\quad \mathbb{B} = (\{0, 1, 2, 3\}; \oplus)$, $\quad \mathbb{C} = (\{0, 1, 2, 3\}; *)$

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	3	1
1	1	1	1	1
2	3	1	2	0
3	1	1	0	3

$*$	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	1	1	1	1
2	0	1	2	3
3	1	1	3	3

A feladatban szereplő grupoidok műveletttáblázatai interaktív formában megtalálhatóak ebben a „színezőben”:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2023tavasz/szinezo.html

4.18. feladat. Izomorf-e az $\mathbb{A}$ grupoid $\mathbb{B}$ és $\mathbb{C}$ közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjunk meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem.

(a) $\mathbb{A} = (\{1,2,3\}; \min)$, $\quad \mathbb{B} = (\{0,1,2\}; \oplus)$, $\quad \mathbb{C} = (\{0,1,2\}; *)$

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

(b) $\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}; \vee)$, $\quad \mathbb{B} = (\{0,1\}; \diamond)$, $\quad \mathbb{C} = (\{0,1\}; \otimes)$

$\diamond$	0	1
0	1	0
1	0	0

$\otimes$	0	1
0	0	1
1	1	1

(c) $\mathbb{A} = (\{-1,0,1\}; \cdot)$, $\quad \mathbb{B} = (\{0,1,2\}; \otimes)$, $\quad \mathbb{C} = (\{0,1,2\}; \circ)$

$\otimes$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	2

$\circ$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

(d) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_5^*; \cdot)$, $\quad \mathbb{B} = (\{0,1,2,3\}; \diamond)$, $\quad \mathbb{C} = (\{0,1,2,3\}; \oplus)$

$\diamond$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

A feladatban szereplő grupoidok művelettáblázatai interaktív formában megtalálhatóak ebben a „színezőben”:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2023tavasz/szinezo.html

4.4. Részalgebrák

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

https://youtu.be/roLhpHczlK0

Kidolgozott feladat.

Tekintsük az alábbi művelettáblázattal megadott $\mathbb{A} = (\{a, b, c, d\}; *)$ grupoidot.

$*$	a	b	c	d
a	d	a	a	a
b	b	b	d	d
c	b	b	d	c
d	d	b	d	c

(a) Határozzuk meg a $[b, c]$ részgrupoidot.

(b) Határozzuk meg az $[a]$ részgrupoidot.

Megoldás.

(a) Mivel $b * c = d$, a generátum tartalmazni fogja a d elemet is (b és c mellett). A táblázatból látható, hogy a $\{b, c, d\}$ halmaz már zárt, azaz nem kapunk újabb elemeket. Tehát $[b, c] = \{b, c, d\}$.

(b) Az a elem generálja az egész algebrát, mert $a * a = d$, $d * d = c$, $c * a = b$. Tehát $[a] = \{a, b, c, d\}$.

4.19. feladat. Határozzuk meg az $(\{a, b, c, d\}; *)$ grupoidban az alábbi részgrupoidokat.

(a) $[c, d] = ?$

(b) $[a, b] = ?$

(c) $[a, d] = ?$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	b
b	b	b	b	b
c	c	b	c	a
d	d	b	b	a

4.20. feladat. Határozzuk meg az $(\{a, b, c, d\}; *)$ grupoidban az alábbi részgrupoidokat.

(a) $[a] = ?$

(b) $[d] = ?$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	b
b	b	b	b	b
c	c	b	c	a
d	d	b	b	a

4.21. feladat. Határozzuk meg az $(\{a, b, c, d\}; *)$ grupoidban a $[b]$ részgrupoidot.

$*$	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	b	c	b	a
c	c	a	c	a
d	d	c	a	d

4.22. feladat. Határozzuk meg az $(\{a, b, c, d\}; *)$ grupoidban az alábbi részgrupoidokat.

(a) $[a] = ?$

(b) $[b, c] = ?$

(c) $[a, d] = ?$

(d) $[c, d] = ?$

$*$	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	b	c	b	a
c	c	a	c	a
d	d	c	a	d

Kidolgozott feladat.

Benne vannak-e a következő számok a $(\mathbb{Z};+)$ algebra $[-2,6]$ részalgebrájában?

(a) -100 (b) 2 (c) 2022 (d) 2023

Megoldás.

(a) $-100 \in [-2,6]$, mert $-100 = (-2)+(-2)+\cdots+(-2)$ (50 tagú összeg).

(b) $2 \in [-2,6]$, mert $2 = 6+(-2)+(-2)$.

(c) Megmutattuk már, hogy $2 \in [-2,6]$, ezért most már a kettest is használhatjuk generálásra: $2022 = 2+2+\cdots+2$ (1011 tagú összeg), tehát $2022 \in [-2,6]$.

(d) Mivel -2 és 6 is páros szám, belőlük összeadással csak páros számokat kaphatunk, így $2023 \notin [-2,6]$.

Megjegyzés. A fentiek alapján nem nehéz belátni, hogy $[-2,6]$ nem más, mint a páros számok halmaza.

Kidolgozott feladat.

Határozzuk meg az $(\mathbb{N};+)$ félcsoportban a $[3,4]$ részfélcsoportot.

Megoldás. Az a kérdés, hogy mely pozitív egész számokat kaphatjuk meg 3-ból és 4-ből összeadással (megengedve az egytagú összeget is). Íme néhány szám, ami biztosan megkapható:

$3,\ 4,\ 6=3{+}3,\ 7=3{+}4,\ 8=4{+}4,\ 9=3{+}3{+}3,\ 10=3{+}3{+}4,\ 11=3{+}4{+}4,\ 12=3{+}3{+}3{+}3,\ 13=3{+}3{+}3{+}4,\ldots$

Ebből azt sejthetjük, hogy 1, 2 és 5 kivételével minden természetes szám kijön, azaz $[3,4]=\mathbb{N}\setminus\{1,2,5\}$. Az világos, hogy 1, 2 és 5 nem kapható meg, hiszen $3+3$ a legkisebb összeg, amit felírhatunk (eltekintve az egytagú 3, illetve 4 összegektől). Ez igazolja, hogy $[3,4]\subseteq\mathbb{N}\setminus\{1,2,5\}$. A másik irányú tartalmazáshoz meg kell mutatnunk, hogy minden $n\neq 1,2,5$ természetes szám megkapható 3-ból és 4-ből összeadással. Ezt n modulo 3 maradéka szerint az alábbi három konstrukció valamelyike mutatja:

$$\begin{aligned}
n=3k\ (k\geq 1) \quad &\Longrightarrow\quad n=\underbrace{3+\cdots+3}_{k\text{ db}};\\
n=3k+1\ (k\geq 1) \quad &\Longrightarrow\quad n=\underbrace{3+\cdots+3}_{k-1\text{ db}}+4;\\
n=3k+2\ (k\geq 2) \quad &\Longrightarrow\quad n=\underbrace{3+\cdots+3}_{k-2\text{ db}}+4+4.
\end{aligned}$$

(Ellenőrizzük, hogy a fenti képletek valóban minden természetes számot megadnak 1, 2 és 5 kivételével!)

4.23. feladat. Határozzuk meg az $(\mathbb{N};+)$ félcsoportban az alábbi részfélcsoportokat.

(a) $[2,9]=?$ (b) $[4,10]=?$

4.24. feladat. Határozzuk meg az $(\mathbb{N};+)$ félcsoportban az alábbi részfélcsoportokat.

(a) $[2,5]=?$ (b) $[3,5]=?$

4.25. feladat. Határozzuk meg az $(\mathbb{N};\cdot)$ félcsoportban az alábbi részfélcsoportokat.

(a) $[2,9]=?$ (b) $[4,10]=?$

4.26. feladat. Határozzuk meg az $(\mathbb{N};\cdot)$ félcsoportban az alábbi részfélcsoportokat.

(a) $[2,5]=?$ (b) $[3,5]=?$

4.5. Részcsoportok

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

- https://youtu.be/KsUQu5MNtLs (a csoport fogalma, példák, alaptulajdonságok)
- https://youtu.be/zr6vqywG7kU (részcsoportok)

Kidolgozott feladat.

Részcsoportot alkot-e a H halmaz a G csoportban?

(a) $G = (\mathbb{R}^+; \cdot),\ H = \{\text{véges tizedes törtek}\}$

(b) $G = (\mathbb{Z}_{12}; +),\ H = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$

Megoldás.

(a) Három dolgot kell ellenőrizni ahhoz, hogy a $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport legyen G-ben:

(1) H tartalmazza G egységelemét. Ez teljesül, hiszen G egységeleme 1, ami véges tizedes tört.

(2) H zárt G műveletére, jelen esetben a szorzásra. Ez is teljesül; elég az írásbeli szorzás eljárására gondolni, hogy lássuk, hogy véges tizedes törtek szorzata is véges tizedes tört.

(3) H zárt az inverzképzésre. Ez nem teljesül, mert itt az inverz nem más, mint a reciprok, márpedig egy véges tizedes tört reciproka általában nem véges tizedes tört (pl. $3 \in H$ de $3^{-1} \notin H$).

Tehát H nem részcsoportja G-nek (de (1) és (2) szerint legalább részmonoidja).

(b) Ellenőrizzük, amit ellenőrizni kell:

(1) H tartalmazza G egységelemét. Ez teljesül, hiszen G egységeleme $\overline{0}$.

(2) H zárt G műveletére, jelen esetben az összeadásra. Ez könnyen ellenőrizhető közvetlenül is, de megúszhatjuk az esetvizsgálatot, ha észrevesszük, hogy H éppen a hárommal osztható számok maradékosztályaiból áll: $H = \{\overline{3k} : k \in \mathbb{Z}\}$. (Itt persze elég lenne $k \in \mathbb{Z}$ helyett $k = 0, 1, 2, 3$ is, de nem baj az, hogy egy-egy elemet többször is felírtunk.) Így már világos, hogy H zárt az összeadásra:

$$\overline{3k_1} + \overline{3k_2} = \overline{3(k_1 + k_2)} \in H.$$

(3) H zárt az inverzképzésre. Ez teljesül, mert itt additív inverzekről van szó, és

$$-\overline{0} = \overline{0} \in H, \quad -\overline{3} = \overline{9} \in H, \quad -\overline{6} = \overline{6} \in H, \quad -\overline{9} = \overline{3} \in H.$$

Tehát H részcsoportja G-nek.

4.27. feladat. Részcsoportot alkot-e a H halmaz a G csoportban?

(a) $G = (\mathbb{Z}; +),\ H = \mathbb{N}_0$

(b) $G = (\mathbb{Z}; +),\ H = \{a \in \mathbb{Z} : 4 \mid a\}$

(c) $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot),\ H = \mathbb{Q}^-$

(d) $G = (\mathbb{C}; +),\ H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

(e) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot),\ H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

(f) $G = (\mathbb{Z}_{21}; +),\ H = \mathbb{Z}_{21}^*$

(g) $G = (\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot),\ H = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{14}\}$

(h) $G = (\mathbb{Z}_{21}^*; \cdot),\ H = \{\overline{1}, \overline{8}, \overline{13}, \overline{20}\}$

4.28. feladat. Részcsoportot alkot-e a H halmaz a G csoportban?

(a) $G = (\mathbb{Z}; +),\ H = \{a \in \mathbb{Z} : 4 \nmid a\}$

(b) $G = (\mathbb{Q}; +),\ H = \mathbb{Q}^+$

(c) $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot),\ H = \mathbb{Q}^+$

(d) $G = (\mathbb{C}; +),\ H = \{ib : b \in \mathbb{R}\}$

(e) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot),\ H = \{ib : b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

(f) $G = (\mathbb{Z}_{10}; +),\ H = \mathbb{Z}_{10} \setminus \{\overline{0}\}$

(g) $G = (\mathbb{Z}_{15}; +),\ H = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}\}$

(h) $G = (\mathbb{Z}_{15}; +),\ H = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{14}\}$

Kidolgozott feladat.

