**Bevezetés a biomatematikába**

**Jelölések, fogalmak**

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ a természetes számok halmaza.

$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ a pozitív egész számok halmaza.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \{m - n | m, n \in \mathbb{N}\}$ az egész számok halmaza

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ a racionális számok halmaza

Minden ralcionális szám felírható véges vagy szakaszos végtelen tizedes tört formájában és minden véges vagy szakaszos végtelen tizedes tört benne van $\mathbb{Q}$-ban. Például: $\frac{7}{6} = 1,166\overline{6}\ldots$, $\frac{157}{140} = 1,12142857\overline{142857}\ldots$ $\frac{1}{2} = 0,5$. Ha $S = 1,5632\overline{32}\ldots$, akkor $10000S - 100S = 15632 - 156 = 15476$, amelyből

$$(10000 - 100)S = 15476,$$

$$9900S = 15476,$$

$$S = \frac{15476}{9900}.$$

Az olyan végtelen tizedes törtek is számokat jelölnek, amelyek nem szakaszos vagy véges törtek. Ilyen például a

$$0,01001000100001000001 0...$$

szám, vagy a $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$ szám is. Az ilyen számokat irracionális számoknak nevezzük. A racionális és az irracionális számok halmazának egyesítését $\mathbb{R}$-vel jelöljük és a valós számok halmazának nevezzük. Használjuk még az

$\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$,

$R^- = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$,

$[a, b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$,

$(a, b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$,

$[a, b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$,

$(a, b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$,

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, $a \in \mathbb{R}$,

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$, $a \in \mathbb{R}$,

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$, $a \in \mathbb{R}$,

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$, $a \in \mathbb{R}$.

halmazokat is.

## 1. Sorozatok

Ha minden természetes számhoz hozzárendelünk egy valós számot, akkor sorozatot kapunk. Az $n \in \mathbb{N}$-hez rendelt valós számot $a_n$-vel jelölve a sorozatot az $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ alakban, vagy röviden az $a_n$, $n \geq 0$ formában írjuk fel. $a_n$-et a sorozat $n$-edik tagjának nevezzük. Például az

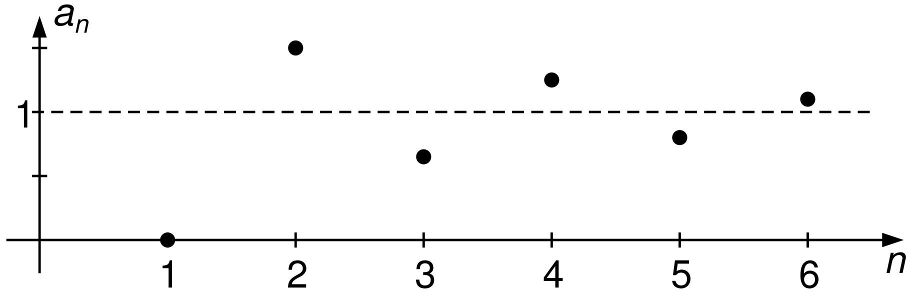
$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$$

sorozat $n$-edik tagja $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, a

$$\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \ldots\}$$

sorozat $n$-edik tagja $a_n = \sqrt{n}$. Kényelmi okok miatt a számozást nem mindig 0-val kezdjük, $\mathbb{N}$ elejéről véges sok tagot elhagyva, az így kapott pozitív egész számokhoz rendelt valós számokat is sorozatnak nevezzük. Például a $2, 3, 4, \ldots$ számokhoz rendelve az $\dfrac{1}{2^2-1}$, $\dfrac{1}{3^2-1}$, $\dfrac{1}{4^2-1}, \ldots$ számokat, ez is sorzatot alkot. Ennek általános tagja $a_n = \dfrac{1}{n^2-1}$, $n \geq 2$.

A sorozatokat ábrázolhatjuk is a derékszögű koordináta rendszerben, ha ponttal jelöljük az $(n, a_n)$ pontpárokat. Az alábbi grafikon az $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n} + 1$, $n \geq 1$ sorozatot ábrázolja.



Az $a_n$ sorozatot felülről korlátosnak mondjuk, ha van olyan $K \in R$, hogy minden $n$ esetén $a_n \leq K$. Az $a_n$ sorozat alulról korlátos, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n$-re $a_n \geq K$. Az $a_n$ sorozatot korlátosnak nevezzük, ha alulról és felülről is korlátos. Az $a_n$ sorozat monoton növő, ha $a_n \leq a_{n+1}$ minden $n$-re $a_n$ monoton csökkenő, ha $a_n \geq a_{n+1}$ minden $n$-re. Az $a_n$ sorozat monoton, ha monoton növő, vagy monoton csökkenő.

Az $\{a_1, a_2, \ldots\}$ sorozatot akkor nevezzük konvergensnek, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy $n$ növekedésével az $a_n$ számok egyre közelebb kerülnek $A$-hoz. Az $A$ számot ilyenkor a sorozat határértékének nevezzük. Ezek jelölése

$$a_n \to A, \quad \text{ha} \quad n \to \infty$$

vagy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Vannak olyan sorozatok is, amelyek nem konvergensek. Az ilyeneket divergensnek hívjuk.

Az $a_n \to A$, ha $n \to \infty$ tulajdonság pontos ellenőrzéséhez meg kell keresni az olyan $n \in \mathbb{N}$ számokat, amelyre a

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesül. Itt $\varepsilon$ tetszőleges pozitív valós szám lehet. Az $a_n \to A$, ha $n \to \infty$ határérték akkor lesz igaz, ha a megoldások halmaza $[N, \infty) \cap \mathbb{N}$ alakú valamilyen $N \in \mathbb{R}^+$ számra.

Például az $\dfrac{n^2}{n^2-1} \to 1$, ha $n \to \infty$ reláció belátáshoz az

$$\left|\frac{n^2}{n^2-1} - 1\right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget kell vizsgálni. Mivel $\dfrac{n^2}{n^2-1} > 1$, ezért

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2}{n^2-1} - 1\right| = \frac{n^2}{n^2-1} - 1 &< \varepsilon, \\
\frac{1}{n^2-1} &< \varepsilon, \\
\frac{1}{\varepsilon} &< n^2 - 1 \\
\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon}} &< n
\end{aligned}$$

Így $\dfrac{n^2}{n^2-1} \to 1$, ha $\to \infty$ tényleg igaz. $\dfrac{n^2}{n^2-1} \to \dfrac{1}{2}$, ha $n \to \infty$ viszont nem lesz igaz, mert az $\left|\dfrac{n^2}{n^2-1} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget ha meg akarjuk oldani, akkor

$$\frac{n^2}{n^2-1} - \frac{1}{2} < \varepsilon,$$

$$\frac{2n^2 - n^2 + 1}{n^2-1} > \varepsilon$$

$$\frac{n^2+1}{n^2-1} < \varepsilon$$

$$\frac{n^2-1+2}{n^2-1} < \varepsilon$$

$$1 + \frac{2}{n^2-1} < \varepsilon$$

következik, amely csak $\varepsilon > 1$ esetén oldható meg, mivel $\dfrac{2}{n^2-1} > 0$.
A fenti eljárás azonban sokszor nehéz, néha meg lehetetlen, így a gyakorlatban nehezen alkalmazható. Könnyebben alkalmazható, ha műveleti szabályokkal ismert határértékre vezetjük vissza a feladatot.

## Nevezetes határértékek

1) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad |q| < 1 \\ 1, & \text{ha} \quad q = 1 \\ \text{divergens,} & \text{különben} \end{cases}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, ha $a > 0$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, ha $a > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ is létezik, de ez nem racionális szám. $e$-vel szoktuk jelölni.

## Határátmeneti szabályok

| Ha | Akkor |
|---|---|
| 1) $a_n \to a, c \in \mathbb{R}$, | $ca_n \to ca$ |
| 2) $a_n \to a, b_n \to b$ | $a_n + b_n \to a + b$ |
| 3) $a_n \to a, b_n \to b$ | $a_n b_n \to ab$ |
| 4) $a_n \to a, b_n \to b, b \neq 0$ | $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$ |
| 5) $a_n \to a, b_n \to b, a > 0$ | $a_n^{b_n} \to a^b$ |
| 6) $a_n \to a, b_n \to b$ és $a_n \leq b_n$ | $a \leq b$ |
| 7) $a_n \to a, b_n \to a$ és $a_n \leq c_n \leq b_n$ | $c_n \to a$ |

## Példák

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n+5}{n^2-n+2} =?$

$$\frac{2n^2+3n+5}{n^2-n+2} = \frac{n^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{\left(2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{1\cdot\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

Mivel $\dfrac{1}{n} \to 0$, ezért 3) szerint $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n} \to 0$, innen 1)-ből $\dfrac{3}{n} \to 0$, $-\dfrac{1}{n} \to 0$, $\dfrac{5}{n^2} \to 0$, $\dfrac{2}{n^2} \to 0$

2)-ből $2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2} \to 2$, $1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2} \to 1$ és így

4) szerint $\dfrac{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}} \to 2$, ami a keresett határérték.

2) $\lim n \to \infty \sqrt[n]{5^n+2^n+1} =?$

Mivel $5^n \leq 5^n+2^n+1 \leq 5^n+5^n+5^n = 3\cdot 5^n$ így $5 \leq \sqrt[n]{5^n+2^n+1} \leq \sqrt[n]{3\cdot 5^n} = 5\sqrt[n]{3}$.

Legyen $a_n = 5$, $b_n = 5\sqrt[n]{3}$ és $c_n = \sqrt[n]{5^n + 2^n + 1}$. Mivel $a_n \to 5$ és $\sqrt[n]{3} \to 1$ nevezetes határértékek és 1) szerint $5\sqrt[n]{3} \to 5$ így 7)-ből

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n + 2^n + 1} = 5$$

adódik.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n =$? Mivel

$$1 - \frac{2}{n} = \frac{n-2}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-2}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2}} = \frac{1}{\frac{n-1+1}{n-1}} \cdot \frac{1}{\frac{n-2+1}{n-2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n-2}},$$

ezért

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{n-2}\left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^2}.$$

A nevezetes határértékek alapján

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \to e, \quad \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{n-2} \to e, \quad \frac{1}{n-1} \to 0,$$

így a határátmeneti szabályok alapján

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \frac{1}{e \cdot 1} \cdot \frac{1}{e \cdot 1} = \frac{1}{e^2}.$$

### A határérték legfontosabb tulajdonságai

1) Konvergens sorozatnak pontosan egy határértéke létezik.
2) Konvergens sorozat mindig korlátos.
3) Van olyan korlátos sorozata, ami nem konvergens (például $a_n = (-1)^n$).
4) Ha egy sorozat monoton növő és felülről korlátos, akkor konvergens.
5) Ha egy sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens.
6) Van olyan sorozat, ami konvergens, de nem monoton (például $\dfrac{(-1)^n}{n}$).

## Rekurzív sorozatok

Ha $k \in \mathbb{N}^+$, $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ adottak és tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re az $a_{n+k}$ tag az $a_{n+k-1}$, $a_{n+k-2}, \ldots, a_n$ tagok segítségével van meghatározva, akkor az $a_n$ sorozatot $k$-ad rendű rekurzív sorozatnak nevezzük.

Például:

$a_0 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n$ elsőrendű

$a_0 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{4}{a_n + 3}$ elsőrendű

$a_0 = 2, a_1 = 1, a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ másodrendű

$a_0 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ másodrendű rekurzív sorozatok. Az utolsó a híres Fibonacci-féle számsorozat. Először ennek a tárgyalását nézzük meg.

## A Fibonacci-féle sorozat

A neves olasz matematikus Fibonacci 1228-ban kiadott "Könyv az abakuszról" című művében található az azóta híressé vált következő példa:

Vizsgáljuk meg, mennyivel szaporodik egy pár ma született nyúl egy év alatt a következő feltételek mellett:

a) Minden nyúlpár minden hónap végén egy párral szaporodik.

b) A nyulak kéthónapos korukban ivaréretek. (Tehát ekkor hoznak elő első ízben utódokat).

Jelölje $a_n$ az $n$-edik hónap végén a nyúlpárok számát. Így egy sorozatot kapunk, amelyre $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ hiszen a nyulak a 2-ik hónap végén hoznak elő először utódot.

Az $n+2$-ik hónap végén az egyhónapos nyúlpárok száma annyi, mint ahány az $n+1$-edik hónap végén született nyúlpárok száma $(a_{n+1} - a_n)$ meg még kétszer annyi, mint a legalább 2 hónaposok száma pedig $a_n$.

Tehát $a_{n+2} = a_{n-1} - a_n + 2a_n = a_{n+1} + a_n$ $n \in \mathbb{N}$ esetén. Látható, hogy Fibonacci példája egy másodrendű rekurzív sorozatra vezet. Ennek egyértelmű a megoldása, az első tizenkét tagja

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144.$$

A Fibonacci-sorozat fontos szerepet játszik a matematika számos területén, szoros kapcsolatban áll a természetes növekedés törvényszerűségeivel, felfedezhetjük különböző növények mintázatában és a természeti jelenségek tükröződéseképpen számos művészeti alkotás szerkezetében, a nevezetes aranyszabály arányaiban.

Érdekes megfigyelni különböző növényeknél a közös ágon elhelyezkedő levelek helyzetét. Ezek a levelek általában nem pontosan egymás felett vannak, tehát nem egy egyenes mentén helyezkednek el, hanem kicsit elcsavarodva, egy szabályos csigavonal mentén. Botanikusok úgy találták, hogy létezik egy - az egyes növényfajtákra jellemző - tört, melynek számlálóját úgy kapjuk, hogy megnézzük, egy levél és egy pontosan felette elhelyezkedő másik levél közé a csigavonal hány periódusa esik (hányszor csavarodik körül a száron), nevezőjét pedig úgy, hogy megszámoljuk, a csigavonal vizsgált részét az ezen belül elhelyezkedő levelek hány részre osztják.

Ezt a tört a hársfa és szilfa esetén $\frac{1}{2}$, éger és bükk esetén $\frac{1}{3}$, tölgy, sárgabarack és cseresznyefa esetén $\frac{2}{5}$, jegenye, nyár és körtefa esetén $\frac{3}{8}$, fűz és mandula esetén $\frac{5}{13}$. Szembeötlő, hogy az összes felsorolt szám a *Fibonacci-sorozat* tagjainak hányadosa.

Egy másik szép példa a *Fibonacci-számok* felbukkanására a fenyőtoboz vagy az ananász pikkelyeinek, a napraforgó magjainak elrendeződése, amelyekhez hasonló termésszerkezet egy egész csomó növényen megfigyelhető (bogáncsok, fészkesek, kelfélék, kőrózsafélék, kaktuszok, kalászosok stb.). Ezeken a terméseken a magok (vagy pikkelyek) különböző spirálvonalak mentén helyezkednek el, és ha megszámoljuk, hogy a spirálisból hány darab van, akkor a Fibonacci féle sorozat valamelyik tagját kapjuk.