Határozzuk meg a $(\mathbb{Z};+)$ csoportban a $[30,48]$ részcsoportot.

Megoldás. Az a kérdés, hogy mely egész számokat kaphatjuk meg 30-ból és 48-ból összeadás és additív inverzképzés (vagy összeadás és kivonás) segítségével. Mivel 30 és 48 is osztható 6-tal, csak 6-tal osztható számokat kaphatunk. Másrészt, $48+48-30-30-30=6$, ezért $6\in[30,48]$, és így a 6-ból „legyártható” számok megkaphatóak 30-ból és 48-ból, vagyis $[6]\subseteq[30,48]$. Az világos, hogy $[6]$ éppen 6 többszöröseiből áll, tehát minden 6-tal osztható számot megkapunk:

$$[30,48]=[6]=\{6k : k\in\mathbb{Z}\}.$$

Másik megoldás. Mivel az egész számok összeadása asszociatív és kommutatív, csak az számít, hogy hány 30-ast és hány 48-ast adunk össze (a sorrend és a zárójelezés nem fontos). Ha x darab 30-ast és y darab 48-ast veszünk, akkor az összeg $30x+48y$ lesz; itt x és y lehet negatív is, ezzel vesszük figyelembe az additív inverzeket. Azt kaptuk tehát, hogy

$$[30,48]=\{30x+48y : x,y\in\mathbb{Z}\}.$$

Másképp fogalmazva, egy c egész szám akkor és csak akkor van benne a generált részcsoportban, ha van megoldása a $30x+48y=c$ diofantoszi egyenletnek. Tudjuk, hogy ennek az egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha $\mathrm{lnko}(30,48)=6\mid c$, azaz

$$[30,48]=\{c\in\mathbb{Z} : 6\mid c\}.$$

Kidolgozott feladat.

Határozzuk meg a G csoportban a B halmaz által generált részcsoportot.

(a) $G=(\mathbb{Z}_{60};+),\ B=\{\overline{30},\overline{48}\}$

(b) $G=(\mathbb{Z}_{63};+),\ B=\{\overline{30},\overline{48}\}$

Megoldás.

(a) Az előző feladat megoldásában minden egész számot a modulo 60 maradékosztályával helyettesítve, azt kapjuk, hogy

$$[\overline{30},\overline{48}]=[\overline{6}]=\{\overline{6k} : k\in\mathbb{Z}\}=\{\overline{0},\ \overline{6},\ \overline{12},\ \overline{18},\ \overline{24},\ \overline{30},\ \overline{36},\ \overline{42},\ \overline{48},\ \overline{54}\}.$$

(b) Ez a feladat látszólag nem sokban különbözik az (a) résztől: a 6-tal osztható számok modulo 63 maradékosztályai alkotják a generált részcsoportot. Különbséget jelent azonban, hogy 63 nem osztható 6-tal. Ezért, ha elkezdjük felsorolni a 6-tal osztható számok modulo 63 maradékosztályait, akkor $\overline{60}$ után $\overline{66}=\overline{3}$ következik, és még egy „kört” kell mennünk, hogy megkapjuk a generátum összes elemét:

$$[\overline{30},\overline{48}]=[\overline{6}]=\{\overline{6k} : k\in\mathbb{Z}\}=\{\overline{0},\overline{6},\overline{12},\overline{18},\overline{24},\overline{30},\overline{36},\overline{42},\overline{48},\overline{54},\overline{60},\ \overline{3},\overline{9},\overline{15},\overline{21},\overline{27},\overline{33},\overline{39},\overline{45},\overline{51},\overline{57}\}.$$

Sorba rendezve az elemeket azt látjuk, hogy valójában a 3-mal osztható számok modulo 63 maradékosztályait kaptuk meg:

$$[\overline{30},\overline{48}]=\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12},\overline{15},\overline{18},\overline{21},\overline{24},\overline{27},\overline{30},\ \overline{33},\overline{36},\overline{39},\overline{42},\overline{45},\overline{48},\overline{51},\overline{54},\overline{57},\overline{60}\}=\{\overline{3k} : k\in\mathbb{Z}\}=[\overline{3}].$$

Megjegyzés.

A megoldás végén a következő kérdés merült fel: Melyek azok az egész számok, amelyek kongruensek egy 6-tal osztható számmal modulo 63? Azt a választ kaptuk, hogy ezek pontosan a 3-mal osztható számok. A lineáris kongruenciákról tanultak fényében ez nem meglepő: a $6x\equiv b \pmod{63}$ kongruenciának akkor és csak akkor van megoldása, ha $\mathrm{lnko}(6,63)=3\mid b$.

Kidolgozott feladat.

Határozzuk meg az $(\mathbb{R};+)$ csoportban az $\left[\frac{1}{4},\frac{5}{6}\right]$ részcsoportot.

Megoldás. Hozzuk közös nevezőre a két törtet: $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$ és $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$. Világos, hogy tizenkettedekből összeadással és kivonással csak tizenkettedeket kaphatunk, ezért

$$\left[\frac{1}{4},\frac{5}{6}\right]=\left[\frac{3}{12},\frac{10}{12}\right]\subseteq\left\{\frac{k}{12}:k\in\mathbb{Z}\right\}=\left[\frac{1}{12}\right].$$

A másik irányú tartalmazáshoz elég megmutatni, hogy $\frac{1}{12}\in\left[\frac{1}{4},\frac{5}{6}\right]$ (hiszen $\frac{1}{12}$ generálja az összes 12 nevezőjű törtet). Ez pedig következik az alábbi számolásból:

$$\frac{5}{6}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{10}{12}-3\cdot\frac{3}{12}=\frac{1}{12}.$$

Ezzel igazoltuk, hogy

$$\left[\frac{1}{4},\frac{5}{6}\right]=\left\{\frac{k}{12}:k\in\mathbb{Z}\right\}=\left[\frac{1}{12}\right].$$

Másik megoldás. A generátum így is felírható:

$$\left[\frac{1}{4},\frac{5}{6}\right]=\left\{\frac{1}{4}x+\frac{5}{6}y:x,y\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\frac{3x+10y}{12}:x,y\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Mivel 3 és 10 relatív prímek, minden egész szám előáll $3x+10y$ alakban, ezért a fenti formula éppen a tizenkettedek halmazát adja:

$$\left[\frac{1}{4},\frac{5}{6}\right]=\left\{\frac{k}{12}:k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Kidolgozott feladat.

Határozzuk meg a $(\mathbb{Z}_{35}^*;\cdot)$ csoportban a $[\,\overline{6},\overline{29}\,]$ részcsoportot.

Megoldás. Mivel a maradékosztályok szorzása asszociatív és kommutatív, a generátum elemei felírhatóak $\overline{6}^x\cdot\overline{29}^y$ alakban, ahol az x és y egész számok mutatják, hogy „hány darab” $\overline{6}$-t és $\overline{29}$-t szoroztunk össze (a negatív kitevő multiplikatív inverzet jelent). Ez azonban – az előző feladatokkal ellentétben – nem sokat segít, mert nem világos, hogy mely maradékosztályok állnak elő ilyen alakban. Kezdjük el inkább szorozgatni a megadott két elemet, és figyeljük meg, hogy milyen elemeket kapunk:

$$\overline{6}\cdot\overline{6}=\overline{36}=\overline{1},\quad \overline{6}\cdot\overline{29}=\overline{174}=\overline{34},\quad \overline{29}\cdot\overline{29}=\overline{841}=\overline{1}.$$

Kijött tehát $\overline{1}$ és $\overline{34}$ is. Az előbbivel nem sokra megyünk, hiszen ő az egységelem, $\overline{34}$-sal viszont érdemes lehet megszorozni a korábbi elemeket:

$$\overline{6}\cdot\overline{34}=\overline{204}=\overline{29},\quad \overline{29}\cdot\overline{34}=\overline{986}=\overline{6},\quad \overline{34}\cdot\overline{34}=\overline{1156}=\overline{1}.$$

Úgy tűnik, hogy nem kapunk már újabb elemeket, tehát ezért sejthetjük, hogy $[\,\overline{6},\overline{29}\,]=\left\{\overline{1},\overline{6},\overline{29},\overline{34}\right\}$. Hogy megbizonyosodjunk arról, hogy ez a halmaz már zárt a szorzásra, készítsük el a szorzótábláját:

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{29}$	$\overline{34}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{29}$	$\overline{34}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{34}$	$\overline{29}$
$\overline{29}$	$\overline{29}$	$\overline{34}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$
$\overline{34}$	$\overline{34}$	$\overline{29}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$

A táblázatból látható, hogy a megsejtett négyelemű halmaz zárt a szorzásra. A főátlón lévő egységelemek pedig azt mutatják, hogy mind a négy elem saját magának az inverze, tehát az inverzképzésre is zárt a halmaz. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $[\,\overline{6},\overline{29}\,]=\left\{\overline{1},\overline{6},\overline{29},\overline{34}\right\}$.

Megjegyzés. A számolás akár fejben is elvégezhető, és a struktúra is világosabban látszik, ha a „nagy” számok esetén a kisebb abszolút értékű negatív maradékkal reprezentáljuk a maradékosztályt: $\overline{29}=\overline{-6}$ és $\overline{34}=\overline{-1}$. Így a következőképpen fest a generált részcsoport művelettáblázata:

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{-6}$	$\overline{-1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{-6}$	$\overline{-1}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{-1}$	$\overline{-6}$
$\overline{-6}$	$\overline{-6}$	$\overline{-1}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$
$\overline{-1}$	$\overline{-1}$	$\overline{-6}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$

4.29. feladat. Határozzuk meg a G csoportban a B halmaz által generált részcsoportot.

(a) $G=(\mathbb{Z};+),\ B=\{6,10\}$

(b) $G=(\mathbb{Z};+),\ B=\{25,65\}$

(c) $G=(\mathbb{Z}_{15};+),\ B=\{\overline{2}\}$

(d) $G=(\mathbb{Z}_{14};+),\ B=\{\overline{6},\overline{10}\}$

(e) $G=(\mathbb{Z}_{15};+),\ B=\{\overline{6},\overline{10}\}$

(f) $G=(\mathbb{Z}_{16};+),\ B=\{\overline{25},\overline{65}\}$

(g) $G=(\mathbb{C};+),\ B=\{1,i\}$

(h) $G=(\mathbb{Z}_{15}^*;\cdot),\ B=\{\overline{2}\}$

4.30. feladat. Határozzuk meg a G csoportban a B halmaz által generált részcsoportot.

(a) $G = (\mathbb{Z}; +),\ B = \{10, 14\}$

(b) $G = (\mathbb{Z}_{14}; +),\ B = \{\overline{10}, \overline{14}\}$

(c) $G = (\mathbb{Z}_{15}; +),\ B = \{\overline{10}, \overline{14}\}$

(d) $G = (\mathbb{Z}; +),\ B = \{30, 42, 105\}$

(e) $G = (\mathbb{Z}_{21}; +),\ B = \{\overline{30}, \overline{42}, \overline{105}\}$

(f) $G = (\mathbb{Z}_7^*; \cdot),\ B = \{\overline{2}\}$

(g) $G = (\mathbb{Z}_{21}^*; \cdot),\ B = \{\overline{8}, \overline{13}\}$

(h) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot),\ B = \{1, i\}$

(i) $G = (\mathbb{C}; +),\ B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

(j) $G = (\mathbb{Z}; +),\ B = \{2, 9\}$

(k) $G = (\mathbb{Z}; +),\ B = \{6, 10, 15\}$

(l) $G = (\mathbb{Z}_{14}; +),\ B = \{\overline{4}\}$

(m) $G = (\mathbb{Z}_{15}; +),\ B = \{\overline{10}\}$

(n) $G = (\mathbb{Z}_{16}; +),\ B = \{\overline{5}\}$

(o) $G = (\mathbb{Z}_{21}; +),\ B = \{\overline{3}\}$

(p) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot),\ B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

(q) $G = (\mathbb{Z}_7^*; \cdot),\ B = \{\overline{3}\}$

(r) $G = (\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot),\ B = \{\overline{4}\}$

4.6. Ciklikus csoportok, elem rendje

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

https://youtu.be/dpvHTj05KCs

Kidolgozott feladat.

Határozzuk meg a G csoportban az a elem rendjét.

(a) $G = (\mathbb{Z}; +),\ a = 10$

(b) $G = (\mathbb{Z}_{35}; +),\ a = \overline{10}$

(c) $G = (\mathbb{Z}_{35}^*; \cdot),\ a = \overline{4}$

(d) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot),\ a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Megoldás.

(a) Mivel itt a G csoport művelete nem szorzás, hanem összeadás, a „hatványozás” többszörözést jelent. Tehát az a kérdés, hogy legalább hány 10-est kell összeadni, hogy az egységelemet, vagyis a nullát megkapjuk. Ez nyilván nem lehetséges, mert $10k \neq 0$ minden k pozitív egész „kitevő” esetén. Ezért $o_G(a) = \infty$.

Megjegyzés. A rend mindig megegyezik az elem által generált részcsoport elemszámával. Innen is látszik, hogy végtelen a rend, hiszen $[10] = \{\ldots, -20, -10, 0, 10, 20, \ldots\}$.

(b) Kezdjük el „hatványozni”, azaz többszörözni az a elemet, hogy lássuk, mikor jön ki először az egységelem:

$$a = \overline{10}, \quad 2a = \overline{20}, \quad 3a = \overline{30}, \quad 4a = \overline{40} = \overline{5}, \quad 5a = \overline{15}, \quad 6a = \overline{25}, \quad 7a = \overline{35} = \overline{0}.$$

Tehát $o_G(a) = 7$, és az is kiderült a fenti számolásból, hogy $[\,\overline{10}\,] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25}, \overline{30}\}$.

Megjegyzés. A generált részcsoport elemeinek felírása nélkül is megkaphattuk volna a rendet a következő módon. A rend a legkisebb olyan k pozitív egész „kitevő”, amelyre $k \cdot \overline{10} = \overline{0}$. Ez ekvivalens a $35 \mid 10k$ oszthatósággal, ami Euklidész lemmája szerint akkor és csak akkor teljesül, ha $\frac{35}{\mathrm{lnko}(35,10)} \mid k$, vagyis $7 \mid k$. A legkisebb ilyen pozitív egész szám $k = 7$, tehát $o_G(a) = 7$.

(c) Kezdjük el hatványozni az a elemet, hogy lássuk, mikor jön ki először az egységelem (itt már „rendes” hatványozásról van szó, hiszen a G csoport művelete a szorzás):

$$a = \overline{4}, \quad a^2 = \overline{16}, \quad a^3 = \overline{64} = \overline{29} = \overline{-6}, \quad a^4 = \overline{-24} = \overline{11}, \quad a^5 = \overline{44} = \overline{9}, \quad a^6 = \overline{36} = \overline{1}.$$

Tehát $o_G(a) = 6$, és az is kiderült a fenti számolásból, hogy $[\,\overline{4}\,] = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{16}, \overline{29}\}$.

(d) A szokott módon, hatványozással állapítjuk meg a rendet:

$$a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad a^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad a^3 = -1, \quad a^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad a^5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad a^6 = 1.$$

Tehát $o_G(a) = 6$.

Megjegyzés. A komplex számoknál használatos terminológiával az a tény, hogy az a elem rendje 6, úgy fogalmazható meg, hogy a egy primitív hatodik egységgyök. Az $[a]$ részcsoport pedig nem más, mint a hatodik egységgyökök csoportja.

A rendet trigonometrikus alakban számolva könnyebben megkaphattuk volna:

$$a = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \implies a^k = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3},$$

tehát az a kérdés, hogy melyik az a legkisebb pozitív egész k, amelyre $\frac{k\pi}{3}$ egész számú többszöröse 2π-nek (hiszen ekkor lesz $a^k = 1 = \cos 0 + i\sin 0$). A legkisebb ilyen szám $k = 6$, ezért $o_G(a) = 6$.

4.31. feladat. Határozzuk meg a G csoportban az a elem rendjét.

(a) $G = (\mathbb{Z}_{20}; +),\ a = \overline{5}$

(b) $G = (\mathbb{Z}_{20}; +),\ a = \overline{6}$

(c) $G = (\mathbb{Z}_{20}; +),\ a = \overline{7}$

(d) $G = (\mathbb{Z}_{20}; +),\ a = \overline{8}$

(e) $G = (\mathbb{Z}_{21}; +),\ a = \overline{6}$

(f) $G = (\mathbb{R}; +),\ a = 2$

(g) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot),\ a = 2$

(h) $G = (\mathbb{C}; +),\ a = i$

(i) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot),\ a = i$

(j) $G = (\mathbb{Z}_7^*; \cdot),\ a = \overline{2}$

(k) $G = (\mathbb{Z}_7^*; \cdot),\ a = \overline{3}$

(l) $G = (\mathbb{Z}_{13}^*; \cdot),\ a = \overline{5}$

4.32. feladat. Határozzuk meg a G csoportban az a elem rendjét.

(a) $G = (\mathbb{Z}_{21}; +),\ a = \overline{6}$

(b) $G = (\mathbb{Z}_{21}; +),\ a = \overline{7}$

(c) $G = (\mathbb{Z}_{21}; +),\ a = \overline{8}$

(d) $G = (\mathbb{Z}_{21}; +),\ a = \overline{9}$

(e) $G = (\mathbb{R}; +),\ a = -1$

(f) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot),\ a = -1$

(g) $G = (\mathbb{Z}_{21}^*; \cdot),\ a = \overline{4}$

(h) $G = (\mathbb{Z}_{20}^*; \cdot),\ a = \overline{7}$

(i) $G = (\mathbb{Z}_{30}; +),\ a = \overline{18}$

(j) $G = (\mathbb{Z}_{30}; +),\ a = \overline{19}$

(k) $G = (\mathbb{Z}_{30}; +),\ a = \overline{20}$

(l) $G = (\mathbb{Z}_{30}; +),\ a = \overline{21}$

(m) $G = (\mathbb{Z}_{30}; +),\ a = \overline{22}$

(n) $G = (\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot),\ a = \overline{11}$

4.7. Kongruencia, faktoralgebra

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

https://youtu.be/9Zsq2EKDKwE

Kidolgozott feladat.

Tekintsük az alábbi művelettáblázattal megadott $\mathbb{A} = (\{a, b, c, d\}; *)$ grupoidot.

$*$	a	b	c	d
a	d	a	a	a
b	b	b	d	d
c	b	b	d	c
d	d	b	d	c

Kompatibilis osztályozása-e $\mathbb{A}$-nak $\mathcal{C}_1 = \big\{\{a\}, \{b, c, d\}\big\}$? Ha igen, akkor írjuk fel a megfelelő faktoralgebra művelettáblázatát.

Megoldás. Próbáljuk meg értelmezni a $*$ műveletet az osztályokon. Ehhez képzeljük el, hogy az a elemet pirosra, a b, c, d elemeket kékre színezzük:

$*$	a	b	c	d
a	d	a	a	a
b	b	b	d	d
c	b	b	d	c
d	d	b	d	c

A színezett táblázatból kiolvasható, hogy a szorzat színét mindig egyértelműen meghatározza a tényezők színe, mégpedig az alábbi szabály szerint:

$*$	piros	kék
piros	kék	piros
kék	kék	kék

Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{C}_1$ osztályozás kompatibilis a $*$ művelettel, és így fest a hozzá tartozó faktoralgebra művelettáblázata:

$*$	$\{a\}$	$\{b, c, d\}$
$\{a\}$	$\{b, c, d\}$	$\{a\}$
$\{b, c, d\}$	$\{b, c, d\}$	$\{b, c, d\}$

Figyelem: a kék $*$ piros szorzatok ugyan csak a b és d elemeket adják ki (c-t nem), de ennek ellenére a faktoralgebrában $\{b, c, d\} * \{a\} = \{b, c, d\}$! Nem is lenne értelme azt írni, hogy $\{b, c, d\} * \{a\} = \{b, d\}$, hiszen $\{b, d\}$ nem is eleme a faktoralgebrának.

Kidolgozott feladat.

Tekintsük az alábbi művelettáblázattal megadott $\mathbb{A} = (\{a, b, c, d\}; *)$ grupoidot.

$*$	a	b	c	d
a	d	a	a	a
b	b	b	d	d
c	b	b	d	c
d	d	b	d	c

Kompatibilis osztályozása-e $\mathbb{A}$-nak $\mathcal{C}_2 = \big\{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\big\}$? Ha igen, akkor írjuk fel a megfelelő faktoralgebra művelettáblázatát.

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan, színezéssel döntjük el, hogy kompatibilis-e az osztályozás. Színezzük az a elemet pirosra, a b és c elemeket kékre, a d elemet pedig sárgára:

$*$	a	b	c	d
a	d	a	a	a
b	b	b	d	d
c	b	b	d	c
d	d	b	d	c

Próbáljuk értelmezni a színek szorzatait:

$*$	piros	kék	sárga
piros	sárga	piros	piros
kék	kék	???	???
sárga	sárga	???	kék

Nem mindegyik „szín-szorzat” jól definiált; pl. egy kék és egy sárga elem szorzata néha sárga, néha kék, ezért a $\mathcal{C}_2$ osztályozás nem kompatibilis a $*$ művelettel. Ezt másképp is megfogalmazhatjuk: Jelölje $\sim$ a $\mathcal{C}_2$ osztályozáshoz tartozó ekvivalenciarelációt. Ekkor $b \sim c$ és $d \sim d$ de $b * d \nsim c * d$ (hiszen $b * d = d$ és $c * d = c$), ezért $\sim$ nem kongruenciareláció, és így $\mathcal{C}_2$ nem kompatibilis osztályozás.

4.33. feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel a hozzá tartozó faktoralgebra művelettáblázatát.

(a) $\mathcal{C} = \big\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\big\}$

(b) $\mathcal{C} = \big\{\{a\}, \{b, c, d, e\}\big\}$

(c) $\mathcal{C} = \big\{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\big\}$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

A művelettáblázat interaktív formában megtalálható ebben a „színezőben”:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2023tavasz/szinezo.html

4.34. feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel a hozzá tartozó faktoralgebra művelettáblázatát.

(a) $\mathcal{C} = \big\{\{a, b, c, e\}, \{d\}\big\}$

(b) $\mathcal{C} = \big\{\{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}\big\}$

(c) $\mathcal{C} = \big\{\{a, c, d, e\}, \{b\}\big\}$

(d) $\mathcal{C} = \big\{\{a\}, \{b, e\}, \{c\}, \{d\}\big\}$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

A művelettáblázat interaktív formában megtalálható ebben a „színezőben”:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2023tavasz/szinezo.html

4.35. feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel a hozzá tartozó faktoralgebra művelettáblázatát.

(a) $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}$

(b) $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	a	b
c	a	b	c	d
d	c	d	a	b

A művelettáblázat interaktív formában megtalálható ebben a „színezőben”:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2023tavasz/szinezo.html

4.36. feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel a hozzá tartozó faktoralgebra művelettáblázatát.

(a) $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$

(b) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\}$

(c) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$

(d) $\mathcal{C} = \{\{a, b, c, d\}\}$

(e) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	a	b
c	a	b	c	d
d	c	d	a	b

A művelettáblázat interaktív formában megtalálható ebben a „színezőben”:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2023tavasz/szinezo.html

4.37. feladat. Definiáljuk a valós számok halmazán a $\sim$ relációt a következőképpen: $a \sim b \iff \operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b$. Kongruenciája-e $\sim$ a reláció az alábbi grupoidoknak? Ha igen, írjuk fel a faktorgrupoid művelettáblázatát.