Felmerül az a kérdés, hogy nagy $n$-re ki lehet-e számolni az $n$-edik tagot anélkül, hogy ki kellene számolni az összes előtte lévőt. Vagyis az a feladat, hogy adjuk meg az $a_n$ tagot az $n$ függvényében, amelyre

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1 \quad \text{és} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \geq 0.$$

A feladat megoldásához először csak az $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ képzési szabályt kielégítő sorozatokat keressünk $a_0 = 1$ és $a_1 = 1$-et hagyjuk figyelmen kívül. Könnyen észrevehető, hogy $a_n = q^n$ típusú megoldás létezik, hiszen ha ezt behelyettesítjük $q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$-et kapunk, amelyben $q^n$-el lehet egyszerűsíteni, azaz $q^2 = q + 1$ adódik. Ez $q$-ra 2-od fokú egyenlet, amely megoldása

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Tehát az $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ egyenletet $a_n = \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n$ is, és $a_n = \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$ is kielégíti.
Ha $A, B \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek, akkor $a_n = A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$ is megoldás, mert

$$\begin{aligned}
a_{n+2} = A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+2} &+ B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+2} = \\
= A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^2 &+ B\Big(1-\sqrt{5}2\Big)^n\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^2 \\
= A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n\frac{3+\sqrt{5}}{2} &+ B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\frac{3-\sqrt{5}}{2} \\
= A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) &+ B\Big(1-\sqrt{5}2\Big)^n\Big(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) \\
= A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} &+ B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n + B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} \\
&= a_n + a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Válasszuk úgy a $A, B$ valós számokat, hogy $a_0 = 1$; $a_1 = 1$ is teljesüljön, azaz

$$A + B = 1$$

$$A\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1.$$

Innen $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $B = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ adódik. Mivel a Fibonacci számsorozat tagja egyértelműen adott, a fentiekből

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\Big)$$

adódik. Ennek az az érdekessége, hogy benne $\sqrt{5}$ irracionális szám, és mégis $a_n$ egész szám.

Megjegyezzük, hogy hasonlóan vizsgálható az

$$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$$

képlettel megadott rekurzív sorozat is, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta = 0$, ha a $q^2 = \alpha q + \beta$ egyenletnek $q$-ra 2 különböző megoldása van. A $\beta = 0$ esetben

$$a_{n+1} = \alpha a_n$$

-re redukálódik a képzési szabály. Nyílvánvaló, hogy ekkor elegendő $a_0$-t megadni, ez már egyértelműen megadja $a_n$-t. $a_1 = \alpha a_0$, $a_2 = \alpha a_1 = \alpha^2 a_0$, $a_3 = \alpha^3 a_0$ és általában, $a_n = \alpha^n a_0$ adódik ebben az esetben.

Ha $\alpha = 1$, akkor $a_n = a_0$ minden $n$-re

Ha $|\alpha| < 1$, akkor $\alpha^n \to 0$ és $a_n \to 0$

Más esetben $\alpha^n$ divergens és így $a_n$ is.

Ha a $q^2 = \alpha + q + \beta$ egyenletnek egyetlen megoldása van csak, akkor a másodfokú egyenlet diszkriminánsa zérus $\alpha^2 + 4\beta = 0$ és $q = \dfrac{\alpha}{2}$ az egyetlen megoldás. Ekkor az $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ egyenletnek $a_n = q^n(A + Bn)$ megoldása tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}$ esetén. Ugyanis

$$A_{n+1} = q^{n+1}(A + B(n+1)) = q^n(Aq + Bqn + Bq)$$

és így

$$\alpha a_{n+1} + \beta a_n = q^n(A\alpha q + B\alpha qn + B\alpha q + q^n(\beta A + \beta Bn) =$$

$$= q^n(A(\alpha q + \beta) + Bn(\alpha q + \beta) + B\alpha q) = q^n(Aq^2 + Bnq^2 + B \cdot 2q^2) =$$

$$= Aq^{n+2} + Bq^{n+2}(n+2) = a_{n+2}.$$

### Tágabb értelemben vett határérték

A divergens sorozatok között is vannak olyanok, amelyek egyre nagyobb és nagyobb értékeket vesznek fel, ha $n$ növekszik. Akkor teljesül, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ számra az $a_n \geq K$ egyenlőtlenség $n$-re való megoldásainak halmaza tartalmazza az $\{N, N+1, N+2, \ldots\}$ halmazt valamilyen $N$ természetes számra. Ilyenkor azt mondjuk, hogy $a_n$ a plusz végtelenbe divergál, vagy hogy a plusz végtelenbe tart.

Jelölése: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, vagy $a_n \to \infty$, ha $n \to \infty$.

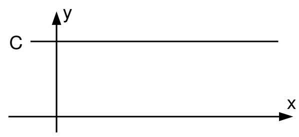
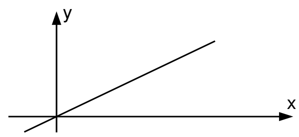
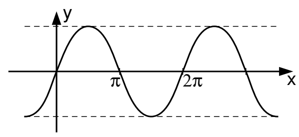
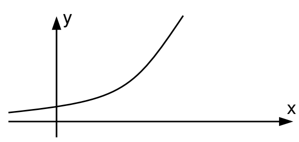
Analóg módon definiáljuk az $a_n$ a mínusz végtelenbe divergál (vagy tart) tulajdonságot is. Ennek jelölése $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, vagy $a_n \to -\infty$, ha $n \to \infty$. Ez a tulajdonság akkor teljesül, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén $a_n \le K$ megoldásainak halmaza tartalmazza a $\{N, N+1, N+2, \ldots\}$ halmazt valemilyen $N \in \mathbb{N}$ esetén.

### Függvények általában

Ha a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz minden pontjához hozzá rendelünk egy valós számot, akkor függvényt kapunk. A $H$ halmazt a függvény értelmezési tartományának nevezzük, ennek jelölése $D_f$. A sorozatok is függvények, ezek értelmezési tartománya $\mathbb{N}$ vagy egy $\{N, N+1, N+2, \ldots\}$ halmaz valamilyen $N \in \mathbb{N}$ esetén. A továbbiakban főleg olyan függvényekről lesz szó, amelyek esetén az értelmezési tartomány intervallum, vagy ezek egyesítése. Az ilyen függvények jelölésére általában az $f, g, h$ betűk valamelyikét használjuk, de használhatunk mást is. Az $f$ függvény esetén $f(x)$-el jelöljük a $x \in D_f$-hez hozzárendelt értéket. Ezek összessége a függvény érték készlete, ennek jelölése $R_f$.

$$R_f = \{f(x) | x \in D_f\}.$$

Az $\{(x, f(x)) | x \in D_f\}$ halmazt a függvény grafikonjának nevezzük. Ezt a Descartes-féle koordináta rendszerben szoktuk szemléltetni. A következő függvényeket elemi függvényeknek nevezzük.

| $f$ | $f(x)$ | $D_f$ | $R_f$ | grafikon |
|---|---|---|---|---|
| állandó | $c$ $(\in \mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ | $\{c\}$ |   |
| identitás | $x$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |   |
| szinusz | $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $[-1, 1]$ |   |
| exponenciális | $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $(0, \infty)$ |   |

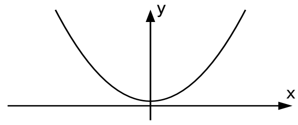
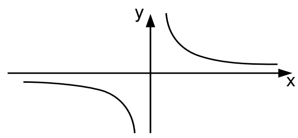
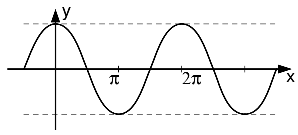
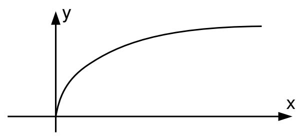
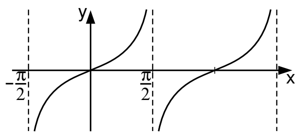
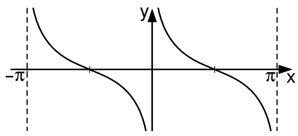
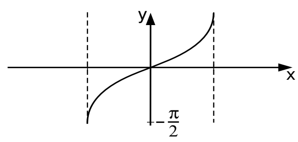
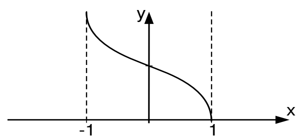
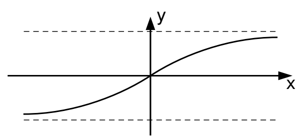
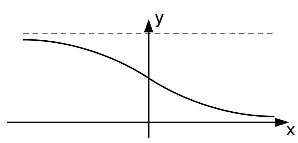
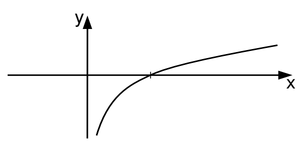
**Függvény műveletek**

Ezek egyrésze a sorozatokra ismert műveletek kiterjesztése ($+, \cdot, /$, hatv.), de az összetett függvény inverz függvény képzést, megszorítást nem szoktuk sorozatokra értelmezni.

Legyen $f, g$ két függvény értelmezési tartományuk $D_f$ és $D_g$ és legyen $c \in \mathbb{R}$.

| művelet | jele | értéke | értelmezési tartománya |
|---|---|---|---|
| konstanssal való szorzás | $cf$ | $cf(x)$ | $D_f$ |
| összeadás | $f+g$ | $f(x)+g(x)$ | $D_f \cap D_g$ |
| szorzás | $fg$ | $f(x)g(x)$ | $D_f \cap D_g$ |
| osztás | $\frac{f}{g}$ | $\frac{f(x)}{g(x)}$ | $D_f \cap \{x \in D_g \mid g(x) \neq 0\}$ |
| hatványozás | $f^g$ | $f(x)^{g(x)}$ | $D_f \cap \{x \in D_g \mid f(x) > 0\}$ |
| összetett függvényképzés | $f \circ g$ | $f(g(x))$ | $\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ |
| megszorítás $H \subset D_f$-re | $f\|_H$ | $f\|_H(x) = f(x)$ | $H$ |
| inverz függvény, ha $f(y) = x$ egyértelműen megadható $y$-ra minden $x \in R_f$ esetén | $\hat{f}$ | $\hat{f}(x) = y$ akkor és csakis akkor, ha $x = f(y)$ | $R_f$ |

Az elemi függvényekből a felsorolt műveletek segítségével további függvényeket kapunk. Az így kapott függvényeket is elemi függvényeknek nevezzük. A legfontosabbak ezek közül

| $f$ | $f(x)$ | $D_f$ | $R_f$ | grafikon |
|---|---|---|---|---|
| parabola | $ax^2, \quad a > 0$ | $\mathbb{R}$ | $[0, \infty$ |  |
| hiperbola | $\frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ | $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ |  |
| koszinusz | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $[-1, 1]$ |  |
| négyzetgyök | $\sqrt{x}$ | $[0, \infty)$ | $[0, \infty)$ |  |
| tangens | $\text{tg}x$ | $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \lambda\pi,$ $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ | $\mathbb{R}$ |  |
| kotangens | $\text{ctg}x$ | $\mathbb{R}\backslash\{\mu\pi,$ $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ | $\mathbb{R}$ |  |
| arkusz szinusz | $\arcsin x$ | $[-1, 1]$ | $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ |  |
| arkusz koszinusz | $\arccos x$ | $[-1, 1]$ | $[0, \pi]$ |  |
| arkusz tangens | $\text{arctg}x$ | $\mathbb{R}$ | $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ |  |
| arkusz kotangens | $\text{arcctg}x$ | $\mathbb{R}$ | $[0, \pi]$ |  |
| logaritmus ($e$ alapú) | $\log x$ | $(0, \infty)$ | $\mathbb{R}$ |  |

**Függvények tulajdonságai**

— $f$ monoton növő, ha minden $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$

— $f$ monoton csökkenő, ha minden $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.

— $f$ monoton, ha monoton növő, vagy monoton csökkenő.

— $f$ monoton növő a $H \subset D_f$ halmazon, ha minden $x_1, x_2 \in H$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$.

— $f$ monoton csökkenő, a $H \subset D_f$ halmazon, ha minden $x_1, x_2 \in H$, $x_1 \leq x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.

— $f$ monoton a $H \subset D_f$ halmazon, ha $f$ monoton növő, vagy monoton csökkenő a $H \subset D_f$ halmazon.

— $f$ felülről korlátos, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq K$.

— $f$ alulról korlátos, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \geq K$.

— $f$ függvénynek *lokális helyi maximuma* van, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $(a-\delta, a+\delta) \subset D_f$ és minden $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ esetén $f(x) \leq f(a)$ teljesül.

— $f$-nek *lokális helyi minimuma* van $a$-ban, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $(a-\delta, a+\delta) \subset D_f$ és minden $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ esetén $f(a) \leq f(x)$ teljesül.

— $f$-nek szélsőértéke van $a$-ban, ha ott lok. helyi maximuma vagy lok. helyi minimuma van.

— $f$ korlátos, ha alulról, vagy felülről korlátos.

— $f$ periódikus és periódusa $T \in (0, \infty)$, ha $x \in D_f$ esetén $x + T$, $x - T \in D_f$ és $f(x+T) = f(x)$.

— $f$ páros, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(x) = f(-x)$

— $f$ páratlan, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(x) = -f(-x)$

— $f$ konvex az $[a, b] \subset D_f$ intervallumon, ha minden $x \in [a, b]$-re $f(x)$ az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő egyenes alatt marad, azaz minden $x \in [a, b]$-re

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

— $f$ konkáv az $[a, b] \subset D_f$ intervallumon, ha minden $x \in [a, b]$-re $f(x)$ az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő egyenes felett marad, azaz minden $x \in [a, b]$-re

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

**Függvények határértéke**

A továbbiakban $D_f$ torlódási pontjainak a halmazát is használjuk, ezt $\overline{D}_f$ jelöljük. $a \in \overline{D}_f$, ha van olyan $x_n \in D_f$ sorozat, hogy $x_n \neq a$, ${}_n \to a$, ha $n \to \infty$. Például az $f(x) = \frac{1}{x}$. $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$-el adott függvény értelmezési tartományának a 0 torlódási pontja.

Például a $\frac{\sqrt[3]{x^4}-1}{x-1}$ függvény nincs értelmezve az $x = 1$ helyen, $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ az értelmezési tartománya. A függvény határértéke megmutatja, hogy hogyan viselkedik a függvény az ilyen pontok környezetében. A másik fontos információ a függvényről a nagyon nagy $x$-ek való viselkedésére. Ezt a végtelenbe vett határérték mutatja. A fenti függvényünket az $\sqrt{x^4}-1 = (\sqrt[3]{x^2})^2-1 = (\sqrt[3]{x^2}+1)\,(\sqrt[3]{x^2}-1) = (\sqrt[3]{x^2}+1)\,((\sqrt[3]{x})^2-1) = (\sqrt[3]{x^2}+1)(\sqrt[3]{x}+1)$ $(\sqrt[3]{x}-1) = \frac{(\sqrt[3]{x^2}+1)(\sqrt[3]{x}+1)(x-1)}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}$ azonosság felhasználásával

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^4}-1}{x-1} = \frac{(\sqrt[3]{x^2}+1)(\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}$$

alakban is felírhatjuk. Innen leolvasható hogy, ha $x$ közel van 1-hoz, akkor az értéke $\frac{4}{3}$-hoz lesz közel. Egészen pontosan ezt a sorozatok határétékére fogjuk visszavezetni, úgy, hogy veszünk olyan $x_n$ sorozatokat, amelyekre $x_n \neq 1$, $x_n \to 1$ és ezekre vizsgálják az $f(x_n)$ sorozatot. A sorozatokra tanultak alapján tényleg látszik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{4}{3}.$$

Itt fontos még, hogy az $x_n$ sorozat bármilyen lehet, csak az $x_n \to 1$ és $x_n \neq 1$ kell, hogy teljesüljön.

Nagy $x$-ekre pedig úgy kapjuk meg a függvény határértékét, hogy tetszőleges olyan sorozatot veszünk, amelyre $x_n \to \infty$ teljesül és vizsgáljuk az $f(x_n)$ határértékét. A jelen esetben

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^4}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \sqrt[3]{x}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right)}{1-\frac{1}{x}}$$

és így
$$f(x_n) = \sqrt[3]{x_n}\frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x_n}}\right)}{1 - \frac{1}{x_n}} \to \infty$$

mivel $\sqrt[3]{x_n} \to \infty$ és $\dfrac{1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x_n}}}{1 - \dfrac{1}{x_n}} \to 1.$

A függvényekre vonatkozó különféle határértékeket egy táblázatban foglaljük össze. A táblázat sémája a következő olvasási sémát követi.
Ha minden olyan sorozat esetén, amelyre $\boxed{\text{doboz 1. oszlop}}$ az $f(x_n)$ sorozat $\boxed{\text{doboz 2. oszlop}}$, akkor az $f(x)$ függvénynek létezik a $\boxed{\text{doboz 3. oszlop}}$. Ennek jelölése $\boxed{\text{doboz 3. oszlop}}$.