(a) $(\mathbb{R}; +)$

(b) $(\mathbb{R}; \cdot)$

4.38. feladat. Tekintsük a természetes számok halmazán a következő osztályozást:

$$\mathcal{C} = \{\{\text{hárommal osztható számok}\}, \{\text{hárommal nem osztható számok}\}\}.$$

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C}$ az alábbi grupoidoknak? Ha igen, írjuk fel a megfelelő faktorgrupoid művelettáblázatát.

(a) $(\mathbb{N}; +)$

(b) $(\mathbb{N}; \cdot)$

4.8. Homomorfizmus

A feladatok megoldása előtt célszerű megnézni az elméleti hátteret bemutató videó(ka)t:

☞ https://youtu.be/0mnwXTZ08VY

Kidolgozott feladat.

Legyen $*$ a valós számok halmazán a számtani közép képzésének művelete, és legyen $\circ$ a pozitív valós számok halmazán a mértani közép képzésének művelete:

$$x * y = \frac{x+y}{2} \ \ (x, y \in \mathbb{R}), \qquad a \circ b = \sqrt{ab} \ \ (a, b \in \mathbb{R}^+).$$

Homomorfizmus-e a $\varphi\colon (\mathbb{R}; *) \to (\mathbb{R}^+; \circ),\ x \mapsto 3^x$ leképezés?

Megoldás. A homomorfizmus definíciója szerint azt kell ellenőrizni, hogy teljesül-e $(x*y)\varphi = x\varphi \circ y\varphi$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Számítsuk ki először a bal oldalt, felhasználva a $*$ művelet és a φ leképezés definícióját:

$$(x * y)\varphi = \left(\frac{x+y}{2}\right)\varphi = 3^{\frac{x+y}{2}}.$$

Hasonlóan számíthatjuk ki az $x\varphi \circ y\varphi$ kifejezést is:

$$(x\varphi) \circ (y\varphi) = 3^x \circ 3^y = \sqrt{3^x \cdot 3^y}.$$

A hatványozás szokásos azonosságainak segítségével láthatjuk, hogy $3^{\frac{x+y}{2}} = \sqrt{3^x \cdot 3^y}$ tetszőleges x, y valós számok esetén, tehát a φ leképezés homomorfizmus.

Megjegyzés. A φ leképezés bijektív, így izomorfizmus is, tehát $(\mathbb{R}; *) \cong (\mathbb{R}^+; \circ)$.

Kidolgozott feladat.

Tekintsük a valós számok halmazán az $a \triangle b = ab - 2(a+b) + 6$ műveletet. Homomorfizmus-e az alábbi leképezés?

$$\varphi\colon (\mathbb{R}; \triangle) \to (\mathbb{R}; \cdot),\ x \mapsto x - 2$$

Megoldás. Ellenőriznünk kell, hogy teljesül-e $(a \triangle b)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi$ minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén. Számítsuk ki először a bal oldalt, felhasználva a $\triangle$ művelet és a φ leképezés definícióját:

$$(a \triangle b)\varphi = (ab - 2(a+b) + 6)\varphi = ab - 2(a+b) + 6 - 2 = ab - 2(a+b) + 4.$$

Most számítsuk ki az $a\varphi \cdot b\varphi$ kifejezést is:

$$(a\varphi) \cdot (b\varphi) = (a-2) \cdot (b-2) = ab - 2a - 2b + 4.$$

A két eredmény megegyezik, ezért a φ leképezés homomorfizmus.

Megjegyzés. A φ leképezés bijektív, ezért izomorfizmus, következésképp $(\mathbb{R}; \triangle) \cong (\mathbb{R}; \cdot)$. Ebből következik minden, amit a 4.6(c) és 4.11. feladatokban megállapítottunk a $\triangle$ műveletről (és ha tudtuk volna ezt az izomorfizmust korábban, akkor jóval egyszerűbb lett volna megoldani ezeket a feladatokat). Figyeljük meg, hogy $(\mathbb{R}; \triangle)$ zéruseleme 2, épp az az elem, amelyet φ az $(\mathbb{R}; \cdot)$ grupoid zéruselemébe (a nullába) visz, és hasonló mondható el az egységelemekről is ($3\varphi = 1$). Mivel $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$ Abel-csoport, a φ izomorfizmus melletti őse, azaz $(\mathbb{R} \setminus \{2\}; \triangle)$ is Abel-csoport

Kidolgozott feladat.

Homomorfizmus-e az alábbi leképezés?

$$\varphi\colon (\mathbb{Z}_{14}; +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_{14}; +, \cdot),\ x \mapsto \overline{6} \cdot x$$

Megoldás. A homomorfizmus definíciója alapján a következő két egyenlőséget kell ellenőriznünk tetszőleges $x, y \in \mathbb{Z}_{14}$ esetén:

$$(x + y)\varphi = x\varphi + y\varphi \quad \text{és} \quad (x \cdot y)\varphi = x\varphi \cdot y\varphi.$$

Az első egyenlőség a φ leképezés definíciója szerint azt jelenti, hogy

$$\overline{6} \cdot (x + y) = \overline{6} \cdot x + \overline{6} \cdot y,$$

ami valóban teljesül, mert $\mathbb{Z}_{14}$-ben a szorzás disztributív az összeadásra. A második egyenlőség így fest:

$$\overline{6} \cdot (x \cdot y) = (\overline{6} \cdot x) \cdot (\overline{6} \cdot y).$$

Itt a bal oldalon $\overline{6} \cdot x \cdot y$ áll, a jobb oldalon pedig $\overline{36} \cdot x \cdot y = \overline{8} \cdot x \cdot y$, és ez a kettő általában nem egyenlő egymással (pl. $x = y = \overline{1}$ esetén a bal oldal értéke $\overline{6}$, a jobb oldal értéke pedig $\overline{8}$). Tehát a φ leképezés nem cserélhető fel a szorzással, ezért nem homomorfizmus.

Megjegyzés. Mivel csak a szorzással volt „baj”, ha csak az összeadás műveletét tekintettük volna, akkor azt kaptuk volna, hogy $\varphi\colon (\mathbb{Z}_{14}; +) \to (\mathbb{Z}_{14}; +), x \mapsto \overline{6} \cdot x$ homomorfizmus.

Kidolgozott feladat.

Homomorfizmus-e az alábbi leképezés?

$$\psi\colon (\mathbb{Z}_{15}; +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_{15}; +, \cdot),\ x \mapsto \overline{6} \cdot x$$

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan ellenőrizhető, hogy ψ felcserélhető az összeadással, mert $\mathbb{Z}_{15}$-ben is disztributív a szorzás az összeadásra. A szorzással való felcserélhetőség, vagyis az $(x \cdot y)\psi = x\psi \cdot y\psi$ egyenlőség így fest ebben az esetben:

$$\overline{6} \cdot (x \cdot y) = (\overline{6} \cdot x) \cdot (\overline{6} \cdot y).$$

Ez is látszólag ugyanaz, mint az előző feladatban, de ne feledjük, hogy most már nem modulo 14, hanem modulo 15 számolunk. Márpedig $36 \equiv\ 6 \pmod{15}$, ezért a jobb oldal $\overline{36} \cdot x \cdot y = \overline{6} \cdot x \cdot y$, ami megegyezik a bal oldallal. Tehát a ψ leképezés most felcserélhető a szorzással is, így homomorfizmus.

4.39. feladat. Homomorfizmusok-e az alábbi leképezések?

(a) $\varphi\colon (\mathbb{R}^+; \cdot) \to (\mathbb{R}; +),\ x \mapsto \log x$

(b) $\varphi\colon (\mathbb{C}; +, \cdot) \to (\mathbb{C}; +, \cdot),\ z \mapsto \overline{z}$

(c) $\varphi\colon (\mathbb{C}; +) \to (\mathbb{R}; +),\ z \mapsto \operatorname{Re} z$

(d) $\varphi\colon (\mathbb{C}; \cdot) \to (\mathbb{R}; \cdot),\ z \mapsto \operatorname{Re} z$

(e) $\varphi\colon (\mathbb{R}^{n\times n}; \cdot) \to (\mathbb{R}; \cdot),\ M \mapsto \det M$

(f) $\varphi\colon (C[0,1]; +) \to (\mathbb{R}; +),\ f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$

(g) $\varphi\colon (\mathbb{Z}; +, \cdot) \to (\mathbb{Z}; +, \cdot), x \mapsto 2x$

(h) $\varphi\colon (\mathbb{R}; +) \to (\mathbb{R}; +), x \mapsto x^2$

4.40. feladat. Homomorfizmusok-e az alábbi leképezések?

(a) $\varphi\colon (\mathbb{R}^+; +, \cdot) \to (\mathbb{R}^+; +, \cdot), x \mapsto 1/x$

(b) $\varphi\colon (\mathbb{Z}_2; +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_2; +, \cdot), x \mapsto x^2$

(c) $\varphi\colon (\mathbb{Z}_3; +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_3; +, \cdot), x \mapsto x^2$

(d) $\varphi\colon (\mathcal{P}(U); \cap) \to (\mathcal{P}(U); \cup), H \mapsto \overline{H}$, ahol U nemüres halmaz

(e) $(\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cup, \cap) \to (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cup, \cap), H \mapsto \{1, 2, 3\} \cup H$

(f) $(K; +, \cdot) \to (\mathbb{R}; +, \cdot), \{a_n\} \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$, ahol K a konvergens valós számsorozatok halmaza

VÉGEREDMÉNYEK, MEGOLDÁSOK

1. Számelmélet

1.1. Oszthatóság, legnagyobb közös osztó, euklideszi algoritmus

1.1. feladat.

(a) 7 többszörösei: $\{7k : k \in \mathbb{Z}\}$ — megoldás: https://youtu.be/mPigchEMSEk

(b) 420 többszörösei: $\{420k : k \in \mathbb{Z}\}$ — megoldás: https://youtu.be/t4nG7hH4Tj0

(c) 4 többszörösei: $\{4k : k \in \mathbb{Z}\}$ — megoldás: https://youtu.be/LwNf6SZVsRY

(d) 28 osztói: $\{\pm1, \pm2, \pm4, \pm7, \pm14, \pm28\}$ — megoldás: https://youtu.be/uXRxRfHRidE

1.2. feladat.

(a) 7 többszörösei: $\{7k : k \in \mathbb{Z}\}$

(b) 264 többszörösei: $\{264k : k \in \mathbb{Z}\}$

(c) 18 osztói: $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18\}$

(d) 300 többszörösei: $\{300k : k \in \mathbb{Z}\}$

(e) 33 osztói: $\{\pm1, \pm3, \pm11, \pm33\}$

1.3. feladat. 60 — megoldás: https://youtu.be/1QozYexyCbE

1.4. feladat.

(a) $\text{lnko}(a, b) = 4 = -3a + 4b,\ \text{lkkt}(a, b) = 252$ — megoldás: https://youtu.be/mPigchEMSEk

(b) $\text{lnko}(a, b) = 6 = 2a - 5b,\ \text{lkkt}(a, b) = 390$ — megoldás: https://youtu.be/O9dvXVao1s4

(c) $\text{lnko}(a, b) = 7 = -194a + 75b,\ \text{lkkt}(a, b) = 580139$ — megoldás: https://youtu.be/yhc3rs_xcEU

1.5. feladat.

(a) $\text{lnko}(a, b) = 2 = 5a - 7b,\ \text{lkkt}(a, b) = 816$

(b) $\text{lnko}(a, b) = 23 = -3a + 7b,\ \text{lkkt}(a, b) = 2576$

(c) $\text{lnko}(a, b) = 77 = 2a - b,\ \text{lkkt}(a, b) = 7007$

(d) $\text{lnko}(a, b) = 13 = -4a - 3b,\ \text{lkkt}(a, b) = 143143$

1.6. feladat. A negyedik egységgyökök, azaz $z = 1, -1, i, -i$.