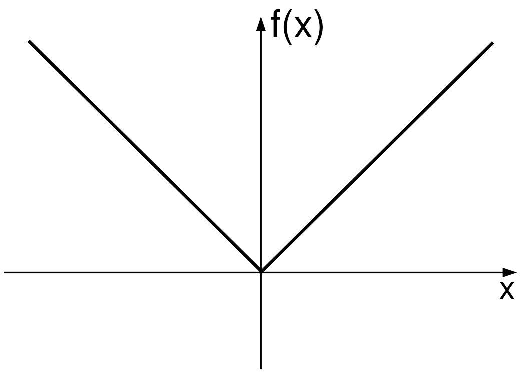
| *Ha* minden olyan $x_n$ sorozat esetén, amelyre | az $f(x_n)$ sorozat | *akkor* az $f(x)$ függvénynek létezik a | *Jelölés* |
|---|---|---|---|
| | | | |
| $x_n \to a \ \ (a \in \overline{D}_f)$<br>$x_n \in D_f, x_n \neq a$ | konvergál<br>$A$-hoz | határértéke $a$-ban | $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ |
| $x_n \to a \ \ (a \in \overline{D}_f)$<br>$x_n \in D_f, \ x_n > a$ | konvergál<br>$A$-hoz | jobboldali határértéke<br>$a$-ban | $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$ |
| $x_n \to a \ \ (a \in \overline{D}_f)$<br>$x_n \in D_f, \ x_n < a$ | konvergál<br>$A$-hoz | baloldali határértéke<br>$a$-ban | $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$ |
| $x_n \to a \ \ (a \in \overline{D}_f)$<br>$x_n \in D_f, \ \ x_n \neq a$ | divergál<br>végtelenbe | tágabb értelemben vett<br>határértéke | $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ |
| $x_n \to a \ \ (a \in \overline{D}_f)$<br>$x_n \in D_f, \ x_n > a$ | divergál<br>végtelenbe | tágabb értelemben vett<br>jobboldali határértéke | $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \infty$ |
| $x_n \to a \ \ (a \in \overline{D}_f)$<br>$x_n \in D_f \ x_n < a$ | divergál<br>végtelenbe | tágabb értelemben vett<br>baloldali határértéke | $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \infty$ |
| $x_n \to a \ \ (a \in \overline{D}_f)$<br>$x_n \neq a, \ x_n \in D_f$ | divergál minusz<br>végtelenbe | tágabb értelemben vett<br>határértéke | $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ |
| $x_n \to a \ \ (a \in \overline{D}_f)$<br>$x_n \in D_f, \ x_n > a$ | divergál minusz<br>végtelenbe | tágabb értelemben vett<br>jobboldali határértéke | $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = -\infty$ |
| $x_n \to a \ \ (a \in \overline{D}_f)$<br>$x_n \in D_f, \ x_n < a$ | divergál minusz<br>végtelenbe | tágabb értelemben vett<br>baloldali határértéke | $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = -\infty$ |
| $x_n \to \infty$<br>$x_n \in D_f$ | konvergál<br>$A$-hoz | határértéke<br>végtelenben | $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ |
| $x_n \to \infty$<br>$x_n \in D_f$ | divergál<br>végtelenbe | tágabb értelemben vett<br>határértéke | $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ |
| $x_n \to \infty$<br>$x_n \in D_f$ | divergál minusz<br>végtelenbe | tágabb értelemben vett<br>határértéke | $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ |
| $x_n \to -\infty$<br>$x_n \in D_f$ | konvergál<br>$A$-hoz | határértéke a<br>végtelenben mínusz | $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ |
| $x_n \to -\infty$<br>$x_n \in D_f$ | divergál a<br>végtelenbe | tágabb értelemben vett<br>határértéke | $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \infty$ |
| $x_n \to -\infty$<br>$x_n \in D_f$ | divergál minusz<br>végtelenbe | tágabb értelemben<br>határértéke | $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ |

### Nevezetes határértékek függvényekre

$$\lim_{x\to\infty} 1 = 1,\quad \lim_{x\to-\infty} 1 = 1,$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 1,\quad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = \infty,\quad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x} = \infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x} = 0.$$

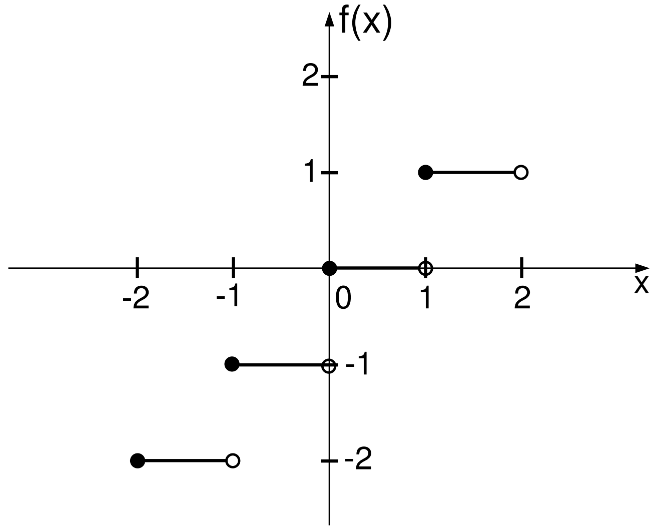
### Folytonos függvények

Az $f(x)$ függvényt folytonosnak nevezzük az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Az $f(x)$ függvényt folytonosnak nevezzük a $H \subset D_f$ halmazon, ha $H$ minden pontjában folytonos. Az $f(x)$ függvényt folytonosnak nevezzük, ha $D_f$ minden pontjában folytonos. A folytonos függvénynek grafikonját folytonos vonallal lehet megrajzolni az értelmezési tartomány bármely részintervallumán. Minden elemi függvény folytonos. A nem elemi függvények közül folytonos az $f(x) = |x|$ függvény, ennek grafikonja:

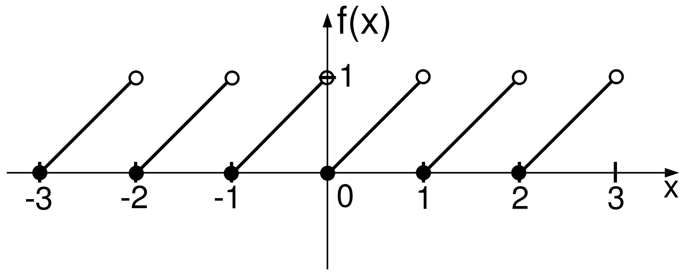



Nem folytonos viszont az $f(x) = [x]$ egészrész függvény. $[x]$ azt a lehető legnagyobb egész számot jelenti, amely az $x$-nél nem nagyobb. Például $[2,3] = 2$, $[5] = 5$, $[0,25] = 0$, $[-2,38] = -3$, $[-0,44] = -1$.

$[x]$ grafikonja:




Az $[x]$ függvény nem folytonos az $x = n \in \mathbb{N}$ helyeken, viszont minden $(n, n+1)$ $(n \in \mathbb{N})$ intervallumon folytonos. Hasonló tulajdonságokkal bír a törtrész függvény is, $f(x) = \{x\} = x - [x]$. Például: $\{2,3\} = 0,3$; $\{5\} = 0$, $\{0,25\} = 0$, $\{-2,38\} = 0,62$, $\{-0,44\} = 0,59$. Grafikonja:




Ez sem folytonos függvény, nem folytonos az $x \in \mathbb{N}$ helyeken, de folytonos bármely $(n, n+1)$ intervallumon.

## Függvények differenciálhányadosa

Mennyiségek időbeli változásának fontos jellemzője a változás sebessége. A sebesség szemléletes fogalom, mindenki megtudja mondani, hogy a személygépkocsi sebessége nagyobb, mint egy gyalogosé, vagy azt is tudjuk, hogy a kézen gyorsabban nőnek a körmök, mint a lábon. A mennyiségi törvények pontos megfogalmazásához azonban félreérthetetlen matematikai meghatározás kell, amit mindenki egyformán ért és használ.

Tekintsünk példaként egy élőlény tömegének növekedését az idő függvényében, $t \to m(t)$, $t \in [0, T]$. Ez a növekedés általában nem egyenletes, adott $t_0 \in (0, T)$ esetén a $t_0$-ra számított $\dfrac{m(t) - m(t_0)}{t - t_0}$ átlagsebesség függ $t$-től is. A növekedés pillanatnyi sebességének a fogalmához, ami csak $t_0$-ra jellemző adat, úgy jutunk, hogy képezzük a

$$\lim_{t \to t_0} \frac{m(t) - m(t_0)}{t - t_0}$$

határértéket. Ezt a mennyiséget nevezzük az $m(t)$ $t_0$-beli sebességének, vagy a matematikában használt fogalommal: $t_0$-beli differenciálhányadosnak. Ennek jelölése $m'(t_0)$ vagy $\dfrac{dm(t_0)}{dt}$. Ez persze nem minden $t_0 \in D_m$ esetén létezik.

Ha egy $f$ függvényre adott $x \in D_f$ esetén létezik az $f'(x) = \lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ határérték, akkor $f$-et $x$-ben differenciálhatónak mondjuk. Szoktuk még azt is mondani, hogy létezik a differenciálhányadosa $x$-ben, vagy hogy deriválható $x$-ben. Ha az $f$ függvény egy $H \subset D_f$ halmaz minden pontjában differenciálható, akkor differenciálhatónak nevezzük a $H$ halmazon. Az $x \to f'(x)$ függvényt differenciálhányados függvénynek szoktuk nevezni.

Például $f(x) = x^2$ differenciálhányados függvényét könnyen megkapjuk.

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{y^2 - x^2}{y - x} = \frac{(y - x)(y + x)}{y - x} = y + x.$$

Így, ha $x_n \to x$, $x_n \neq x$, akkor

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = x_n + x \to 2x$$

azaz $(x^2)' = 2x$. Még könnyebb az $f(x) = c \in \mathbb{R}$ és az $f(x) = x$ függvények differenciálhányadosa. $f(x) = c$ esetén

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{c - c}{y - x} = 0$$

és így $c' = 0$, ha $c \in \mathbb{R}$. Ha $f(x) = x$, akkor $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = \dfrac{y-x}{y-x} = 1$, tehát $x' = 1$. A $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ határértéket és $\cos x$ folytonosságát felhasználva a $\sin x$ függvény differenciálhányadosfüggvényét is megkaphatjuk, ugyanis

$$\frac{\sin y - \sin x}{y-x} = \frac{2\sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{y+x}{2}}{y-x} = \frac{\sin\frac{y-x}{2}}{\frac{y-x}{2}}\cos\frac{y+x}{2}$$

és így ha $x_n \to x$, $x_n \neq x$, akkor $a_n = \dfrac{x_n - x}{2} \to 0$ $\dfrac{x_n + x_0}{2} \to x_0$, tehát

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n - \sin x}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x_n+x_0}{2} = 1\cdot\cos x = \cos x,$$

azaz $(\sin x)' = \sin' x = \cos x$. A $e^x$ függvény differenciálhányados is következik a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ nevezetes határértékből. Ugyanis, ha $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor

$$\frac{e^y - e^x}{y-x} = e^x\,\frac{e^{y-x}-1}{y-x},$$

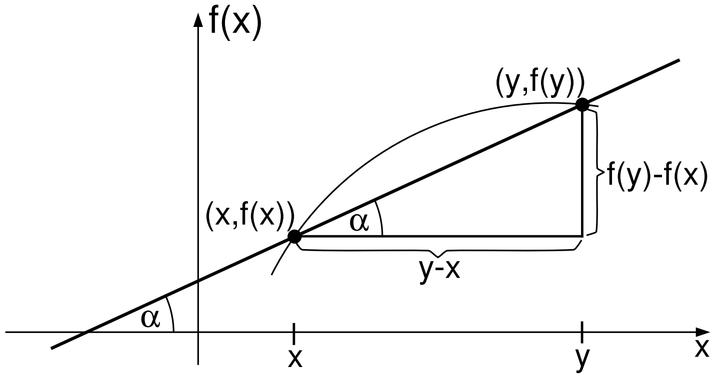
és ha $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, akkor $x_n - x_0 \to 0$

$$\frac{e^{x_n} - e^{x_0}}{x_n - x_0} = e^{x_0}\frac{e^{x_n - x_0} - 1}{x_n - x_0} \to e^{x_0},$$

azaz $(e^x)' = e^x$.

## A differenciálhányados szemléletes jelentése

Tekintsük az $f$ függvény grafikonjának az $x$ és $y$ ($x \neq y$) abcisszájú pontján, azaz az $(x, f(x))$ és $(y, f(y))$ pontokon áthaladó egyenest. Ezt az egyenest a grafikon $e$ pontokhoz tartozó szelőjének nevezzük. A szelő meredekségét az $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ hányados adja meg.



$$m = \text{tg}\alpha = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Ha rögzítjük az $x$ pontot, akkor ez a meredekség általában függ az $y$ megválasztásától, de ha $f$ differenciálható $x$-ben, akkor éppen $f'(x)$-hez tart, maga a szelő pedig egyre közelebb kerül a görbe $(x, f(x))$ pontjához tartozó érintőjéhez. Tehát a görbe $(x, f(x))$ pontjához tartozó érintő meredeksége éppen $f'(x)$.

## A differenciálhányados műveleti szabályai

A műveleti szabályokra is kiterjesztve a differenciálást, könnyen megkaphatjuk tetszőleges elemi függvény differenciálhányadosát. Ugyanis nem nehéz belátni, hogy

$$(cf)' = cf' \quad \text{azaz} \quad (cf(x))' = cf'(x),$$

$$(f+g)' = f' + g' \quad \text{azaz} \quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{azaz} \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad \text{ha} \quad g \neq 0, \quad \text{azaz} \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f \circ g)' = f \circ g g' \quad \text{azaz} \quad (f(g(x)) = f'(g(x))g'(x),$$

$$(\hat{f})' = \frac{1}{f' \circ \hat{f}} \quad \text{azaz} \quad (\hat{f}(x))' = \frac{1}{f'(\hat{f}(x))}.$$

Ezekből adódik a következő táblázat.

## Az elemi függvények deriváltjai

| | $f(x)$ | $D_f$ | $f'(x)$ | $D_{f'}$ |
|---|---|---|---|---|
| $c$ | $(c \in \mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ | $(n \in \mathbb{N})$ | $\mathbb{R}$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sqrt[n]{x}$ | $(n = 2m,\ m \in \mathbb{N})$ | $[0, \infty)$ | $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | $(0, \infty)$ |
| $\sqrt[n]{x}$ | $(n = 2m+1,\ m \in \mathbb{N})$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ |
| $x^{-n}$ | $(n \in \mathbb{N})$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $-\dfrac{n}{x^{n+1}}$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ |
| $x^\alpha$ | $(\alpha \in \mathbb{R})$ | $[0, \infty)$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $(0, \infty)$ |
| $\sin\ x$ | | $\mathbb{R}$ | $\cos\ x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos\ x$ | | $\mathbb{R}$ | $-\sin\ x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\operatorname{tg} x$ | | $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | | $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ | $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ |
| $\arcsin\ x$ | | $[-1, 1]$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1, 1)$ |
| $\arccos\ x$ | | $[-1, 1]$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1, 1)$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\operatorname{arcctg} x$ | | $\mathbb{R}$ | $-\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ |
| $e^x$ | | $\mathbb{R}$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $a^x$ | $(a > 0)$ | $\mathbb{R}$ | $a^x \log\ a$ | $\mathbb{R}$ |
| $\log\ x$ | | $(0, \infty)$ | $\dfrac{1}{x}$ | $(0, \infty)$ |
| $\log_a x$ | $(a > 0, \quad a \neq 1)$ | $(0, \infty)$ | $\dfrac{\log_a e}{x}$ | $(0, \infty)$ |
| $\mathrm{sh} x$ | | $\mathbb{R}$ | $\mathrm{ch} x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\mathrm{ch} x$ | | $\mathbb{R}$ | $\mathrm{sh} x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\mathrm{th} x$ | | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\mathrm{cth} x$ | | $\mathbb{R}$ | $-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$ | $\mathbb{R}$ |

**Többször differenciálható függvények**

Legyen az $f$ függvény valamely halmazon differenciálható és deriváltfüggvénye legyen $f'$. Ha az $f'$ függvény egy $A \subset D_f$ halmazon differenciálható, akkor $f'$ deriváltját a függvény második deriváltfüggvényének nevezzük. Jelölése $f''$ vagy $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

Példa. $f(x) = \log(2x+1)$, $f'(x) = \frac{2}{2x+1}$, $f''(x) = -\frac{4}{(2x+1)^2}$.

Ha $f''$ létezik egy $A \subset D_f$ halmazon és ott $f''(x)$ differenciálható, akkor ennek deriváltját az $f$ függvény harmadik deriváltjának nevezzük. Jelölése

$$f''' \quad \text{vagy} \quad \frac{d^3 f(x)}{dx^3}.$$

Hasonlóan értelmezzük $f$ $n$-edik deriváltját is, ez az $n-1$-edik derivált deriváltja. $n \geq 4$ esetén ennek jelölése

$$f^{(n)} \quad \text{vagy} \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Példa. $f(x) = \log(2x+1)$ esetén:

$f'''(x) = \frac{4 \cdot 2 \cdot 2}{(2x+1)^3}$

$f^{(4)}(x) = -\frac{16 \cdot 3 \cdot 2}{(2x+1)^4} = -\frac{96}{(2x+1)^4}$

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2^n (n-1)!}{(2x+1)^n}$

Példa.

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f'''(x) = -\sin x$

$f^{(4)}(x) = -\cos x$

$f^{(5)}(x) = \sin x$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha} \quad n \quad \text{osztható} \quad \text{4-el} \\ \cos x, & \text{ha} \quad n = 4k+1, k \quad \text{egész} \\ -\sin x, & \text{ha} \quad n = 4k+2, k \quad \text{egész} \\ -\cos x, & \text{ha} \quad n = 4k+3, k \quad \text{egész.} \end{cases}$$

Ha minden $n$-re ($n \in \mathbb{N}$) létezik az $f$ függvény $n$-edek deriváltja, akkor $f$-et akárhányszor (vagy végtelen sokszor) differenciálhatónak nevezzük.

**Folytonos és differenciálható függvények tulajdonságai**

— Ha $[a, b] \subset D_f$ és $f$ folytonos $[a, b]$-n, akkor van olyan $x_1, x_2 \in [a, b]$, hogy

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{minden} \quad x \in [a, b]$$

esetén azaz $f(x)$ felveszi legkisebb és legnagyobb értékét is. (Weierstrass féle tétel)

— Ha $f$ folytonos $[a, b] \subset D_f$ és $x_1, x_2 \in [a, b]$ két olyan érték, amelyre $f(x_1 < f(x_2)$, akkor bármely $c \in (f(x_1), f(x_2))$ számhoz van olyan $x_1$ és $x_2$ közötti $x_3$ érték, hogy $f(x_3) = c$ (Bolzano tétele).

— Ha $f(x)$ differenciálható $x_0 \in D_f$-ben, akkor $f(x)$ folytonos $x_0$-ban. (Folytonosság és differenciálhatóság kapcsolata)

— Ha $f(x)$ folytonos $[a, b] \subset D_f$-en, differenciálható $(a, b)$-n, és $f(a) = f(b) = 0$, akkor van $c \in (a, b)$, amelyre $f'(c) = 0$. (Rolle-féle középértéktétel).

— Ha $f(x)$ folytonos $[a, b] \subset D_f$-en, differenciálható $(a, b)$-n, akkor van olyan $c \in (a, b)$, amelyre

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Lagrange-féle középértéktétel).

— Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonosak $[a, b] \subset D_f \cap D_g$-ben, differenciálhatóak $(a, b)$-n, és $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a, b)$, akkor van olyan $c \in (a, b)$, hogy

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

(Cauchy-féle középértéktétel).

Ha $f$ differenciálható $(a, b)$ nyílt intervallumon és $c \in (a, b)$-ben szélsőértéke van $f(x)$-nek, akkor $f'(c) = 0$.

Legyen $f$ folytonos $[a, b]$-n és differenciálható $(a, b)$-n. $f$ akkor és csakis akkor monoton növő $[a, b]$-n, ha $f'(x) \geq 0$ minden $x \in (a, b)$ esetén.

Legyen $f$ folytonos $[a, b]$ és differenciálható $(a, b)$-n. $f$ akkor és csakis akkor monoton csökkenő $[a, b]$-n, ha $f'(x) \leq 0$ minden $x \in (a, b)$ esetén.

Legyen $f$ differenciálható $(a, b)$-n. Ha $c \in (a, b)$, $f'(c) = 0$, és van olyan $\delta > 0$, hogy $c - \delta < x < c$ esetén $f'(x) > 0$, $c < x < c - \delta$ esetén $f'(x) < 0$ (azaz $f'(c)$ előjelet vált $c$-ben), akkor $c$-ben $f$-nek lok. helyi maximuma van.

Legyen $f$ differenciálható $(a,b)$-n. Ha $c \in (a,b)$, $f'(c) = 0$ és van olyan $\delta > 0$, hogy $c - \delta < x < c$ esetén $f'(x) < 0$; $c < x < c + \delta$ esetén $f'(x) > 0$, akkor $f$- nek $c$-ben lok. helyi minimuma van.

Legyen $f$ kétszer differenciálható $(a,b)$-n, $f^{''}(x)$ folytonos. Ha $c \in (a,b)$ $f'(c) = 0$ és $f^{''}(c) > 0$, akkor $c$-ben $f$-nek lok. helyi minimuma van. Ha $f'(c) = 0$ és $f^{''}(c) < 0$, akkor $c$-ben $f$-nek lok. helyi maximuma van.

Ha $f$ kétszer differenciálható $(a,b)$-n és $f^{''}(x) > 0$, akkor $f(x)$ konvex $(a,b)$-n, ha $f^{''}(x) < 0$, akkor $f(x)$ konkáv $(a,b)$-n.

**(L'Hospital szabály)**. Legyen $f(a) = g(a) = 0$, de van olyan $\delta > 0$, hogy $g(x) \neq 0$ $a - \delta < x < a$, $a < x < a + \delta$ esetén. Legyen $f$ és $g$ differenciálható $(a - \delta, a + \delta)$-n és $g'(x) \neq 0$, $a - \delta < x < a$, $a < x < a + \delta$ esetén. Végül tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{létezik.}$$

Ekkor $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik, és

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Legyen $f$ és $g$ differenciálható az $a \in \mathbb{R}$ pont esetleges kivételével annak egy környezetében úgy, hogy $g$ és $g'$ is nullától különböző, továbbá

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \quad \text{vagy}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty.$$

Ekkor $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, feltéve, hogy ez az utóbbi határérték létezik, vagy tágabb értelemben létezik. Ha $f$ és $g$ differenciálhatók $(a, \infty)$-n,

$g(x) \neq 0, \quad g'(x) \neq 0 \quad (a, \infty)$-én és

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ vagy

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$. Ekkor

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

feltéve, hogy ez utóbbi létezik, vagy tágabb értelemben létezik.

### A függvényvizsgálat általános menete

1) $D_f$ meghatározása, zérushelyek megkeresése, ha lehet, paritítás megállapítása.
2) A függvény határérték tulajdonságai a $D_f$-et alkotó intervallumok végpontjaiban, ill. $\infty$, vagy $-\infty$-ben, ha $D_f$ nem korlátos.
3) Monoton növekedés, csökkenés megállapítása
4) Szélsőérték helyek megkeresése
5) Konvex, konkáv görbedarabok keresése
6) A függvény grafikonjának megrajzolása

### Példa

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

1) $D_f = \mathbb{R}$, zérushely nincs, a függvény páros.
2) $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$
3) $f'(x) = e^{-x^2}(-2x)$

   $f'(x) = 0 \iff$, ha $x = 0$.

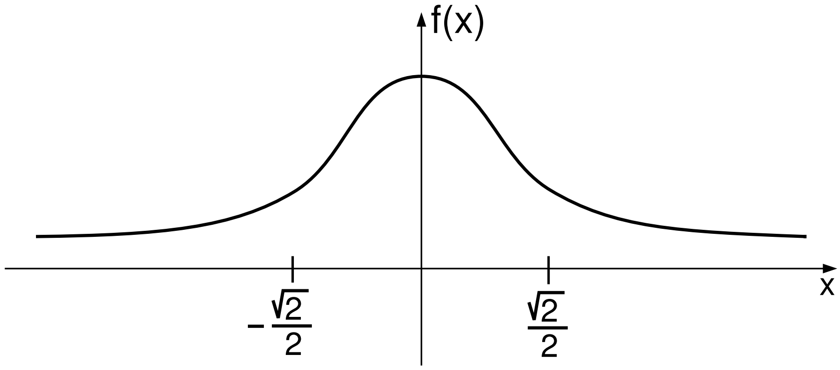
   Ha $x < 0$ $f'(x) > 0$,

   ha $x > 0$ $f'(x) < 0$.

   Tehát a függvény monoton nő $(-\infty, 0)$, monoton csökken $(0, \infty)$-n.

   Tehát 0-ban lok. helyi maximuma van.
4) $f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2) = 2e^{-x^2}(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$

| | $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$ | $x = 0$ | $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2} < x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $\nearrow +$ | $+$ | $\searrow +$ | $0$ | $\searrow -$ | - | $\nearrow -$ |
| $f(x)$ | $\smile$ $\nearrow$ $+$ | $+$ | $\frown$ $\nearrow$ $+$ | max | $\frown$ $\searrow$ $+$ | $+$ | $\smile$ $\searrow$ $+$ |




Az $e^{-x^2}$ függvény grafikonját haranggörbének szoktuk nevezni, ami fontos szerepet játszik a normális eloszlásban.

**Példa**

$$f(x) = x \log x$$

1) $D_f = (0, \infty)$, $f(x) = 0 \iff \log x = 0 \iff x = 1$

2)

$$\lim_{x \to 0} x \log x = \lim_{x \to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$$

(L'Hospitált alkalmazzuk.)

$\lim_{x \to \infty} x \log x = \infty$, mert $x \to \infty$ és $\log x \to \infty$.

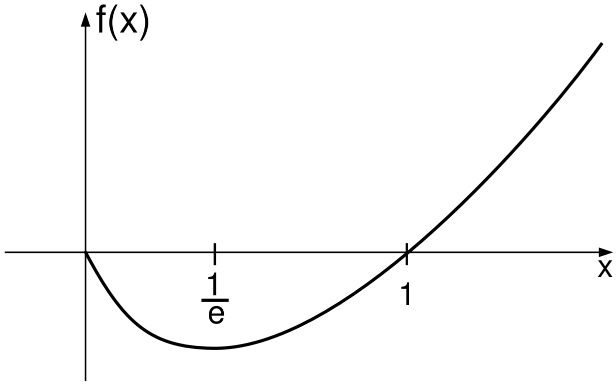
3) $f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + \log x = 1 + \log x$

$f'(x) = 0, \iff \log x = -1$, $x = \frac{1}{e}$

4) $f^{''}(x) = \frac{1}{x} > 0$ minden $x$-re

5) $0 < \frac{1}{e} < 1$

| | $\lim_{x\to 0}$ | $0 < x < \frac{1}{e}$ | $x = \frac{1}{e}$ | $\frac{1}{e} < x < 1$ | $x = 1$ | $1 < x$ | $\lim_{x\to\infty}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f^{''}(x)$ | $\infty$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ |
| $f'(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ $-$ | $0$ | $\nearrow$ $+$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ $+$ | $\infty$ |
| $f$ | $0$ | $\searrow\smile$ | $f(x) = -\frac{1}{e}$ min | $\searrow$ $\smile$ | $0$ | $\searrow\smile$ | $\infty$ |




## Függvénydiszkusszió

$$\frac{6x}{1+x^2}; \quad \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x; \quad e^{-x^2}; \quad (x+1)^2(x-1),$$

$$x - \sqrt{x}; \quad x^2 + \sin x; \quad 2(x - e^{-x}); \quad \frac{1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x} + 4x^2; \quad \frac{x}{1+x^2}; \quad \frac{x^3}{3-x^2}; \quad \frac{x}{x^2-1},$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}; \quad \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1}; \quad xe^{-x}, \quad xe^{-x^2}$$

$$xe^{\sqrt{x}}; \quad x - \log(x+1); \quad e^x - 2e^{2x}, \quad \sqrt{x} + \sqrt{5-x}$$

$$\log(x^2+6x+17);\quad \sin x^2;\quad \sqrt{x^2-2x+1}$$

$$x+\frac{1}{x},\quad 2x^3-15x^2+24x;\quad 2x^3-9x^2+24x+7$$

$$(x-1)^2(x+2);\quad (x-1)\sqrt{x};\quad 16x(x-1)^3;$$

$$\arcsin(1-\sqrt[3]{x^2});\quad \operatorname{arctg}\log x;\quad \sqrt{x^3-6x^2+3x}$$

$$\frac{e^x}{1+x};\quad (1+x^2)e^{-x};\quad x\log x,$$

$$\log(1+x^2);\quad (x-1)e^x;\quad \log x-\operatorname{arctg} x;$$

$$2\cos x-\cos 2x;\quad \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1};\quad \sin\frac{1}{x}$$

## Végtelen sorok

Legyen adott egy $a_0, a_1, a_{21}, \ldots$ sorozat és képezzünk ebből egy újabb sorozatot
$s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots$, $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k, \ldots$
Ezt a $s_n$ sorozatot az $a_n$ sorozatból képzett sornak nevezzük. A végtelen sor (vagy röviden csak sort) a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n$ vagy az $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ szimbólummal jelöljük, $a_n$ a végtelen sor általános tagja, $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ a sor $n$-edik részletösszege. A $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ sort konvergensnek mondjuk, ha az $s_n$ sorozat konvergens. Ilyenkor az $s_n$ sorozat határértékét is $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$-el jelöljük, $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$. Ha az $s_n$ sorozat divergens, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor is divergensnek nevezzük, vagy azt mondjuk, hogy nem létezik.

Tekintsük például a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ sort. Mivel $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}$

$$\frac{1}{3}s_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}},$$

így $s_n - \frac{1}{3}s_n = 1 - \frac{1}{3^{n+1}}$, amelyből

$$s_n = \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\Big(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\Big) \to \frac{3}{2},$$

ezért $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}$. Ez a példa általánosítható a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} aq^k$ sorra $(a, q \in \mathbb{R})$, amit geometriai sornak nevezünk.

A geometriai sor akkor és csakis akkor konvergens, ha $-1 < q < 1$, ilyenkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}.$$

Más esetekben a geometriai sor divergens. A $\sum_{k=0}^{\infty} k^2$ sor divergens, mert

$$s_n = 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2$$

felülről nem korlátos és így nem is konvergens.

Adott $a \in \mathbb{R}$ és egy $c_n$ sorozat mellett vizsgáljuk a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ sort. Minden olyan $x \in \mathbb{R}$-hez, amelyre ez a sor konvergens, hozzárendelhetjük a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ összeget, így egy függvényt kapunk. Ezt a függvényt is $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$-val jelöljük, értelmezési tartománya azon $x$-ek halmaza, amelyre a a sor konvergens. Ezt a függvényt hatványsornak szoktuk nevezni. Be lehet bizonyítani, hogy az alábbi esetek valamelyike mindíg igaz.