1.2. Lineáris diofantoszi egyenletek

1.7. feladat.

(a) $x = 2 + 5t,\ y = -2 - 6t\ (t \in \mathbb{Z})$ — megoldás: https://youtu.be/jUS-e1yxCR4

(b) $x = 2 - 5t,\ y = 2 - 7t\ (t \in \mathbb{Z})$ — megoldás: https://youtu.be/DAdW4fl4Z4Y

1.8. feladat.

(a) $x = -1 + 17t,\ y = 2 - 24t\ (t \in \mathbb{Z})$

(b) $x = -1 + 5t,\ y = 3 - 13t\ (t \in \mathbb{Z})$

(c) $x = -3 + 7t,\ y = 3 - 6t\ (t \in \mathbb{Z})$

(d) $x = 4 + 12t,\ y = -2 - 7t\ (t \in \mathbb{Z})$

(e) $x = 22 + 5t,\ y = 11 + 3t\ (t \in \mathbb{Z})$

(f) $x = -689 + 571t,\ y = 286 - 237t\ (t \in \mathbb{Z})$

(g) $x = 1479 + 418t,\ y = -697 - 197t\ (t \in \mathbb{Z})$

(h) nincs megoldása

1.9. feladat. $2 = |\{17, 25\}|$ — megoldás: https://youtu.be/dhQjZvZYFC8

1.10. feladat.

(a) $3 = |\{38, 47, 56\}|$

(b) $7 = |\{10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}|$

(c) $3 = |\{19, 26, 33\}|$

(d) $2 = |\{25, 38\}|$

1.11. feladat. $10 \cdot 20 + 1 \cdot 45$ és $1 \cdot 20 + 5 \cdot 45$ ☞ megoldás: https://youtu.be/pHs93VAV56g

1.12. feladat.

(a) Csak a 4-nél lévőt tudja megszerezni. ☞ megoldás: https://youtu.be/0uz2jiwxJeg

(b) $(-2) \cdot a + 3 \cdot b = 12$ (5 ugrás) ☞ megoldás: https://youtu.be/0uz2jiwxJeg

1.13. feladat. Az első esetben $18 \cdot a + 14 \cdot b = 1000$ (32 ugrás), a második esetben $(-1) \cdot a + 27 \cdot b = 1000$ (28 ugrás).

1.14. feladat. Végtelen sok megoldás van, íme a két legegyszerűbb: $12 \cdot 21 - 10 \cdot 25 = 2$ és $11 \cdot 25 - 13 \cdot 21 = 2$.

1.15. feladat. Gombóc Artúr 17 éves (és az ötödik napon fogyott el a csokoládé). Az alábbi linken a számítógép lépésenként végigvezet a feladat megoldásán:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2021tavasz/gombocartur.html

1.16. feladat. A rágó 56 forintba került, és 24 gyerek választotta, a csoki 125 forintba került, és 6 gyerek választotta.

1.17. feladat. 6, 10, 6 ☞ megoldás: https://youtu.be/XoX3vjwV9MI

1.18. feladat. 7, 5, 10

1.19. feladat. 1, 1, 5

1.3. A modulo m kongruenciareláció

1.20. feladat. $2, 7, 14$

1.21. feladat.

(a) 6 ☞ megoldás: https://youtu.be/_-h76rgIvgg

(b) 1 ☞ megoldás: https://youtu.be/_-h76rgIvgg

(c) 6 ☞ megoldás: https://youtu.be/_-h76rgIvgg

(d) 7 ☞ megoldás: https://youtu.be/RCqlfd5_iek

1.22. feladat.

(a) 8

(b) 9

(c) 13

(d) 7

(e) 4

1.23. feladat. $2^{n+2} + 3^{2n+1} = 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n \equiv 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n = 7 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod 7$
☞ megoldás: https://youtu.be/_-h76rgIvgg

1.24. feladat. $2^{5n+1} + 5^{n+2} = 2 \cdot 32^n + 25 \cdot 5^n \equiv 2 \cdot 5^n + 25 \cdot 5^n = 27 \cdot 5^n \equiv 0 \pmod{27}$

1.4. Lineáris kongruenciák

1.25. feladat.

(a) $x \equiv 3 \pmod 5$ — megoldás: https://youtu.be/WVdonTsgGZU

(b) $x \equiv 11 \pmod{14}$ — megoldás: https://youtu.be/WVdonTsgGZU

(c) $x \equiv 3 \pmod 4$ — megoldás: https://youtu.be/aqndyWxassg

(d) $x \equiv 61 \pmod{73}$ — megoldás: https://youtu.be/OKK5Qwo_oYM

1.26. feladat.

(a) $x \equiv 2 \pmod 4$

(b) $x \equiv 5 \pmod{34}$

(c) $x \equiv 2 \pmod{17}$

(d) nincs megoldása

(e) $x \equiv 10 \pmod{13}$

(f) $x \equiv 21 \pmod{31}$

(g) $x \equiv 44 \pmod{53}$

(h) $x \equiv 9 \pmod{23}$

1.27. feladat.

(a) $11,\ 25$

(b) ez lehetetlen

(c) $3,\ 10,\ 17,\ 24$ (először: $3,\ 17$)

1.28. feladat. 694

1.29. feladat. 103

1.5. Lineáris kongruenciarendszerek

1.30. feladat.

(a) $x \equiv 57 \pmod{70}$ — megoldás: https://youtu.be/m_J7XaKhQmE

(b) $x \equiv 43 \pmod{90}$ — megoldás: https://youtu.be/Mt1eWRo3mV8

(c) $x \equiv 214 \pmod{315}$ — megoldás: https://youtu.be/ENqm2oqMmR

1.31. feladat.

(a) $x \equiv 1 \pmod{10}$

(b) $x \equiv 29 \pmod{168}$

(c) $x \equiv 53 \pmod{90}$

(d) $x \equiv 37 \pmod{315}$

(e) $x \equiv -1 \pmod{56}$

(f) nincs megoldása

(g) $x \equiv 18 \pmod{35}$

(h) $x \equiv 17 \pmod{30}$

(i) $x \equiv 184 \pmod{210}$

1.32. feladat. 47 — megoldás: https://youtu.be/VW7nCtXrgjY

1.33. feladat. 31

1.34. feladat. 107

1.35. feladat. 3930

1.36. feladat. 119

1.37. feladat. $x \equiv 12c_1 + 55c_2 \pmod{66}$ — megoldás: https://youtu.be/m_J7XaKhQmE

1.38. feladat.

(a) $x \equiv 21c_1 + 50c_2 \pmod{70}$

(b) $x \equiv 40c_1 + 45c_2 + 36c_3 \pmod{60}$

1.6. Maradékosztályok

1.39. feladat.

(a) igen — megoldás: https://youtu.be/1t_OUyU8-Xk

(b) nem — megoldás: https://youtu.be/kLsPdMoDZrY

(c) igen — megoldás: https://youtu.be/kLsPdMoDZrY

1.40. feladat.

(a) nem

(b) igen

(c) igen

(d) nem

1.41. feladat.

(a) $\overline{3},\ \overline{13},\ \overline{5}$ — megoldás: https://youtu.be/O8GhI3fdAbI

(b) $\overline{7},\ \overline{13},\ \overline{6}$ — megoldás: https://youtu.be/yTB6jZGYpng

1.42. feladat.

(a) $\overline{4},\ \overline{16},\ \overline{3}$

(b) $\overline{11},\ \overline{15},\ \overline{0}$

(c) $\overline{15},\ \overline{12},\ \overline{9}$

1.43. feladat.

(a) nincs megoldása — megoldás: https://youtu.be/O8GhI3fdAbI

(b) $\overline{x} = \overline{4},\ \overline{9},\ \overline{14}$ — megoldás: https://youtu.be/O8GhI3fdAbI

(c) $\overline{x} = \overline{3}$ — megoldás: https://youtu.be/na257Lu75CU

(d) $\overline{x} = \overline{2},\ \overline{6}$ — megoldás: https://youtu.be/eseKJbPJbcs

(e) nincs megoldása — megoldás: https://youtu.be/eseKJbPJbcs

1.44. feladat.

(a) $\overline{x} = \overline{3},\ \overline{7},\ \overline{11}$

(b) $\overline{x} = \overline{10}$

(c) nincs megoldása

(d) $\overline{x} = \overline{8},\ \overline{18},\ \overline{28},\ \overline{38}$

(e) $\overline{x} = \overline{3}$

(f) $\overline{x} = \overline{11},\ \overline{25}$

(g) $\overline{x} = \overline{5},\ \overline{23},\ \overline{41},\ \overline{59},\ \overline{77}$

(h) $\overline{x} = \overline{2},\ \overline{19},\ \overline{36}$

1.7. Redukált maradékosztályok, multiplikatív inverz, multiplikatív rend

1.45. feladat.

(a) $\overline{88}^{-1} \in \mathbb{Z}_{55}$ nem értelmezett — megoldás: https://youtu.be/yjj7OWqAuK0

(b) $\overline{5}^{-1} = \overline{8} \in \mathbb{Z}_{13}$ — megoldás: https://youtu.be/yjj7OWqAuK0

1.46. feladat.

(a) $\overline{5}^{-1} = \overline{3} \in \mathbb{Z}_{14}$

(b) $\overline{9}^{-1} \in \mathbb{Z}_{12}$ nem értelmezett

(c) $\overline{3}^{-1} = \overline{2} \in \mathbb{Z}_{5}$

(d) $\overline{29}^{-1} = \overline{68} \in \mathbb{Z}_{73}$

1.47. feladat. Az inverz párok tagjai szorosan egymás mellé vannak írva; amelyik elemnek nincs „párja” az saját magának az inverze.

(a) $\mathbb{Z}_{15}^* = \{\overline{1};\quad \overline{2}, \overline{8};\quad \overline{4};\quad \overline{7}, \overline{13};\quad \overline{11};\quad \overline{14}\}$ — megoldás: https://youtu.be/na257Lu75CU

(b) $\mathbb{Z}_{9}^* = \{\overline{1};\quad \overline{2}, \overline{5};\quad \overline{4}, \overline{7};\quad \overline{8}\}$ — megoldás: https://youtu.be/t0CkN8RJv0g

1.48. feladat. Az inverz párok tagjai szorosan egymás mellé vannak írva; amelyik elemnek nincs „párja” az saját magának az inverze.

(a) $\mathbb{Z}_{7}^* = \{\overline{1};\quad \overline{2}, \overline{4};\quad \overline{3}, \overline{5};\quad \overline{6}\}$

(b) $\mathbb{Z}_{8}^* = \{\overline{1};\quad \overline{3};\quad \overline{5};\quad \overline{7}\}$

(c) $\mathbb{Z}_{10}^* = \{\overline{1};\quad \overline{3}, \overline{7};\quad \overline{9}\}$

(d) $\mathbb{Z}_{11}^* = \{\overline{1};\quad \overline{2}, \overline{6};\quad \overline{3}, \overline{4};\quad \overline{5}, \overline{9};\quad \overline{7}, \overline{8};\quad \overline{10}\}$

1.49. feladat.

(a) $\mathbb{Z}_{7}^*$-ban $o(\overline{2}) = 3$, $\overline{2}^{102} = \overline{1}$, $\overline{2}^{2021} = \overline{4}$ — megoldás: https://youtu.be/na257Lu75CU

(b) $\mathbb{Z}_{10}^*$-ban $o(\overline{3}) = 4$, $\overline{3}^{402} = \overline{9}$, $\overline{3}^{2021} = \overline{3}$ — megoldás: https://youtu.be/2RxZ-dqYC3k

1.50. feladat.

(a) $\mathbb{Z}_{11}^*$-ban $o(\overline{4}) = 5$, $\overline{4}^{200} = \overline{1}$, $\overline{4}^{2023} = \overline{9}$

(b) $\mathbb{Z}_{15}^*$-ban $o(\overline{13}) = 4$, $\overline{13}^{-102} = \overline{4}$, $\overline{13}^{2023} = \overline{7}$

(c) $\overline{2} \notin \mathbb{Z}_{10}^*$, így $o(\overline{2})$ nem ért., $\overline{2}^{402} = \overline{4}$, $\overline{2}^{2024} = \overline{6}$

(d) $\mathbb{Z}_{25}^*$-ban $o(\overline{21}) = 5$, $\overline{21}^{153} = \overline{11}$, $\overline{21}^{2024} = \overline{6}$

(e) $\mathbb{Z}_{18}^*$-ban $o(\overline{5}) = 6$, $\overline{5}^{908} = \overline{7}$, $\overline{5}^{-1} = \overline{11}$

(f) $\mathbb{Z}_{25}^*$-ban $o(\overline{6}) = 5$, $\overline{6}^{912} = \overline{11}$, $\overline{6}^{-67} = \overline{16}$

1.8. Az Euler-féle φ függvény

1.51. feladat.

(a) $\varphi(1000) = 400$ — megoldás: https://youtu.be/tul3OaZJnyc

(b) $\varphi(360) = 96$ — megoldás: https://youtu.be/tul3OaZJnyc

(c) $\varphi(2021) = 1932$ — megoldás: https://youtu.be/tul3OaZJnyc

1.52. feladat.

(a) $\varphi(60) = 16$

(b) $\varphi(88) = 40$

(c) $\varphi(20) = 8$

(d) $\varphi(30) = 8$

(e) $\varphi(75) = 40$

(f) $\varphi(128) = 64$

1.53. feladat.

(a) $x = 5, 8, 10, 12$

(b) nincs megoldása

(c) $x = 7, 9, 14, 18$

(d) $x = 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$

(e) $x = 12, 14, 16$

(f) nincs megoldása

(g) $x = 3, 4, 6$

(h) minden $x \in \mathbb{N}$ esetén teljesül

1.9. Az Euler–Fermat-tétel

1.54. feladat.

(a) $63^{42} \equiv 13^2 \equiv 19 \pmod{50}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/wfuSez0gA80

(b) $123^{765} \equiv 2^5 \equiv 10 \pmod{11}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/21jdmZsFfG0

1.55. feladat.

(a) $111^{50} \equiv 7^2 \equiv 49 \pmod{52}$

(b) $3^{65} \equiv 3^1 \equiv 3 \pmod{128}$

(c) $19^{81} \equiv 19^1 \equiv 19 \pmod{75}$

(d) $42^{62} \equiv 17^2 \equiv 14 \pmod{25}$

1.56. feladat.

(a) $6^{418} \equiv 6^{-2} \equiv 25 \pmod{29}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/KVMvp9UBUno

(b) $4447^{2018} \equiv 3^{-2} \equiv 5 \pmod{44}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/21jdmZsFfG0

1.57. feladat.

(a) $557^{517} \equiv 27^{-3} \equiv 8 \pmod{53}$

(b) $15^{159} \equiv 15^{-1} \equiv 25 \pmod{34}$

(c) $20^{449} \equiv 20^{-1} \equiv 14 \pmod{31}$

(d) $3^{298} \equiv 3^{-2} \equiv 14 \pmod{25}$

1.58. feladat. $1997^{1998} \equiv (-3)^{-2} \equiv 89 \pmod{100} \implies$ az utolsó két jegy 8 és 9

1.59. feladat. $\underbrace{11\ldots11}_{99} \equiv 9^{-1} \cdot \underbrace{99\ldots99}_{99} \equiv 4 \cdot (10^{99} - 1) \equiv 4 \cdot (3^3 - 1) \equiv 4 \cdot 26 \equiv 4 \cdot 5 \equiv -1 \pmod{7} \implies$ ugyanolyan nap lesz, mint amilyen tegnap volt

1.60. feladat. $13^{321^{50}} \equiv 13^{41^2} \equiv 13^1 \equiv 13 \pmod{87}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/Xoo_3zgZhsY

1.61. feladat.

(a) $91^{441^{222}} \equiv 3^{1^{222}} \equiv 3 \pmod{88}$

(b) $80^{111^{50}} \equiv 27^{7^2} \equiv 27^{-3} \equiv 8 \pmod{53}$

(c) $95^{81^{99}} \equiv 3^{15^{-1}} \equiv 3^3 \equiv 27 \pmod{46}$

1.62. feladat. $711^{185^{937}} \equiv 4^{(-1)^1} \equiv 4^{-1} \equiv 2 \pmod{7} \implies$ ugyanolyan nap lesz, mint holnapután

1.63. feladat. $googolplex = 10^{10^{100}} \equiv 10^4 \equiv (-5)^2 \equiv 4 \pmod{21}$

2. Kombinatorika

2.1. Összeszámlálási feladatok

2.1. feladat.

- 1.1(a) feladat: ismétléses permutáció
- 1.1(b) feladat: ismétlés nélküli permutáció
- 1.2(a) feladat: ismétlés nélküli variáció
- 1.2(b) feladat: ismétlés nélküli kombináció
- 1.3(a) feladat: ismétléses variáció
- 1.3(b) feladat: ismétléses kombináció

Megjegyzés. A feladatok megoldása során kiderült, hogy az ismétléses variáció kivételével minden eset visszavezethető ismétléses permutációra.

2.2. feladat. $\frac{11!}{6! \cdot 4! \cdot 1!}$

2.3. feladat. $\frac{11!}{6! \cdot 4! \cdot 1!} = \binom{11}{6} \cdot \binom{5}{4} = \binom{11}{4} \cdot \binom{7}{6} = \cdots$

2.4. feladat. 4^5

2.5. feladat. $7 \cdot 6$

2.6. feladat. $\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \binom{8}{3} = \binom{8}{5}$

2.7. feladat. $\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}$

2.8. feladat. $\binom{4}{2} \cdot 3!$

2.9. feladat. $\binom{5}{2} \cdot \binom{9}{2}$ ☞ megoldás: `https://youtu.be/zzvIfnlD-pQ`

2.10. feladat. $8! \cdot 2^8$

2.11. feladat. $\frac{5!}{5} \cdot 2^5$ ☞ megoldás: `https://youtu.be/c0KpdzOnq9I`

2.12. feladat. $\frac{5!}{5} \cdot 2$

2.13. feladat. $\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} + \binom{6}{3} \cdot \binom{5}{1} + \binom{6}{4} \cdot \binom{5}{0}$ ☞ megoldás: `https://youtu.be/Q0eIq2vkqVE`

2.14. feladat. $\binom{15}{3} \cdot \binom{5}{2} + \binom{15}{4} \cdot \binom{5}{1} + \binom{15}{5} \cdot \binom{5}{0}$

2.15. feladat.

(a) $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} = 4 \cdot 3 \cdot 13^2 \cdot \binom{13}{2}$

(b) $\binom{4}{2} \cdot \left[2 \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{3} + \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{2}\right]$

2.16. feladat. $\frac{5!}{2!\cdot 3!}+\frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!}+\frac{5!}{1!\cdot 3!\cdot 1!}$

2.17. feladat. $\frac{9!}{4!\cdot 5!}=\binom{6+4-1}{4}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/Tkka1GeoBTQ

2.18. feladat. $\frac{14!}{10!\cdot 4!}=\binom{5+10-1}{10}$

2.19. feladat. $\frac{32!}{30!\cdot 2!}=\binom{3+30-1}{30}$

2.20. feladat.

(a) $\frac{59!}{50!\cdot 9!}=\binom{59}{50}=\binom{10+50-1}{50}$

(b) $\frac{39!}{30!\cdot 9!}=\binom{39}{30}=\binom{10+30-1}{30}$

2.21. feladat. $\frac{23!}{3!}=20!\cdot\binom{4+20-1}{20}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/pPU1TAuvVvc

2.22. feladat. $\frac{17!}{2!}=15!\cdot\binom{3+15-1}{15}$

2.23. feladat. $\frac{30!}{6!}=24!\cdot\binom{7+24-1}{24}$

2.24. feladat. $\binom{11}{5}$

2.25. feladat. $\binom{6}{4}\cdot 4!\cdot 5!$ ☞ megoldás: https://youtu.be/J4hDWXVn2TQ

2.26. feladat. $\binom{4}{3}\cdot\frac{3!}{2!}\cdot\frac{3!}{2!}=4\cdot 3\cdot 3$

2.27. feladat.

(a) $\binom{7}{7}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot\frac{7!}{2!}$

(b) $\binom{8}{6}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot\frac{7!}{2!}$

2.2. Szita-formula

2.28. feladat. 6

2.29. feladat. 6 ☞ megoldás: https://youtu.be/UR3OkDb70lI

2.30. feladat. $7!-6!\cdot 2$

2.31. feladat.

(a) $7!-5!\cdot 3!$

(b) $7!-3\cdot 2\cdot 6!+3\cdot 2\cdot 5!=\binom{5}{3}\cdot 4!\cdot 3!$

2.32. feladat.

(a) $\binom{14}{4}-\binom{11}{4}-\binom{8}{4}+\binom{5}{4}$

(b) $\binom{14}{4}-\binom{11}{4}-\binom{8}{4}-\binom{9}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\binom{3}{4}-\binom{0}{4}$

2.33. feladat. 240 ☞ megoldás: https://youtu.be/COSBuaBPHjo

2.34. feladat.

(a) 618

(b) 480

(c) 51

(d) 592

2.35. feladat. $4^7 - 4 \cdot 3^7 + 6 \cdot 2^7 - 4$ ☞ megoldás: https://youtu.be/e4ucRzt98lA

2.36. feladat. $68^8 - 36^8 - 58^8 - 42^8 + 26^8 + 10^8 + 32^8$

2.37. feladat. Összesen 4^6, ebből $4^6 - 4 \cdot 3^6 + 6 \cdot 2^6 - 4$ szürjektív és 0 injektív.

2.38. feladat. Összesen 6^4, ebből 0 szürjektív és $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ injektív.

2.39. feladat. $2^n - 2$

2.40. feladat. $3^n - \binom{3}{2} \cdot 2^n + 3$

2.3. Binomiális tétel

2.41. feladat.

(a) $(3+7)^6 = 1\,000\,000$

(b) $(1-3)^5 = -32$

2.42. feladat. $\binom{6}{4} \cdot 3^2 \cdot 2^4 = 2160$ ☞ megoldás: https://youtu.be/9chEjB_Hqpc

2.43. feladat.

(a) $\binom{5}{1} \cdot 3^1 \cdot 2^4 = 240$

(b) $\binom{5}{2} \cdot 3^2 \cdot 2^3 = 720$

(c) 0

(d) $\binom{5}{3} \cdot 3^3 \cdot 2^2 = 1080$

2.44. feladat. $-\binom{12}{6,5,1} + \binom{12}{7,1,4} = -1584$ ☞ megoldás: https://youtu.be/1sX7p5fK4_E

2.45. feladat.

- x^{18} együtthatója $\binom{12}{6,6,0} - \binom{12}{7,2,3} = -6996$,
- x^{31} együtthatója $-\binom{12}{2,9,1} + \binom{12}{3,5,4} - \binom{12}{4,1,7} = 23100$

2.46. feladat.

(a) $\binom{12}{0,6,6} - \binom{12}{2,3,7} \cdot 2^2 + \binom{12}{4,0,8} \cdot 2^4 = -22836$

(b) $-\binom{12}{1,5,6} \cdot 2^1 + \binom{12}{3,2,7} \cdot 2^3 = 52272$

(c) $-\binom{12}{0,7,5} - \binom{12}{2,4,6} \cdot 2^2 - \binom{12}{4,1,7} \cdot 2^4 = -8712$

(d) $\binom{12}{1,4,7} \cdot 2^1 + \binom{12}{3,1,8} \cdot 2^3 = -7920$

3. Gráfelmélet

3.1. Fokszám, izomorfizmus

3.1. feladat.