1) A hatványsor minden $x$-re konvergens.
2) Van olyan $R \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy $x \in (a-R, a+R)$ esetén a hatványsor konvergens, $|x-a| > R$ esetén divergens.
3) A hatványsor csak $x = a$ esetén konvergens.

Mindegyik esetben definiálhatunk egy konvergenciasugarat, ez a 2) esetben $R$, 1)-ben $\infty$, a 3)-ik esetben pedig 0.

Ha a $\rho$-val jelölt, $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ határérték létezik és $0 < \rho$, akkor $R = \frac{1}{\rho}$, ha $\rho = 0$, akkor $R = \infty$. Ha $\sqrt[n]{|c_n|}$ nem korlátos sorozat, akkor $R = 0$.

Belátható az is, hogy az 1) és 2) esetben egy hatványsor végtelen sokszor differenciálható az $(a-R, a+R)$ intervallumban, valamint használva az $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ jelölést,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k(x-a)^{k-1}$$

$$f'' = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)(x-a)^{k-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k d(k-1)\dots(k-n+1)(x-a)^{k-n}$$

$$\vdots$$

Vegyünk most egy tetszőleges, az $a$ pontban végtelen sokszor differenciálható $f$ függvényt és képezzük a

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

polinomot amelyet ay $f$ függvény $a$-hoz tartozó $n$-ed rendű Taylor polinomjának nevezünk. Az $a = 0$ esetben szokásos még az $n$-ed rendű MacLaurin polinom elnevezés is. A Taylor polinomok sorozatát, vagyis a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k$ hatványsort az $f$ függvény $a$-hoz tartozó Taylor sorának nevezzük. A 0-hoz tartozó Taylor sort is szoktuk MacLauris sornak nevezni. Mivel $e^x$ bármelyik differenciálhányados $e^x$ és $e^0 = 1$ ezért $e^x$ MacLaurin sora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots .$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$, ezért ez minden $x$-re konvergens, konvergencia sugara végtelen. Ha $f(x) = \log(1+x)$, akkor $x \in (-1, \infty)$ esetén $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

tehát $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ és így $\log(1+x)$ MacLauren sora

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} = 1$ ezért a konvergencia sugár 1. Hasonlóan egyszerűen kiszámítható a $\sin x$ és a $\cos x$ függvény MacLauren sora is.

Nyílvánvaló, hogy tetszőleges $f(x)$ függvény Taylor sora az $x=a$ pontban konvergens és megegyezik $f(a)$-val. Fontos kérdés az is, hogy a konvergencia intervallum mely $x$ pontjaiban lesz még a Taylor sor összege $f(x)$. Belátható, hogy ha az $f(x)$ függvény deriváltjai egy, az $a$ pontot tartalmazó $[c,d]$ intervallumon közös korlát alatt maradnak, azaz van olyan $K\in\mathbb{R}$, hogy

$$|f^{(n)}(x)| \le K, \quad x\in[c,d], \quad n\in\mathbb{N},$$

akkor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad x\in[c,d].$$

Speciálisan

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}, \quad x\in\mathbb{R}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x\in\mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x\in\mathbb{R}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x}{2}^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{2+1}\frac{x^k}{k} + = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}, \quad x\in(-1,1)$$

## Integrálás

Legyen adott az $f(x)$ függvény. Egy $F(x)$ függvényt a $f(x)$ *primitív függvény*ének nevezzük az $I$ intervallumon, ha $I \subset D_f$ és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$-re. Nyílvánvaló, hogy ha $F(x)$ primitív függvénye $f(x)$-nek $I$-n, akkor $F(x)+c$ is primitív függvénye $f(x)$-nek ugyanazon az $I$ intervallumon. Egy $f(x)$ függvény primitív függvényeinek a halmazát *határozatlan integrál*nak nevezzük. Ennek jelölése: $\int f(x)dx$. Könnyen beláthatjuk, hogy ha $F(x)$ primitív függvénye $f(x)$-nek $I$-n, akkor

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

(Megjegyzés. Az $\{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}$ halmazt a rövidség kedvéért sokszor $F(x) + c$-nek írjuk). Ugyanis azt kell belátnunk, hogy ha $F(x)$ és $G(x)$ is primitív függvénye $f(x)$-nek $I$-n, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $F(x) = G(x) + c$.

Tekintsük a $h(x) = F(x) - G(x)$ függvényt. Erre $h'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$ minden $x \in F$-re. Belátjuk, hogy $h(x)$ állandó $I$-n. Az ellenkező esetben ugyanis lenne olyan $x_1, x_2 \in I$, amelyre $h(x_1) \neq h(x_2)$, $x_1 < x_2$. $h(x)$ differenciálható $(x_1, x_2)$-n, folytonos $[x_1, x_2]$-n, hiszen a differenciálhatóságból következik a folytonosság. Így a középértéktétel alapján van olyan $x_3 \in (x_1, x_2)$, amelyre $h'(x_3) = \dfrac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$, ami ellentmond annak, hogy $h'(x) = 0$ minden $x \in I$-re. Ezzel beláttuk, hogy $h(x)$ állandó. Közvetlen ellenőrzéssel, vagy a 23. oldali táblázat felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad && \alpha \neq -1, \alpha \in \mathbb{R}, x \in [0, \infty)\\
&\textstyle\int \dfrac{1}{x} dx = \log|x| + c && x \neq 0\\
&\textstyle\int \sin x dx = -\cos x + c\\
&\textstyle\int \cos x dx = \sin x + c\\
&\textstyle\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + c\\
&\textstyle\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + c\\
&\textstyle\int e^x dx = e^x + c\\
&\textstyle\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\log a} + c && a > 0, a \neq 1,
\end{aligned}$$

## Integrálási szabályok

— Ha $f$-nek $g$-nek az $I$ intervallumon létezik a primitív függvénye, akkor $\alpha f + \beta g$-nek is bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén és

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

— Ha $f$-nek és $g$-nek $F$ és $G$ a primitív függvényük $I$-n, akkor

$$\int f(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)dx + c$$

(parciális integrálás)

— Ha $g$ differenciálható az $I$ intervallumon, $f$-nek $F$ a primitív függvénye a $\{g(x)|x \in I\}$ halmazon, akkor

$$\int f(g(x)g'(x)dx = F(g(x) + c$$

helyettesítéssel való integrálás, ami $g(x) = u$, $g'(x)dx = du$-vel

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

alakban is írható.

## Mintapéldák integrálásra

1) $\int \mathrm{tg}^2 x dx =?$

Mivel $\mathrm{tg}^2 x = 1 + \mathrm{tg}^2 x - 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$, ezért

$$\int \mathrm{tg}^2 x = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx = \mathrm{tg} x - x + c.$$

2) $\int x e^x dx =?$

Legyen $f'(x) = e^x$, $g(x) = x$ és alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát. Mivel $\int e^x dx = e^x + c$, ezért $f(x) = e^x$ alkalmas $f(x)$-nek,

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c.$$

3) $\int \log x dx = ?$

Ismét a parciális integrálást alkalmazva

$$f(x) = x, \quad g(x) = \log x$$

$$\int 1 \cdot \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + c.$$

4) $\int \mathrm{tg} x dx = ?$

Az

$$u = \cos x \quad du = -\sin x dx$$

helyettesítéssel

$$\int \mathrm{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -\frac{du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -\log u + c = -\log \cos x + 0.$$

5) $\int \mathrm{ctg} x dx = ?$

$$u = \sin x, \quad du = \cos x dx$$

$$\int \mathrm{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \log u + c = \log \sin x + c$$

6) $\int \dfrac{x}{\sqrt{3x+5}} dx = ?$

$$u = \sqrt{3x+5}, \quad du = \frac{1}{2\sqrt{3x+5}} \cdot 3dx = \frac{3}{2u} dx$$

$$x = \frac{u^2 - 5}{3}, \quad dx = \frac{2udu}{3}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+5}} dx = \int \frac{u^2-5}{3u} \frac{2udu}{3} = \frac{2}{9} \int (u^2 - 5) du = \frac{2}{9} \int u^2 - \frac{2}{9} \int 5du =$$

$$= \frac{2u^3}{27} - \frac{2}{9} 5u + c = \frac{2}{27} (\sqrt{3x+5})^3 - \frac{10}{9} \sqrt{3x+5} + c.$$

7) $\int \sin(3x+5) dx = ?$

$$n = 3x + 5 \quad du = 3dx, \quad dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \sin(3x+5) dx = \int \sin u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}(-\cos u) + c = -\frac{\cos(3x+5)}{3} + c$$

## Gyakorló feladatok – Határozatlan integrál

$\frac{1}{\sqrt{2-5x}}$; $\sin(2-3x)$, $\frac{x^2}{\sqrt{2-3x^3}}$,
$e^x \cos x$; $e^x \sin x$; $(x^2+2x+3)\cos x$,
$\sqrt{x-1}$, $x \sin\sqrt{x}$; $x(1-x)^{10}$;
$\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}$; $\mathrm{arctg}\sqrt{x}$, $x\mathrm{tg}^2 x$,
$(3x+5)^4$, $\cos(4x-2)$; $\sin\left(\frac{x}{4}+3\right)$;
$\frac{2x}{5x^2+2}$; $xe^x$; $x^2\log x$;
$\frac{1}{\sqrt{x}}$; $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$; $x^2e^{3x}$; $x\sin x$;
$\frac{1}{4x-8}$; $\frac{x}{2x+5}$; $\frac{2x-3}{3x^2-2}$; $\frac{x-2}{x^2-7x+12}$;
$\frac{1}{1-x^2}$; $x\sqrt[3]{2x+1}$; $x\sqrt{x-x^2}$;

## Szétválasztható típusú differenciálegyenletek

Legyen $g(t)$ egy folytonos függvény az $I=(a,b)$, $a<b$ nyílt intervallumon, $h(x)$ pedig folytonosan differenciálható függvény, $D_h=\mathbb{R}$ és $h(x)>0$ minden $x\in\mathbb{R}$ esetén. Keressük azt az $x: I\to\mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre

$$x'(t)=g(t)h(x(t)) \quad \text{minden} \quad t\in I \quad \text{esetén.}$$

Ez egy egyenlet az ismeretlen $x(t)$ függvényre, mégpedig olyan, amelyik $x(t)$ és $x'(t)$ között teremt összefüggést. Az ilyen egyenleteket differenciálegyenleteknek szokás nevezni. A fenti differenciálegyenletet azért nevezzük szétválaszthatónak, mert benne a $g(t)$ és a $h(x)$ függvények szorzata szerepel, ami lehetőúvé teszi azt, hogy az ismeretlen $x(t)$ függvényt tartalmazó tagok az egyik oldalra legyenek rendezhetők. Ugyanis, ha $x(t)$ megoldása a fenti differenciálegyenletnek $I$-n, akkor

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))}=g(t) \quad \text{minden} \quad x\in I-\text{re.}$$

Innen

$$\int\frac{x'(t)dt}{h(x(t))}=\int g(t)dt.$$

Ha $F'(x) = \dfrac{1}{h(x)}$, $x \in \mathbb{R}$ és $G'(t) = g(t)$ $t \in I$, akkor

$$F(x(t)) = G(t) + c$$

$h(x) > 0$ miatt $F'(x) > 0$ is teljesül, tehát $F(x)$ szigorúan monoton növő, így létezik az $\hat{F}(x)$ inverz függvénye. Tehát

$$x(t) = \hat{F}(G(t) + c) \quad t \in I.$$

Az $\hat{F}$ függvényt nem mindíg könnyű kifejezni elemi függvényekkel. Ha $\hat{F}$ nem elemi függvény, vagy túl bonyolult, akkor magából az $F(x(t)) = G(t) + c$ összefüggésből vizsgáljuk a keresett $x(t)$ függvény tulajdonságait.

<u>Példa.</u> A Victoria Regia kör alakú levele területének növekedési sebessége arányos a levél sugarával és a napsugárzásból időegység alatt felvett energiával. Ez utóbbi energia a levél területével és a napsugár beesési szögének cosinusával arányos. Tegyük fel, hogy a nap reggel 6-kor kel és este 6-kor nyugszik, továbbá a napsugarak beesési szöge a függőlegeshez viszonyítva $-\dfrac{\pi}{2}$ és $\dfrac{\pi}{2}$ között változik, délben ez a szög nulla. (A nap a zeniten delet) Ekkor éjféltől számítva az időt a beesési szög $t$ órakor $\dfrac{\pi}{12}t - \pi$. A levél $x(t)$ területe és $r(t)$ sugara közötti összefüggés $r^2(t)\pi = x(t)$. Tehát $x(t)$-re a következő egyenlet adódik:

$$x'(t) = k\frac{\sqrt{x(t)}}{\sqrt{\pi}}x(t)\cos\left(\frac{\pi}{12} \in \pi\right),$$

ahol $k$ egy arányossági tényező. Határozzuk meg az $x(t)$ függvényt, ha a mérések alapján tudjuk, hogy

$$x(6) = 100(cm^2), \quad x(18) = 400(cm^2).$$

Ez egy szétválasztható típusú differenciálegyenlet, ennek megoldási szabályát követve

$$\int \frac{x'(t)dt}{x^{\frac{3}{2}}(t)} = \int \frac{k}{\sqrt{\pi}}\cos\left(\frac{\pi}{12}t - \pi\right)dt$$

$$x(t) = u,\ x'(t)dt = du, \quad \frac{\pi}{12}t - \pi = v,\ dt = \frac{12}{\pi}dv$$

$$\int \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\int \cos v \cdot \frac{12}{\pi}dv$$

$$-2u^{-\frac{1}{2}} = \frac{12k}{\pi\sqrt{\pi}}(-\sin v) + c$$

$$-2\frac{1}{\sqrt{x(t)}} = -\frac{12k}{\pi\sqrt{\pi}}\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \pi\right) + c$$

$$\frac{1}{\sqrt{x(t)}} = \frac{6k}{\pi\sqrt{\pi}}\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \pi\right) + c_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{x(t)}} = \frac{6k}{\pi\sqrt{\pi}}\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \pi\right) + c_1$$

A $k$, $c_1$ állandókat az $x(6) = 100$, $x(18) = 400$ feltételekből határozhatjuk meg.

$$\frac{1}{10} = \frac{6k}{\pi\sqrt{\pi}}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + c_1 = -\frac{6k}{\pi\sqrt{\pi}} + c_1$$

$$\frac{1}{20} = \frac{6k}{\pi\sqrt{\pi}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_1 = \frac{6k}{\pi\sqrt{\pi}} + c_1$$

Innen $c_1 = +\dfrac{3}{40}$, $\dfrac{6k}{\pi\sqrt{\pi}} = -\frac{1}{5}$, tehát

$$x(t) = \frac{1}{\left(\frac{3}{40} - \frac{1}{5}\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \pi\right)\right)^2}.$$

## Lineáris differenciálegyenletek

Ha $p(x)$ és $q(x)$ adott folytonos függvények az $I = (a, b)$ intervallumon, akkor az $y(x)$ ismeretlen függvényre az

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

egyenletet lineáris differenciálegyenletnek nevezzük. Ha $q(x) \neq 0$, akkor inhomogén, ha $q(x) = 0$, akkor homogén lineáris differenciálegyenlet a neve. Az ismeretlen $y(x)$ függvényt a következő módon kereshetjük meg.

1) Keressük meg először az úgynevezett homogén

$$y_0'(x) + p(x)y_0(x) = 0$$

egyenlet $y_0$ megoldásait. Ez szétválasztható típusú egyenlet, így

$$y_0'(x) = -p(x)y_0(x),$$

$$\frac{y_0'(x)}{y_0(x)} = -p(x),$$

$$(\log y_0(x))' = -p(x),$$

$$\log y_0(x) = -\int p(x)dx + c,$$

2) Írjunk a fenti megoldásban a konstans helyére egy $f(x)$ függvényt és keressünk megoldását $y(x) = f(x)e^{-\int p(x)dx}$ alakban az eredeti inhomogén egyenletnek.

$$y'(x) = f'(x)e^{-\int p(x)dx} - f(x)px)e^{-\int p(x)dx},$$

amelyből

$$f'(x)e^{-\int p(x)dx} - f(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)f(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$f'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$f'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

$$f(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c,$$

tehát

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + ce^{-\int p(x)dx}.$$

3) Belátható, hogy az inhomogén egyenlet összes megoldását ez a képlet adja meg.

Példa. Kapilláris érben oldott anyag koncentrációjának változását vizsgáljuk. A koncentráció nyilván függ a megtett úttól és az intersticiális folyadéktér koncentrációjától, ami az idő függvénye, jelöljük ezt $c(t)$-vel. A kapilláris vér áramlási sebessége legyen $v =$ állandó. $y(x)$ jelentse a kapillárisban áramló vér koncentrációját $x$ út megtétele után. Ha a $t_0$ időpillanatban kezdük el vizsgálni a folyamatot $x = v(t - t_0)$, ahonnan $t = \frac{x}{v} + t_0$, $c(t) = c\Big(\frac{x}{v} + t_0\Big)$.

Tételezzük fel, hogy $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ adott. Mivel az oldott anyag átáramlása a kapillárisból az intersticiális folyadéktérbe, egyenesen arányos a két koncentráció különbségével, azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = k(c\Big(\frac{x}{v} + t_0\Big) - y(x)).$$

Keressük az $y(x)$ függvényt, ismerve, hogy $y(x_0) = y_0 =$ adott. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy $c\Big(\frac{x}{v} + t_0\Big) = ax + b$ ahol $a, b$ adott valós számok. $k$-t is tekintsük adottnak. Így az

$$y'(x) = -ky(x) + akx + bk$$

lineáris differenciálegyenletet kapjuk.
Vizsgálva először az $y'(x) = -ky(x)$ egyenletet, megoldására a következőt kapjuk

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -k$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = -kx + c$$

$$\log |y(x)| = -kx + c$$

$$|y(x)| = e^c e^{-kx}$$

$$y(x) = Ae^{-kx}, \quad \text{ahol} \quad A \in \mathbb{R}.$$

Egyenletünk megoldását $y(x) = A(x)e^{-kx}$ alakban keresve azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = A'(x)e^{-kx} - kA(x)e^{-kx} = kA(x)e^{-kx} + akx + bk,$$

amelyből

$$A'(x) = (akx + bk)e^{kx}$$

adódik. Innen parciálisan integrálva

$$A(x) = \int (akx + bk)e^{kx} dx = \frac{akx + bk}{k} e^{kx} - \int ak \frac{e^{kx}}{k} dx =$$

$$(ax + b)e^{kx} - \frac{ae^{kx}}{k} + c = (ax + b - \frac{a}{k})e^{kx} + c.$$

Tehát

$$y(x) = ax + b - \frac{a}{k} + ce^{-kx}.$$

Felhasználva, hogy $y(0) = y_0$

$$y_0 = b - \frac{a}{k} + c,$$

amelyből $c = \left(y_0 - b + \frac{a}{k}\right)$ és így

$$y(x) = ax + b - \frac{a}{k} + (y_0 - b + \frac{a}{k}e^{-kx}.$$

## Gyakorló feladatok

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3-2n+1}{n^3+1}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(5n-1)(5n+2)}{n^2}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+2n-1}}{n+5}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n-1)(n-2)(2n-3)}{-n^4+3n^2-2n+1}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-2n+1}{6n-1}$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+1}}{n^2-1}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+n+1}-\sqrt{2n^2-n+2}}{n}$

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{2n+1}}{\sqrt{3n-2}-\sqrt{5n+6}}$

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2}$

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+3^n-1}$

12) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n-2^n}$

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3\cdot 2^n-2}$

14) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5\cdot 3^n-4\cdot 2^n}$

15) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n$

16) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2+n}{n-3}\right)^n$

17) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3+n}{n-2}\right)^{2n}$

18) $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$

19) $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

20) $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

21) $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{\sin 2x \operatorname{tg} 3x}{x^2}$

22) $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin x}$

23) $(x\ \sin\ x)'$

24) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'$

25) $(x\ \log\ x)'$

26) $(\sin x + \sin 2x)'$

27) $(\sin^2 x)'$

28) $(\log \sin x)'$

29) $(\sin \log x)'$

30) $(x^2 e^{3x})'$

31) $\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right)'$

## Függvénydiszkusszió

$$\frac{6x}{1+x^2}; \quad \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x; \quad e^{-x^2}; \quad (x+1)^2(x-1),$$

$$x - \sqrt{x}; \quad x^2 + \sin x; \quad 2(x - e^{-x}); \quad \frac{1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x} + 4x^2; \quad \frac{x}{1+x^2}; \quad \frac{x^3}{3-x^2}; \quad \frac{x}{x^2-1},$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}; \quad \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1}; \quad xe^{-x}, \quad xe^{-x^2}$$

$$xe^{\sqrt{x}}; \quad x - \log(x+1); \quad e^x - 2e^{2x}, \quad \sqrt{x} + \sqrt{5-x}$$

$$\log(x^2+6x+17); \quad \sin x^2; \quad \sqrt{x^2-2x+1}$$

$$x + \frac{1}{x}, \quad 2x^3 - 15x^2 + 24x; \quad 2x^3 - 9x^2 + 24x + 7$$

$$(x-1)^2(x+2); \quad (x-1)\sqrt{x}; \quad 16x(x-1)^3;$$

$$\arcsin(1-\sqrt[3]{x^2}); \quad \operatorname{arctg}\log x; \quad \sqrt{x^3-6x^2+3x}$$

$$\frac{e^x}{1+x}; \quad (1+x^2)e^{-x}; \quad x\log x,$$

$$\log(1+x^2); \quad (x-1)e^x; \quad \log x - \operatorname{arctg} x;$$

$$2\cos x - \cos 2x; \quad \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}; \quad \sin\frac{1}{x}$$

## Megoldások

1) $3$
2) $25$
3) $\sqrt{3}$
4) $-2$
5) $\infty$
6) $0$
7) $1$
8) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
9) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2+2\sqrt{2}}$
10) $1$
11) $5$
12) $3$
13) $2$
14) $3$
15) $e^{-5}$

16) $e^5$

17) $e^{10}$

18) $2$

19) $\dfrac{2}{3}$

20) $\dfrac{1}{2}$

21) $6$

22) $2$

23) $\sin x + x\cos x$

24) $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

25) $1 + \log x$

26) $\cos x + 2\cos 2x$

27) $\sin 2x$

28) $\operatorname{ctg} x$

29) $\dfrac{\cos\log x}{x}$

30) $(2x + 3x^2)e^{3x}$

31) $\dfrac{x-2}{x^3}e^x$

## Gyakorló feladatok – differenciálegyenletek

1) $y' - y = 2x$

2) $y' + xy = x$

3) $(1 + x^2)y' + y = 0$

4) $y' = (1 - y)y$

5) $xyy' = 1 - x^2$

6) $xy' - y = 2x + 1$

7) $y' = 2x^3 + 2xy$

8) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

9) Tegyük fel, hogy egy populáció tömegének változási sebessége a pillanatnyi tömeggel és egy $a > 0$ felső határtól való eltéréssel egyaránt arányos. A tömeget az idő

függvényében megadó $x$ függvényre tehát valamilyen pozitív konstanssal:

$$\dot{x} = cx(a - x).$$

Határozzuk meg a $t = 0$ időponthoz tartozó $x_0 \in (0, a)$ kezdőtömeg esetén a populáció tömegét az idő függvényében!

## Megoldások

1) $ce^x - 2(x + 1)$

2) $ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$

3) $ce^{-\mathrm{arctg} x}$

4) $\dfrac{ce^x}{ce^x - 1}$

5) $\sqrt{2 \log x - x^2 + c}$

6) $cx + 2x \log -1$

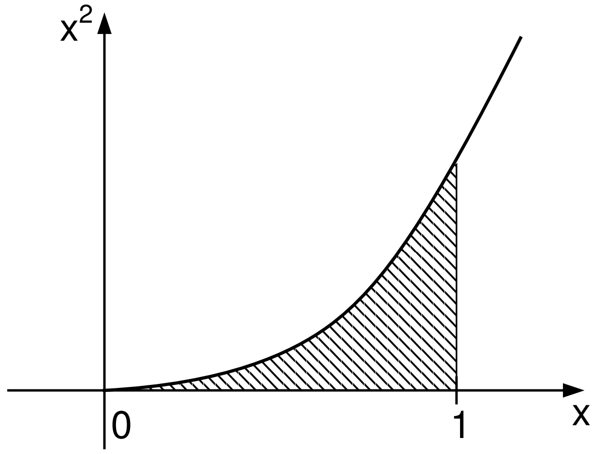
7) $ce^{x^2} - x^2 - 1$

8) $e^{-x^2} \left( \dfrac{x^2}{2} + c \right)$

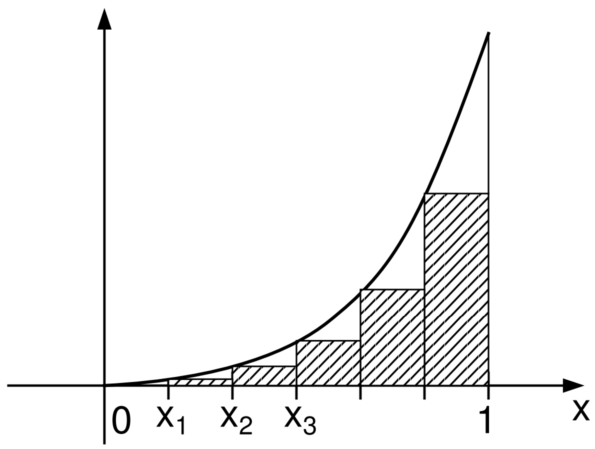
9) $\dfrac{ax_0 e^{act}}{x_0 e^{act} - x_0 + a}$

**A határozott integrál**

Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt a $[0, 1]$ intervallumon és határozzuk meg ezen görbe és az $x$ tengely közti területet.



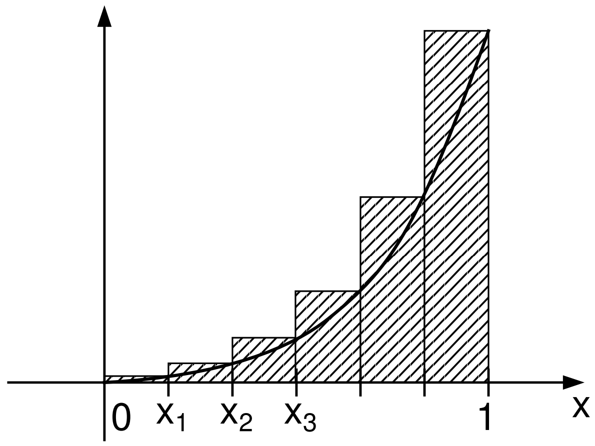

Közelítsük először ezt a területet úgy, hogy kitöltjük egymást át nem fedő téglalapokkal minél pontosabban. Osszuk $[0, 1]$-et $n$ egyenlő részre és vegyük a következő kitöltést:




Legyen $x_0 = 0$, $x_k = \dfrac{k}{n}$ $(u = 1, 2, \ldots)$. A kitöltő téglalapok összterülete

$$t_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} x_k^2 = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^n}{n^3} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}.$$

Vehetünk úgy is téglalapokat, hogy teljesen fedjék le a kívánt területet.




Ezek összterülete

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k^2 = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

A kívánt terület $t_n$ és $T_n$ közé esik $t_n \leq T \leq T_n$ és mivel $t_n \to \frac{1}{3}$, $T_n \to \frac{1}{3}$ amint $n \to \infty$, $T = \frac{1}{3}$ adódik.

Tekintsünk most egy tetszőleges folytonos függvényt az $[a, b]$ $(a < b)$ intervallumon. Járjunk el ugyanúgy, mint az előbb. Legyen

$$x_{k,n} = \frac{b-a}{n} k + a \quad k = 0, 1, 2, \ldots n$$

$$m_{k,n} = \min\{f(x) : \ x_{k,n} \leq x \leq x_{k+1,n}\}$$

$$M_{k,n} = \max\{f(x) : x_{k,n} \leq x \leq x_{k+1,n}\} \quad k = 0, \ldots, n-1$$

és

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} m_{k,n}, \quad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} M_{k,n}.$$

Nyílvánvaló, hogy $t_n \leq T_n$. De azt is be lehet látni, hogy a $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} T_n$ határértékek léteznek és megegyeznek. A függvény görbe és az $x$ tengely között elhelyezkedő területet ez a közös határérték definiálja. Ennek szokásos neve a függvény határozott integrálja $a$ és $b$ között, jelölése

$$\int_a^b f(x)dx = (\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} T_n).$$

Ha az $f$ függvény nem folytonos $[a,b]$-n, de korlátos, akkor is képezhetők a fenti $t_n$ és $T_n$ összegek. Az $f$ függvényt $[a,b]$-n integrálhatónak mondjuk, ha $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} T_n$. Az integrál jelölésére az $\int_a^b f(x)dx$ szimbólumot használjuk, ami most is a közös határérték,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} T_n.$$

A fentiekben láttuk, hogy folytonos függvény mindig integrálható. Igaz a következő is: Ha $f$ monoton és korlátos $[a,b]$-n, akkor integrálható.

## Határozott integrál tulajdonságai

$a < b$ esetén $\int_a^b f(x)dx$-et az előbbi szakaszban definiáltuk integrálható $f(x)$ esetén. Definiáljuk most $\int_b^a f(x)dx$-et is $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$-vel, valamint a

$$\int_a^a f(x)dx = \int_b^b f(x)dx = 0$$

integrálokat.

1) Ha $f$ integrálható $I \subset \mathbb{R}$-en, és $a, b \in I$, akkor $\int_a^b f(x)dx$ is létezik.

2) Ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f$ és $g$ integrálhatóak $I$-n, $a, b \in I$, akkor

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

3) Ha $f(x)$ integrálható $I$-n, $a, b, c \in I$, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4) Ha $f(x)$ és $g(x)$ integrálható $I$-n, $a, b \in I$, $a < b$ és $f(x) \leq g(x)$ $x \in [a,b]$ esetén, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

5) Legyen $m \leq f(x) \leq M$ $[a,b]$-n, ahol $a < b$. Ekkor

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

ami a definíció alapján nyílvánvaló.

6) Legyen $f(x)$ folytonos $[a,b]$-n, ahol $a < b$. Ekkor van olyan $c \in (a,b)$, amelyre

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

(Integrál középérték tétele).

7) Ha $f(x)$ integrálható $[a,b]$-n, $a < b$, akkor $|f(t)|$ is integrálható és

$$\int_a^b |f(t)|dt \geq \left|\int_a^b f(t)dt\right|$$

## Az integrálfüggvény és tulajdonságai

Legyen $a < b$ és $a \leq x \leq b$. $f(x)$ integrálható $[a,b]$-n. !kkor értelmezhetjük az $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ függvényt $[a,b]$-n. Ezt nevezzük $f(x)$ integrálfüggvénynek. Erre a következő állítások az érvényesek.

- Ha $f(x)$ integrálható $[a,b]$, akkor integrálfüggvénye folytonos $[a,b]$-n.
- Ha $f(t)$ folytonos $[a,b]$-n, akkor $\int_a^x f(x)dt$ differenciálható $(a,b)$-n és $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$.