(a) Nem lehetséges. ☞ megoldás: https://youtu.be/1hllEBC61ro

(b) Lehetséges. ☞ megoldás: https://youtu.be/1hllEBC61ro

3.2. feladat. Izomorfia erejéig két ilyen gráf van (az egyiknél 2, a másiknál 4 a hiányzó fokszám). ☞ megoldás: https://youtu.be/t5zpAOCXy-U

3.3. feladat.

(a) Izomorfia erejéig két ilyen gráf van.

(b) Izomorfia erejéig két ilyen gráf van.

(c) Nincs ilyen gráf.

(d) Izomorfia erejéig öt ilyen gráf van.

(e) Izomorfia erejéig egy ilyen gráf van.

(f) Nincs ilyen gráf.

3.2. Euler-vonal, Hamilton-kör

3.4. feladat.

(a) Van zárt Euler-vonal (és így nyílt nincs). ☞ megoldás: https://youtu.be/wyi4wDMBdzo

(b) Van nyílt Euler-vonal (és így zárt nincs). ☞ megoldás: https://youtu.be/wyi4wDMBdzo

(c) Van zárt Euler-vonal (és így nyílt nincs). ☞ megoldás: https://youtu.be/SgQ2zhTgluA

3.5. feladat.

(a) Van nyílt Euler-vonal (és így zárt nincs).

(b) Van zárt Euler-vonal (és így nyílt nincs).

(c) Nincs Euler-vonal (se zárt, se nyílt).

(d) Van zárt Euler-vonal (és így nyílt nincs).

(e) Van zárt Euler-vonal (és így nyílt nincs).

3.6. feladat.

(a) Van Hamilton-kör (és így Hamilton-út is). ☞ megoldás: https://youtu.be/wyi4wDMBdzo

(b) Van Hamilton-kör (és így Hamilton-út is). ☞ megoldás: https://youtu.be/wyi4wDMBdzo

(c) Van Hamilton-út, de Hamilton-kör nincs. ☞ megoldás: https://youtu.be/tQk59WYioPU

3.7. feladat.

(a) Nincs Hamilton-út (és így Hamilton-kör sincs).

(b) Van Hamilton-kör (és így Hamilton-út is).

(c) Van Hamilton-út, de Hamilton-kör nincs.

(d) Van Hamilton-kör (és így Hamilton-út is).

(e) Van Hamilton-kör (és így Hamilton-út is).

3.3. Síkgráfok

3.8. feladat.

(a) Síkgráf. ☞ megoldás: https://youtu.be/FyIR_GT_J74

(b) Síkgráf. ☞ megoldás: https://youtu.be/FyIR_GT_J74

(c) Nem síkgráf. ☞ megoldás: https://youtu.be/FyIR_GT_J74

(d) Nem síkgráf. ☞ megoldás: https://youtu.be/FyIR_GT_J74

(e) Nem síkgráf. ☞ megoldás: https://youtu.be/FyIR_GT_J74

3.9. feladat.

(a) Síkgráf.

(b) Síkgráf.

(c) Nem síkgráf.

3.4. Fák és erdők

3.10. feladat.

(a) 3 ☞ megoldás: https://youtu.be/bV7uhWyf6wQ

(b) 6 ☞ megoldás: https://youtu.be/0G8kEGyZRgI

3.11. feladat.

(a) 1

(b) 2

(c) 6

(d) 2

(e) 3

(f) 11

(g) 3

(h) 6

3.12. feladat.

(a) 2 és 18 között bármennyi lehet (de az összegük 20 kell legyen).

(b) 3

(c) 9

3.13. feladat. 21 ☞ megoldás: https://youtu.be/oqJWno0lnp4

3.14. feladat. 3

3.5. Páros gráfok

3.15. feladat.

(a) Nem páros gráf. ☞ megoldás: https://youtu.be/W-VujGiJYkA

(b) Páros gráf. ☞ megoldás: https://youtu.be/W-VujGiJYkA

(c) Páros gráf. ☞ megoldás: https://youtu.be/9Tv1hphnCjk

(d) Nem páros gráf. ☞ megoldás: https://youtu.be/LgODa1EaSIc

3.16. feladat.

(a) Páros gráf.

(b) Nem páros gráf.

(c) Páros gráf.

3.6. Párosítások

3.17. feladat.

(a) $\nu(G) = \tau(G) = 4$ ☞ megoldás: https://youtu.be/XwMXixtGgbc

(b) $\nu(G) = \tau(G) = 3$ ☞ megoldás: https://youtu.be/LqEAbojRueo

(c) $\nu(G) = \tau(G) = 6$ ☞ megoldás: https://youtu.be/SOTIxu_CZUE

(d) $\nu(G) = \tau(G) = 5$ ☞ megoldás: https://youtu.be/SOTIxu_CZUE

(e) $\nu(G) = \tau(G) = 10$ ☞ megoldás: https://youtu.be/jfUgSoi_gmQ

(f) $\nu(G) = \tau(G) = 10$ ☞ megoldás: https://youtu.be/LqEAbojRueo

3.18. feladat.

(a) $\nu(G) = \tau(G) = 4$

(b) $\nu(G) = \tau(G) = 5$

(c) $\nu(G) = \tau(G) = 6$

4. Absztrakt algebra

4.1. Műveletek, műveleti tulajdonságok

4.1. feladat.

(a) igen ☞ megoldás: https://youtu.be/yPbBhgA11Is

(b) nem ☞ megoldás: https://youtu.be/yPbBhgA11Is

(c) nem ☞ megoldás: https://youtu.be/yPbBhgA11Is

(d) igen ☞ megoldás: https://youtu.be/yPbBhgA11Is

(e) nem ☞ megoldás: https://youtu.be/yPbBhgA11Is

(f) nem ☞ megoldás: https://youtu.be/yPbBhgA11Is

(g) igen ☞ megoldás: https://youtu.be/yPbBhgA11Is

4.2. feladat.

(a) igen

(b) igen

(c) nem

(d) igen

(e) nem

(f) nem

4.3. feladat.

(a) Kommutatív; asszociatív; nem kancellatív; c zéruselem; a egységelem; a inverze a; b inverze b; c-nek nincs inverze; d-nek nincs inverze. ☞ megoldás: https://youtu.be/yPbBhgA11Is

(b) Nem kommutatív; nem asszociatív; nem kancellatív; nincs zéruselem; b egységelem; a inverzei c és d; b inverze b; c inverzei a és c; d inverze a. ☞ megoldás: https://youtu.be/yPbBhgA11Is

(c) Kommutatív; asszociatív; nem kancellatív; $\overline{0}$ zéruselem; $\overline{1}$ egységelem; $\overline{0}$-nak nincs inverze; $\overline{1}$ inverze $\overline{1}$; $\overline{2}$ inverze $\overline{3}$; $\overline{3}$ inverze $\overline{2}$; $\overline{4}$ inverze $\overline{4}$. ☞ megoldás: https://youtu.be/yPbBhgA11Is

(d) Kommutatív; asszociatív; nem kancellatív; $\{u, v\}$ zéruselem; $\emptyset$ egységelem; $\emptyset$ inverze $\emptyset$; a többi elemnek nincs inverze. ☞ megoldás: https://youtu.be/yPbBhgA11Is

4.4. feladat.

(a) Kommutatív; asszociatív; kancellatív; nincs zéruselem; 1 egységelem; 1 inverze 1; -1 inverze -1; i inverze $-i$; $-i$ inverze i.

(b) Nem kommutatív; nem asszociatív; nem kancellatív; nincs zéruselem; nincs egységelem (így inverzeket nem is lehet értelmezni).

(c) Kommutatív; asszociatív; nem kancellatív; 1 zéruselem; 3 egységelem; 3 inverze 3; a többi elemnek nincs inverze.

(d) Kommutatív; asszociatív; kancellatív; nincs zéruselem; w egységelem; u inverze v; v inverze u; w inverze w.

4.5. feladat.

(a) Kommutatív; asszociatív; kancellatív; nincs zéruselem; -23 egységelem; a inverze $-46-a$ (minden $a \in \mathbb{Z}$ esetén). ☞ megoldás: https://youtu.be/yPbBhgA11Is

(b) Nem kommutatív; nem asszociatív; nem kancellatív; nincs zéruselem; nincs egységelem (így inverzeket nem is lehet értelmezni). ☞ megoldás: https://youtu.be/yPbBhgA11Is

(c) Kommutatív; asszociatív; nem kancellatív; 3 zéruselem; 4 egységelem; 3-nak nincs inverze; a inverze $\frac{8-3a}{3-a}$ (minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ esetén). ☞ megoldás: https://youtu.be/yPbBhgA11Is

4.6. feladat.

(a) Nem kommutatív; asszociatív; nem kancellatív; nincs zéruselem; nincs egységelem (így inverzeket nem is lehet értelmezni).

(b) Nem kommutatív; nem asszociatív; kancellatív; nincs zéruselem; nincs egységelem (így inverzeket nem is lehet értelmezni).

(c) Kommutatív; asszociatív; nem kancellatív; 2 zéruselem; 3 egységelem; 2-nek nincs inverze; a inverze $\frac{2a-3}{a-2}$ (minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ esetén). Ennek a feladatnak Kunos Ádám által leírt részletes megoldása megtalálható itt: https://drive.google.com/file/d/1gU3u1W4bYRUMnVMmoHkA0v6uncspgyEQ/view

4.2. Algebrai struktúrák

4.7. feladat.

(a) Félcsoport (és így grupoid is). ☞ megoldás: https://youtu.be/o_Sn3pdlkQg

(b) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is). ☞ megoldás: https://youtu.be/o_Sn3pdlkQg

(c) Monoid (és így félcsoport, grupoid is). ☞ megoldás: https://youtu.be/o_Sn3pdlkQg

(d) Monoid (és így félcsoport, grupoid is). ☞ megoldás: https://youtu.be/o_Sn3pdlkQg

(e) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is). ☞ megoldás: https://youtu.be/o_Sn3pdlkQg

(f) Monoid (és így félcsoport, grupoid is). ☞ megoldás: https://youtu.be/o_Sn3pdlkQg

(g) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is). ☞ megoldás: https://youtu.be/o_Sn3pdlkQg

(h) Nem is grupoid. ☞ megoldás: https://youtu.be/o_Sn3pdlkQg

(i) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is). ☞ megoldás: https://youtu.be/o_Sn3pdlkQg

(j) Monoid (és így félcsoport, grupoid is). ☞ megoldás: https://youtu.be/o_Sn3pdlkQg

(k) Nem is grupoid. ☞ megoldás: https://youtu.be/o_Sn3pdlkQg

(l) Csoport (és így monoid, félcsoport, grupoid is). ☞ megoldás: https://youtu.be/o_Sn3pdlkQg

4.8. feladat.

(a) Nem is grupoid.

(b) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).

(c) Félcsoport (és így grupoid is).

(d) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).

(e) Félcsoport (és így grupoid is).

(f) Nem is grupoid.

(g) Monoid (és így félcsoport, grupoid is).

4.9. feladat.

(a) Grupoid.

(b) Monoid (és így félcsoport, grupoid is).

(c) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).

(d) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).

(e) Monoid (és így félcsoport, grupoid is).

(f) Grupoid.

4.10. feladat.

(a) Grupoid.

(b) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).

(c) Grupoid.

(d) Félcsoport (és így grupoid is).

(e) Monoid (és így félcsoport, grupoid is).

(f) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).

4.11. feladat.

(a) Monoid (és így félcsoport, grupoid is).

(b) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).

4.12. feladat.

(a) Test (és így gyűrű is). ☞ megoldás: https://youtu.be/w0-eJ9kzFis

(b) Mindegyik gyűrű, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_5$ még test is. ☞ megoldás: https://youtu.be/w0-eJ9kzFis

(c) Nem is gyűrű. ☞ megoldás: https://youtu.be/w0-eJ9kzFis

4.13. feladat.

(a) Test (és így gyűrű is).

(b) Test (és így gyűrű is).

(c) Gyűrű, de nem test.

(d) Nem is gyűrű.

(e) Gyűrű, de nem test.

(f) Test (és így gyűrű is).

(g) Gyűrű, de nem test.

(h) Test (és így gyűrű is).

(i) Gyűrű, de nem test.

4.14. feladat. Mindig gyűrű, és ha U egyelemű halmaz, akkor test is.

4.3. Izomorfia

4.15. feladat.

(a) $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, $\texttt{igaz} \mapsto \overline{0}$, $\texttt{hamis} \mapsto \overline{1}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/C6aePdjTdyo

(b) $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, $1 \mapsto \overline{0}$, $-1 \mapsto \overline{2}$, $i \mapsto \overline{1}$, $-i \mapsto \overline{3}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/C6aePdjTdyo
(de jó az is, hogy $1 \mapsto \overline{0}$, $-1 \mapsto \overline{2}$, $i \mapsto \overline{3}$, $-i \mapsto \overline{1}$)

4.16. feladat.

(a) $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, $\texttt{igaz} \mapsto \overline{1}$, $\texttt{hamis} \mapsto \overline{0}$

(b) $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, $1 \mapsto \overline{0}$, $-1 \mapsto \overline{1}$

(c) $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, $a \mapsto \overline{1}$, $b \mapsto \overline{3}$, $c \mapsto \overline{0}$, $d \mapsto \overline{2}$

4.17. feladat.

(a) $\mathbb{A} \ncong \mathbb{C}$ és $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$ (a következő izomorfizmus mellett: $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, $\texttt{igaz} \mapsto 1$, $\texttt{hamis} \mapsto 0$).
☞ megoldás: https://youtu.be/C6aePdjTdyo

(b) $\mathbb{A} \ncong \mathbb{B}$ és $\mathbb{A} \cong \mathbb{C}$ (pl. a következő izomorfizmus mellett: $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}$, $\emptyset \mapsto 2$, $\{1\} \mapsto 0$, $\{2\} \mapsto 3$, $\{1,2\} \mapsto 1$).
☞ megoldás: https://youtu.be/-pOhpN66N1w

4.18. feladat.

(a) $\mathbb{A} \ncong \mathbb{C}$ és $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$ (a következő izomorfizmus mellett: $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B},\ \ 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 0$).

(b) $\mathbb{A} \ncong \mathbb{B}$ és $\mathbb{A} \cong \mathbb{C}$ (a következő izomorfizmus mellett: $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C},\ \ \texttt{igaz} \mapsto 1,\ \texttt{hamis} \mapsto 0$).

(c) $\mathbb{A} \ncong \mathbb{C}$ és $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$ (a következő izomorfizmus mellett: $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B},\ \ -1 \mapsto 1,\ 0 \mapsto 2,\ 1 \mapsto 3$).

(d) $\mathbb{A} \ncong \mathbb{C}$ és $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$ (pl. a következő izomorfizmus mellett: $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B},\ \ \overline{1} \mapsto 0,\ \overline{2} \mapsto 1,\ \overline{3} \mapsto 3,\ \overline{4} \mapsto 2$).

4.4. Részalgebrák

4.19. feladat.

(a) $[c,d] = \{a,b,c,d\}$ — megoldás: https://youtu.be/roLhpHczlK0

(b) $[a,b] = \{a,b\}$ — megoldás: https://youtu.be/roLhpHczlK0

(c) $[a,d] = \{a,b,d\}$ — megoldás: https://youtu.be/RVku99K3_ds

4.20. feladat.

(a) $[a] = \{a\}$

(b) $[d] = \{a,b,d\}$

4.21. feladat. $[b] = \{a,b,c\}$ — megoldás: https://youtu.be/FXsSH4F1tJc

4.22. feladat.

(a) $[a] = \{a\}$

(b) $[b,c] = \{a,b,c\}$

(c) $[a,d] = \{a,d\}$

(d) $[c,d] = \{a,b,c,d\}$

4.23. feladat.

(a) $[2,9] = \{2,4,6,8,9,10,\dots\} = \mathbb{N} \setminus \{1,3,5,7\}$ — megoldás: https://youtu.be/roLhpHczlK0

(b) $[4,10] = \{4,8,10,12,\dots\} = \{2k : k \in \mathbb{N}\} \setminus \{2,6\}$ — megoldás: https://youtu.be/CzEEPfnNhOk

4.24. feladat.

(a) $[2,5] = \{2,4,5,6,\dots\} = \mathbb{N} \setminus \{1,3\}$

(b) $[3,5] = \{3,5,6,8,9,10,\dots\} = \mathbb{N} \setminus \{1,2,4,7\}$

4.25. feladat.

(a) $[2,9] = \{2^k \cdot 3^{2\ell} : k,\ell \in \mathbb{N}_0,\ k+\ell \geq 1\}$ — megoldás: https://youtu.be/roLhpHczlK0

(b) $[4,10] = \{2^k \cdot 5^\ell : k,\ell \in \mathbb{N}_0,\ k \geq \ell,\ 2 \mid k-\ell,\ k+\ell \geq 1\}$ — megoldás: https://youtu.be/BjqXiVwqGKg

4.26. feladat.

(a) $[2,5] = \{2^k \cdot 5^\ell : k,\ell \in \mathbb{N}_0,\ k+\ell \geq 1\}$

(b) $[3,5] = \{3^k \cdot 5^\ell : k,\ell \in \mathbb{N}_0,\ k+\ell \geq 1\}$

4.5. Részcsoportok

4.27. feladat.

(a) nem ☞ megoldás: https://youtu.be/zr6vqywG7kU

(b) igen ☞ megoldás: https://youtu.be/xb1wTYfeYCs

(c) nem ☞ megoldás: https://youtu.be/zr6vqywG7kU

(d) nem ☞ megoldás: https://youtu.be/xb1wTYfeYCs

(e) igen ☞ megoldás: https://youtu.be/zr6vqywG7kU

(f) nem ☞ megoldás: https://youtu.be/zr6vqywG7kU

(g) igen ☞ megoldás: https://youtu.be/xb1wTYfeYCs

(h) igen ☞ megoldás: https://youtu.be/zr6vqywG7kU

4.28. feladat.

(a) nem

(b) nem

(c) igen

(d) igen

(e) nem

(f) nem

(g) igen

(h) nem

4.29. feladat.

(a) $[B] = \{a \in \mathbb{Z} : 2 \mid a\}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/zr6vqywG7kU

(b) $[B] = \{a \in \mathbb{Z} : 5 \mid a\}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/4LQKf7y7fx8

(c) $[B] = \mathbb{Z}_{15}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/4LQKf7y7fx8

(d) $[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/zr6vqywG7kU

(e) $[B] = \mathbb{Z}_{15}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/zr6vqywG7kU

(f) $[B] = \mathbb{Z}_{16}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/u_G8h06W8ZM

(g) $[B] = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ (Gauss-egészek) ☞ megoldás: https://youtu.be/4LQKf7y7fx8

(h) $[B] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}\}$ ☞ megoldás: https://youtu.be/4LQKf7y7fx8

4.30. feladat.

(a) $[B] = \{a \in \mathbb{Z} : 2 \mid a\}$

(b) $[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$

(c) $[B] = \mathbb{Z}_{15}$

(d) $[B] = \{a \in \mathbb{Z} : 3 \mid a\}$

(e) $[B] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}\}$

(f) $[B] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\}$

(g) $[B] = \{\overline{1}, \overline{8}, \overline{13}, \overline{20}\}$

(h) $[B] = E_4 = \{1, -1, i, -i\}$ (negyedik egységgyökök)

(i) $[B] = \left\{\frac{k}{6} : k \in \mathbb{Z}\right\}$

(j) $[B] = \mathbb{Z}$

(k) $[B] = \mathbb{Z}$

(l) $[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$

(m) $[B] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\}$

(n) $[B] = \mathbb{Z}_{16}$

(o) $[B] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}\}$

(p) $[B] = \{2^k 3^\ell : k, \ell \in \mathbb{Z}\}$

(q) $[B] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\} = \mathbb{Z}_7^*$

(r) $[B] = \{\overline{1}, \overline{4}\}$

4.6. Ciklikus csoportok, elem rendje

4.31. feladat.

(a) $o(a) = 4$ — megoldás: https://youtu.be/dpvHTj05KCs

(b) $o(a) = 10$ — megoldás: https://youtu.be/dpvHTj05KCs

(c) $o(a) = 20$ — megoldás: https://youtu.be/dpvHTj05KCs

(d) $o(a) = 5$ — megoldás: https://youtu.be/dpvHTj05KCs

(e) $o(a) = 7$ — megoldás: https://youtu.be/vURkfeX6Ur0

(f) $o(a) = \infty$ — megoldás: https://youtu.be/vURkfeX6Ur0

(g) $o(a) = \infty$ — megoldás: https://youtu.be/dpvHTj05KCs

(h) $o(a) = \infty$ — megoldás: https://youtu.be/dpvHTj05KCs

(i) $o(a) = 4$ — megoldás: https://youtu.be/dpvHTj05KCs

(j) $o(a) = 3$ — megoldás: https://youtu.be/vURkfeX6Ur0

(k) $o(a) = 6$ — megoldás: https://youtu.be/vURkfeX6Ur0

(l) $o(a) = 4$ — megoldás: https://youtu.be/dpvHTj05KCs

4.32. feladat.

(a) $o(a) = 7$

(b) $o(a) = 3$

(c) $o(a) = 21$

(d) $o(a) = 7$

(e) $o(a) = \infty$

(f) $o(a) = 2$

(g) $o(a) = 3$

(h) $o(a) = 4$

(i) $o(a) = 5$

(j) $o(a) = 30$

(k) $o(a) = 3$

(l) $o(a) = 10$

(m) $o(a) = 15$

(n) $o(a) = 2$

4.7. Kongruencia, faktoralgebra

4.33. feladat.

(a) nem kompatibilis — megoldás: https://youtu.be/9Zsq2EKDKwE

(b) kompatibilis — megoldás: https://youtu.be/9Zsq2EKDKwE

(c) kompatibilis — megoldás: https://youtu.be/1aCfAViM6do

4.34. feladat.

(a) nem kompatibilis

(b) kompatibilis

(c) nem kompatibilis

(d) kompatibilis

4.35. feladat.

(a) kompatibilis — megoldás: https://youtu.be/n8GTH-x4Vxk

(b) nem kompatibilis — megoldás: https://youtu.be/_rp3rvrzfEc

4.36. feladat.

(a) kompatibilis

(b) kompatibilis

(c) nem kompatibilis

(d) kompatibilis

(e) kompatibilis

4.37. feladat.

(a) nem kompatibilis — megoldás: https://youtu.be/9Zsq2EKDKwE

(b) kompatibilis — megoldás: https://youtu.be/9Zsq2EKDKwE

4.38. feladat.

(a) nem kompatibilis

(b) kompatibilis

4.8. Homomorfizmus

4.39. feladat.

(a) igen — megoldás: https://youtu.be/kj3fhbzcD0o

(b) igen — megoldás: https://youtu.be/0mnwXTZ08VY

(c) igen — megoldás: https://youtu.be/0mnwXTZ08VY

(d) nem — megoldás: https://youtu.be/0mnwXTZ08VY

(e) igen — megoldás: https://youtu.be/kj3fhbzcD0o

(f) igen — megoldás: https://youtu.be/0mnwXTZ08VY

(g) nem — megoldás: https://youtu.be/kj3fhbzcD0o

(h) nem — megoldás: https://youtu.be/kj3fhbzcD0o

4.40. feladat.

(a) nem

(b) igen

(c) nem

(d) igen

(e) igen

(f) igen