**Tétel.** Ha $f(x)$ folytonos $[a,b]$-n, $F(x)$ primitív függvénye $f(x)$-nek $(a,b)$-n és $F(x)$ folytonos $[a,b]$-n, akkor

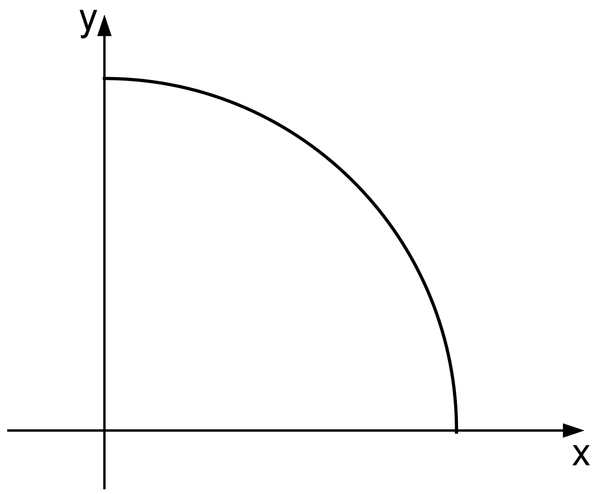
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(Newton-Leibnitz formula)

Példa. Mekkora területet zár be egy színusz hullám és az $x$ tengely, azaz $\int_0^\pi \sin x dx =?$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$, azaz $\sin x$-nek $-\cos x$ primitív függvénye, tehát

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

Példa. Hogyan számolható ki az $r$ sugarú körlap területe? Tekintsük a negyed kört, azaz az $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ függvényt az $0 \leq x \leq r$ szakaszon.




Ezen görbe és az $x$ tengely között a negyed kör terül el, tehát a körlap területe $4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx$

$$\int \sqrt{r^2-x^2}dx = ?$$

$$x = r\sin\varphi$$

$$dx = r\cos\varphi d\varphi$$

$$\int \sqrt{r^2-x^2}dx = \int \sqrt{r^2 - r^2\sin^2\varphi}\cos\varphi d\varphi =$$

$$= r^2\int \cos^2\varphi d\varphi = r^2\int \frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = r^2\int \frac{1}{2}d\varphi + r^2\int \frac{\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= r^2\frac{\varphi}{2} + r^2\frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{r^2}{2}\text{arc}\sin\frac{x}{r} = r^2\frac{\sin 2\Big(\text{arc}\sin\frac{x}{r}\Big)}{4}$$

tehát

$$4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2} = 4\cdot\frac{r^2}{2}(\text{arc}\sin 1 - \text{arc}\sin 0) +$$

$$+\frac{r^2}{4}(\sin(2\text{arc}\sin 1) - \sin(2\text{arc}\sin 0)) = 4\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = r^2\pi.$$

## Improprius integrál

Legyen $f(x)$ integrálható a $[a, A]$ intervallumon, bármilyen $a$-nál nagyobb $A$ esetén. Ha $\lim\limits_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$ létezik, akkor definiálhatjuk az

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$$

*improprius integrált.* Ha a fenti határérték nem létezik, akkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ improprius integrál nem létezik. Legyen $[a, b]$ adott, $a < b$, $f$ integrálható $[a + \varepsilon, b]$-n minden $0 < \varepsilon \leq b - a$ esetén. Ha $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ létezik, akkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_a^b f(x)dx$ improprius integrál létezik és

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Ha ez a határérték nem létezik, akkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_a^b f(x)dx$ improprius integrál nem létezik.

Hasonlóan definiálható a $\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx$, vagy az $\int_a^b f(x)dx$ típusú improprius integrál is, ha $f(x) b$ környezetében nem integrálható.

Példa. $\int\limits_I^\infty \dfrac{dx}{x^2} =?$

$$\int_I^A \frac{dx}{x^2} = \int_I^A x^{-2}dx = -\frac{1}{A} + 1 \to 1$$

tehát $\int\limits_I^\infty \dfrac{dx}{x^2} = 1.$

Példa.

$$\int_0^I \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

## Gyakorló feladatok

1) $\int\limits_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$

2) $\int\limits_0^1 (2x^2+x^3-2)dx$

3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg} x dx$

5) $\int\limits_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$

6) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\log^2 x}}$

7) $\int\limits_{\log 2}^{2\log 2} \frac{dx}{e^x-1}$

8) $\int\limits_0^1 e^{x+e^x} dx$

9) $\int\limits_1^e x\log x dx$

10) $\int\limits_0^1 \sqrt{x+1}dx$

11) $\int\limits_0^1 x\log x dx$

12) $\int\limits_0^{\pi} x\sin\sqrt{x}dx$

13) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$

14) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

15) $\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-3x} dx$

16) $\int\limits_0^1 \mathrm{arctg}\sqrt{x}dx$

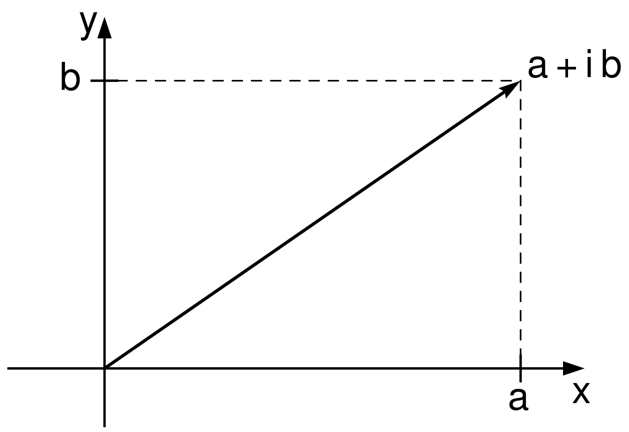
17) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

18) $\int\limits_0^1 x\log x dx$

19) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \log x}$

## Komplex számok

Az $a + ib$ kifejezést hívjuk komplex számnak, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $i$ az u.n. komplex egység. Az $a + ib$ kifejezés a komplex szám algebrai alakjának is nevezzük, $a$ a valós rész, $b$ pedig a képzetes rész. Az $a + ib$ komplex számot az $(x, y)$ derékszögű koordinátarendszer $(a, b)$ pontjával azonosíthatjuk, hasonlóan mint a valós számokat, mint a számegyenes egy pontja. Azonosítható az origóból az $(a, b)$ pontba mutató vektorral is. $a + ib = 0$ akkor és csakis akkor, ha $a = b = c$




## Műveletek komplex számokkal

Legyenek $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ komplex számok.

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

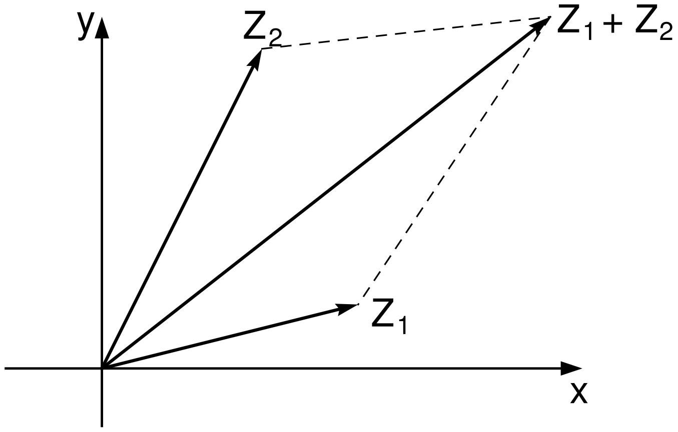
$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} - i\frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2}, \quad \text{ha} \quad z_1 \neq 0.$$

Speciálisan a $b_1 = b_2 = 0$ esetben a valós számokon végzett műveleteket nyerjük. A szorzás ismételt elvégzésével nyerhetjük a komplex számok természetes számokkal képzett hatványait, $z^0 = 1$, $z^1 - z$, $z^2 = z \cdot z$, $z^{n+1} = z^n \cdot z$. Speciálisan $i^1 = i$, $i^{-2} = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$.

Az így bevezetett műveletek ugyanazokkal tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a valós számokon végzett műveletek. Szemléletesen az összeadás a paralelogramma szabály szerint történik.




A szorzás szemléletes jelentése az u.n. geometriai alakkal mutatható meg, ezért előtte ezt mondjuk meg, hogy mit jelent.

A $z = a + ib$ komplex szám abszolut értékén értjük a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ kifejezést, ennek szemléletes jelentése a komplex számot ábrázoló vektor hossza. A $z$ argumentumán értjük az $x$ tengely és a $z$-t ábrázoló vektor szögét a $(-\pi, \pi]$ intervallumból. Egész pontosan

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\frac{b}{a}, & \text{ha} \quad a > 0,\ b > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad a = 0,\ b > 0 \\ \pi - \mathrm{arctg}\frac{b}{-a}, & \text{ha} \quad a < 0,\ b > 0 \\ \pi, & \text{ha} \quad a < 0,\ b = 0 \\ -\pi + \mathrm{arctg}\frac{b}{a}, & \text{ha} \quad a < 0;\ b < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad a = 0;\ b < 0 \\ \mathrm{arctg}\frac{b}{a}, & \text{ha} \quad a > 0,\ b < 0 \\ 0, & \text{ha} \quad a > 0,\ b = 0 \end{cases}$$

A $z = a + ib$ komplex szám esetén vezessük be az $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ jelöléseket. Ekkor a $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ és így

$$z = r\cos\varphi + i\ r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ezt az utóbbi alakot nevezzük a komplex szám geometriai alakjának. Szoktuk használni a $\overline{z} = a - ib$ jelölést is, $\overline{z}$-t a $t$ komplex szám konjugáltjának hívjunk. Ez $z$-nek az $x$ tengelyre való tükörképét jelenti. Nyílvánvaló, hogy $|z|^2 = z\overline{z}$. Innen $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ is adódik, amit az osztás algebrai alakon történő elvégzését segíti.

Legyenek adva a $z_1, z_2$ komplex számok, abszolut értéküket és argumentumukat jelölje $r_1, r_2$ és $\varphi_1, \varphi_2$. Ekkor

$$z, z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi) =$$

$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Innen leolvasható a szorzás szemléletes jelentése. A szorzat hossza a szorzandók hosszának a szorzata, irányát pedig úgy kapjuk, hog az egyik vektort a másik argumentumával az óramutató járásával ellentétes irányban elforgatjuk. Nyílvánvaló, hogy minden $n$ természetes számra $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ is teljesül, ami megkönnyíti a nagy számokkal való hatványozást.

Foglalkozzunk most $\sqrt[n]{z}$ értelmezésével természetes $n$ számokra. Ezt úgy lehet értelmezni, mint azon $w$ komplex számok halmaza, amelyre

$$w^n = z.$$

Legyen $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$.

Ekkor $w^n = \rho^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi))$. A $w^n = z$ egyenletből

$$\rho^n \cos(n\psi) = r\cos\varphi$$

$$\rho^n \sin(n\psi) = r\sin\varphi.$$

Innen $\rho^n = r$, azaz $\rho = \sqrt[n]{r}$ és

$$\sin(n\psi) = \sin\varphi$$

$$\cos(n\psi) = \sin\varphi$$

adódik. Tehát $n\psi = \varphi + 2k\pi$ valamilyen $k$-ra innen

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Tehát
$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\Big(\cos\Big(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\Big)+i\sin\Big(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\Big)\Big).$$
cos és sin $2\pi$ periódikussága miatt a fentiek
$$k=0,1,2,\dots,n-1$$
értékekre adnak különböző értékeket.

## Gyakorló feladatok

1) Számítsa ki az alábbi kifejezéseket

| | | |
|---|---|---|
| 1) $(1+2i)^2$, | 2) $(2-i)^2+(2+i)^3$ | 3) $\frac{1+2i}{1-2i}$ |
| 3) $\frac{1+i}{i}$, | 5) $\big(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\big)^2$ | 6) $\big(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\big)^{100}$, |
| 7) $\sqrt{2i}$, | 8) $\sqrt{-8i}$, | 9) $\sqrt{3-4i}$ |
| 10) $\sqrt{-15+8i}$, | 11) $\sqrt{-3-4i}$, | 12) $\sqrt[4]{-1}$ |
| 13) $\sqrt{-8-6i}$, | 14) $\sqrt{8+6i}$, | 15) $i^{100}$ |
| 16) $(1+i)^{2001}$, | 17) $(1+i)^{23}$, | 18) $(1+i\sqrt{3})^9$ |
| 19) $(\sqrt{3}-i)^9$, | 20) $(2i)^{18}$, | 21) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$ |
| 22) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$, | 23) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$ | 24) $(1+i)(3+2i)(1-2i)$ |
| 25) $(8+6i)^2(1-i)$, | 26) $(\sqrt[4]{-1})^3$, | 27) $\frac{1-2i}{(1+i)^2}$ |
| 28) $i(1-i)\sqrt{1-i}$, | 29) $\sqrt{\frac{1-i}{1+i}}$, | 30) $\frac{1-i}{i}+\frac{i}{1+i}$ |

## Absztrakt lineáris tér

Definíció. Egy $L\neq\emptyset$ halmazt lineáris térnek (vagy vektortérnek) nevezzük, ha létezik benne összeadásnak nevezett művelet, amely bárbely $a,b\in L$-hez $a+b\in L$-et rendeli, bármely $\lambda\in\mathbb{R}$ és $a\in L$-et össze lehet szorozni $L$-ben, azaz $\lambda a\in L$ és létezik olyan $0\in L$ hogy az alábbi tulajdonságok érvényesek

1) $a+b=b+a\quad\forall a,b\in L$

2) $a+(b+c)=(a+b)+c\quad\forall a,b,c\in L$

3) $a+0=a\quad\forall a\in L$

4) $\forall a\in L$-re $\exists-a\in L$ úgy hogy $a+(-a)=0$

5) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \forall \alpha, \beta \in R,\ x \in L$

6) $1 \cdot x = x \quad \forall x \in L$

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in L$

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in L$

9) $0a = 0 \quad \forall a \in L$

10) $(-1)a = -a \quad \forall a \in L$

Megjegyezzük, hogy a 9) és 10) tulajdonság az 1-8. tulajdonságokból levezethető. Látszik továbbá, hogy akárhány véges sok elem összeadása bármely sorrendben elvégezhető, ezért a zárójeleket nem fontos kirakni.

Definíció. Az $x_1, \ldots, x_k \in L$ elemek egy lineáris kombinációján az $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k \in L$ elemet értjük, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ valós számok.

Definíció. Az $x_1, \ldots, x_k \in L$ elemeket lineárisan függőnek nevezzük, ha vannak olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ számok, hogy $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2 > 0$ és $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = 0$.

Definíció. Az $x_1, \ldots, x_k \in L$ elemek lineárisan függetlenek, ha nem lineárisan függőek. Ez azt jelenti, hogy bármely olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2 > 0$, az is igaz, hogy $\alpha_1 x_1 + \ldots + x_k x_k \neq 0$. Még másképp megfogalmazva: ha $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = 0$ valamilyen $\alpha_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ esetén, akkor $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Definíció. Azt mondjuk, hogy $L$ $n$-dimenziós ($n \in \mathbb{N}$), ha $L$-ben létezik $n$ darab lineárisan független elem és bármelyik $n+1$ darab már lineárisan függő. $L$ végtelen dimenziós, ha bármely $n \in \mathbb{N}$-re létezik $L$-ben $n$ darab lineárisan független elem.

Definíció. A $L$ lineáris teret belső szorzat térnek nevezzük, ha $\forall a, b \in L$-hez hozzárendelhető egy $(a, b) \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy

1) $(a, b) = (b, a) \qquad \forall a, b \in L$

2) $(a + b, c) = (a, c) + (b, c) \quad \forall a, b, c \in L$

3) $(\lambda a, b) = \lambda(a, b) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a, b \in L$

4) $\forall a \in L$ esetén $(a, a) \geq 0$ és $(a, a) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $a = 0$.

A $(a, b)$ valós számot az $a$ és $b$ elemek skaláris szorzatának nevezzük.

Ha $L$ belső szorzat tér, akkor tetszőleges $a \in L$-hez hozzárendelhető a $\|a\| = \sqrt{(a,a)}$ valós szám, amelyre

1) $\forall a \quad \|a\| \geq 0$ és $\|a\| = 0$ akkor és csakis akkor, ha $a = 0$

2) $\|\lambda a\| = |\lambda|\|a\| \quad \forall a \in L, \ \lambda \in \mathbb{R}$

3) $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad \forall a, b \in L$

4) $|(a,b)| \leq \|a\|\|b\|$

teljesül. $\|a\|$-t az $a$ elem normájának nevezzük.

## Lineáris terek bázisa

Legyen $L$ $n$-dimenizós lineáris tér, $n \in \mathbb{N}$.

Definíció. Azt mondjuk, hogy $e_1, \ldots, e_n$ bázis $L$-ben, ha $e_1, \ldots, e_n$ lineárisan függetlenek.

Ha $e_1, \ldots, e_n$ bázis az $n$ dimenziós $L$ lineáris térben, akkor bármely $x \in L$ esetén vannak olyan $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ valós számok, amelyre

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Ugyanis $L$ $n$-dimenziós, ezért $x, e_1, \ldots, e_n$ lineárisan függőek, tehát vannak olyan $a_0, \ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ számok, amelyre $a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2 > 0$ és

$$a_0 x + a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n = 0.$$

$a_0 = 0$ nem lehet, mert ekkor

$a_1^2 + \ldots + a_n^2 > 0$ és

$a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n = 0$

teljesülne, ami ellentmond annak, hogy $e_1, \ldots, e_n$ lineárisan függetlenek. Ekkor viszont

$$x = -\frac{a_1}{a_0} e_1 - \frac{a_2}{a_0} e_2 - \ldots - \frac{a_n}{a_0} e_n,$$

amit bizonyítani akartunk.

Ez a tulajdonság fordítva is igaz. Ha $L$ lineáris tér, $e_1, \ldots, e_n \in L$ lineárisan függetlenek és minden $x \in L$-hez léteznek olyan $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ valós számok, amelyre

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

akkor $L$ $n$-dimenziós és $e_1, \ldots, e_n$ bázisát alkotja.

**Mátrix számítás**

Legyenek adottak az $m$ és $n$ természetes számok és tekintsük a valós számok egy $m$ sorból és $n$ oszlopból álló táblázatát.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m-1\ 1} & a_{m-1\ 2} & \dots & a_{m-1\ n-1}, & a_{m-1\ n} \\ a_{m\ 1} & a_{m\ 2} & \dots & a_{m\ n-1}, & a_{m\ n} \end{pmatrix}$$

Egy ilyen táblázatot $m \times n$ tipusú mátrixnak hívunk a továbbiakban. A táblázatban elhelyezett számokat a mátrix elemeinek hívjuk. Az $a_{ij}$ szám jelöli az $i$-edik sor $j$-edik elemét. A továbbiakban is egy mátrix elemeit a latin ABC indexel ellátott kisbetűivel jelöljük, magát az egész mátrixot a megfelelő nagybetűvel jelöljük. Az $A$ mátrix jelölésére gyakran használjuk az $(a_{ij})_{m,n}$ jelölést is. $i$-edik során az $(a_{i1}a_{i2_k} \dots a_{in-1}a_{in})$ mátrixot az $i$-edik oszlopán pedig az
$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{m-1}j \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ mátrixokat értjük.

Például a

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix 2 sorból és 3 osztlopból áll, az első sor 2-ik eleme: 3, a 2-ik sora

$$(-1 \ \ 6 \ \ 0)$$

az első oszlopa pedig $\binom{2}{-1}$.

Két mátrixot akkor tekintünk egyenlőnek, ha mindkettőnek ugyanannyi sora és ugyanannyi oszlopa van, és a megfelelő helyen álló elemek megegyeznek. Az $m$ sorból és $n$ oszlopból álló mátrixokat $m \times n$ típusúnak nevezzük, ezek halmazát $\mathbb{R}^{m \times n}$-el jelöljük. Az $n \times n$ típusú mátrixokat négyzetes mátrixoknak, az $n \times 1$ típusúakat oszlopvektoroknak, az $1 \times n$ típusúakat sorvektoroknak is szoktuk nevezni. Használjuk az $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{1 \times n}$, $\theta^n = \mathbb{R}^n \times 1$ jelöléseket is.

Ha $A$ és $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ akkor értelmezhetjük az $A + B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ összeget úgy, hogy $A$ és $B$ megfelelő elemeit összeadjuk. Ha $A = (a_{ij})_{m,n}$ $B = (b_{ij})_{m,n}$, ekkor $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$.

Bármely $A = (a_{ij})_{m,n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixot megszorzhatunk egy $\lambda$ valós számmal a $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m,n}$ definíció szerint.

Azt az $m \times n$ típusú mátrixot, amelynek minden eleme zérus nullmátrixnak nevezzük, ennek jelölése $0_{m,n}$ vagy 0.

**Tétel**. $R^{m\times n}$ $m + n$ dimenziós lineáris tér a fenti műveletekkel.

*Bizonyítás.* A lineáris térre megkövetelt 1-10 tulajdonságok teljesülnek a bevezetett műveletekre. Ha $E_{ij}$ jelöli azt az $\mathbb{R}^{m\times n}$-beli mátrixot, amelynek $i$-edik sorának $j$-edik eleme 1, az összes többi pedig zérus, akkor ezen mátrixok lineárisan függetlenek és tetszőleges $A = (a_{ij})_{m,n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ esetén $A = \sum_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}} a_{ij}E_{ij}$ ami bizonyítja állításunkat.

## Mátrixok szorzása

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Ekkor értelmezhetjük a $C = A \cdot B = AB \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixot úgy, hogy

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell}b_{\ell j}.$$

Például:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 3 + 9\cdot 2 & 4\cdot 0 + 9\cdot 4 & 4\cdot 2 + 9\cdot 1 \\ (-1)\cdot 3 + 2\cdot 2 & (-1)\cdot 0 + 2\cdot 4 & (-1)2 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 36 & 17 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy nem akármelyik két mátrix szorozható össze. Sőt, ha $A\cdot B$ létezik, akkor $B\cdot A$ nem biztos, hogy elvégezhető. $A\cdot B$ és $B\cdot A$ egyidejűleg akkor és csakis akkor végezhető el, ha $A$ és $B$ ugyanolyan tipusú négyzetes mátrixok. $A, B \in R^{n\times n}$ esetén sem biztos azonban, hogy $AB = BA$. Például

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

esetén

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

tehát $AB \neq BA$.

Adott $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ esetén definiáljuk az $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrixot úgy, hogy $A^T$ $i$-edik sorának $j$-edik eleme megegyezik az $A$ mátrix $j$-edik sorának $i$-edik elemével. Például

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1,2,3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}^{-1} = (1\ 2\ -1).$$

Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$-es mátrixot szimmetrikusnak nevezzük, ha $A^T = A$. Például $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ szimmetrikus mátrix.

### A mátrixszámítás alkalmazásai

1. Egy megye búzatermő területeit valamely évben adottságaik szerint öt osztályba sorolták. Jelöljük a csoportokon belüli összterületet $t_j$-vel ($j = 1, 2, \dots, 5$). A csoportokban hektáronként átlagosan $a_j (j = 1, 2, \dots, 5)$ mázsa búza terem. Legyen

$$T = (t_1, t_2, \dots, t_5) \quad \text{és} \quad A = (a_1, a_2, \dots, a_5) \in \mathbb{R}^4.$$

Ekkor a $TA$ skalárszorzat megadja az adott évben, az adott megyében az összes termett búza mennyiségét. Ha $I = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, akkor $\frac{TA}{TI}$ a megye hektáronkénti átlagos búzatermését fejezi ki.

2. Egy ökológiai modellben $r$ számú növényfaj, $s$ számú növényevő és $t$ számú ragadozó állatfaj szerepel. Jelölje az $X$ mátrix $x_{ij}$ eleme ($i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, s$) a $j$-edik növényevő faj egyedei által elfogyasztott $i$-edik növényfajbeli egyedek valamilyen mérték szerinti mennyiségét. Hasonlóan jelölje az $Y$ mátrix $y_{i_j}$ eleme ($i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, t$) a $j$-edik ragadozó faj egyedei által elfogyasztott $i$-edik fajbeli növényevők mennyiségét, a $C$ mátrix $c_{ij}$ eleme ($i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, t$) pedig a $j$-edik ragodozó faj egyedei által

a táplálékláncban közvetve elfogyasztott $i$-edik növényfajbeli egyedek mennyiségét. A $C$ mátrix nem más, mint az $X$ és $Y$ mátrixok szorzata, $C = XY$.

3. Erősen leegyszerűsített modellben egy madárfaj populációjában az egyedek életkora három diszkrét érték lehet: a madarak 0,1 vagy 2 évesek. A 2 évesek részpopulációja elemszámának kétszeresével egyenlő számú (0 éves) utódot produkál, majd egy éven belül elpusztul. Egy év alatt a 0 korcsoportbelieknek $\alpha$ szorosa, az 1 éveseknek pedig $\beta$ szorosa pusztul el ($0 < \alpha, \beta < 1$). Kérdésünk, hogyan alakul a madárfaj létszáma hosszú távon? Jelölje $x_0(n)$, $x_1(n)$, $x_2(n)$ a 0,1, ill. 2 évesek létszámát az $n$-edik év elején. Ekkor

$$x_0(n+1) = 2x_2(n)$$
$$x_1(n+1) = (1-\alpha)x_0(n)$$
$$x_2(n+1) = (1-\beta)x_1(n)$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Vezessük be az $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1-\beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ generációs mátrixot és az $x(n) = \begin{pmatrix} x_0(n) \\ x_i(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} \in \theta^n$ mátrixot. Ekkor

$$x(n+1) = Ax(n).$$

Ezt felhasználva

$$x(1) = Ax(0),\ x(2) = Ax(2) = A^2x(0),\ x(3) = Ax(2) = A^3x(0),$$

ahonnan látható, hogy

$$x(n) = A^n x(0).$$

Tehát $A$ hatványait kell vizsgálnunk.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2(1-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\alpha) \\ (1-\alpha)(1-\beta) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2(1-\alpha)(1-\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 2(1-\alpha)(1-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\alpha)(1-\beta) \end{pmatrix} = 2(1-\alpha)(1-\beta)E.$$

Ezt felhasználva

$$A^4 = AA^3 = 2(1-\alpha)(1-\beta)A$$
$$A^5 = A^2A^3 = 2(1-\alpha)(1-\beta)A^2$$
$$A^6 = A^3A^3 = [2(1-\alpha)(1-\beta)]^2E,$$

ahonnan látható, hogy

$$A^{3k} = [2(1-\alpha)(1-\beta)]^kE$$
$$A^{3k+1} = [2(1-\alpha)(1-\beta)]^kA$$
$$A^{3k+2} = [2(1-\alpha)(1-\beta)]^kA^2$$

($k = 1, 2, 3, \ldots$). Innen következtetni tudunk a létszám alakulására. Ha $2(1-\alpha)(1-\beta) < 1$, akkor $[2(1-\alpha)(1-\beta)]^k \to 0$, ha $k \to \infty$. Ez azt jelenti, hogy $x(0)$-tól függően a madárfaj létszáma előbb vagy utóbb 1 alá csökken, vagyis a madárfaj kihal. Ellenben, ha $2(1-\alpha)(1-\beta) > 1$, akkor a populáció szaporodik, létszáma rohamosan nő. Ez oda vezet, hogy előbb vagy utóbb feléli a rendelkezésére álló életteret. (Ekkor persze $\alpha$ és $\beta$ nő, vagyis $2(1-\alpha)(1-\beta)$ 1 alá, vagy 1-ig csökken.)

Érdekes az az eset, amikor $2(1-\alpha)(1-\beta) = 1$. Ekkor

$$x(1) = Ax(0) = \begin{pmatrix} 2 & x_2(0) \\ (1-\alpha) & x_0(0) \\ (1-\beta) & x_1(0) \end{pmatrix}$$

$$x(2) = A^2(0) = \begin{pmatrix} 2(1-\beta) & x_1(1) \\ 2(1-\alpha) & x_2(1) \\ (1-\alpha)(1-\beta) & x_0(1) \end{pmatrix}$$

$$x(3) = A^3x(0) = 2(1-\alpha)(1-\beta)x(0) = x(0).$$
$$x(4) = Ax(0)$$
$$x(5) = A^2x(0)$$
$$x(6) = x(0)$$
$$\vdots$$

vagyis a madárfaj létszáma ciklikusan változik, minden 3-ik évben ugyanaz a létszám. Látható az is, ha

$$x_1(0) = 2(1-\beta)c, \quad x_1(0) = 2(1-\alpha)c$$

és $x_2(0) = (1-\alpha)(1-\beta)c$ ($c \in \mathbb{R}$, tetszőleges, akkor $x(n) = x(0)$ minden $n$-re, azaz előfordulhat az is, hogy a létszám sosem változik.

## A lineáris transzformáció fogalma

Legyenek $L_1$ és $L_2$ lineáris terek és $T : L_1 \to L_2$ egy leképezés, ami rendelkezik a $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ tulajdonsággal bármely $x, y \in L_1$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eseték, akkor $T$ leképezést lineáris transzformációnak nevezzük.

Példák lineáris transzformációra

1) $L_1 = L_2$ a sík 0 pontjából kiinduló vektorai, $T$ 0 körüli, adott szögű elforgatás

2) $L_1 = L_2$ a tér 0 pontjából kiinduló vektorai, $T$ 0 középpontra történő tükrözés.

3) $L_1$ a differenciálható függvények halmaz $(0, 1)$-en $L_2$ a (0,1)-en értelmezett függvények, $T$ az adott függvényhez a differenciálhányadosát rendeli hozzá.

4) $L_1 = L_2$ a $[0, 1]$-en a folytonos függvények halmaza és $(Tf(x) = \int_0^x sf(s)ds$.

a lineáris transzformáció tulajdonságából következik, hogy minden lineáris transzformáció nullvektorhoz nullvektort rendel, ugyanis, ha $x \in L_1$ tetszőleges elem, akkor

$$L(0) = L(0x) = 0L(x) = 0.$$

Ezért nem lineáris transzformáció például a síkon egy nem nulla vektorral való eltolás.

Az $L$-et $L_2$-be képező lineáris transzformcáiók halmazát $B(L_1, L_2)$-vel fogjuk jelölni.

## $B(\theta^n, \theta^m)$ és $B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$-beli lineáris transzformációk általános alakja

Legyen $T \in B(\theta^n, \theta^m)$ egy lineáris transzformcáió. Ha $E_k \in \theta^n$ jelöli azt az oszlopvektort, amelynek a $k$-adik eleme 1, az összes többi pedig zérus, akkor tetszőleges $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \theta^n$ felírható $y = \sum_{i=1}^n y_i E_i$ alakban. Így

$$T(y) = \sum_{i=1}^n T(y_i E_i) = \sum_{i=1}^n y_i T(E_i).$$

$T(E_i) \in \theta^m$, jelölje az elemeit $a_{ji}$, $T(E_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$. Ekkor $T(y) = \sum_{i=1}^n y_i \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$. Ha

$A$ jelöli azt a $R^{m\times n}$ mátrixot, amelynek $i$- edik sora $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$, akkor

$$T(y) = Ay.$$

Innen látható, hogy $B(\theta^n, \theta^m)$ elemei az $\mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixokkal reprezentálhatók. Hasonlóan levezethető, hogy ha $T \in B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, akkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrix, hogy $T(x) = xA$ minden $x \in \mathbb{R}^n$-re.

## Az $\mathbb{R}^n$ tér topológiája

Legyen adott $n \in \mathbb{N}$. Ha $x \in \mathbb{R}^n$ és $\alpha > 0$ egy valós szám, akkor $G_\alpha(x)$ jelöli a $G_\alpha(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varepsilon\}$ halmazt. Emlékeztetünk, hogy $\|x\| = \sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2)}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén. $G_\alpha(x)$-et szokás nevezni az $x$ középpontú $\alpha$ sugarú gömbnek is. Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaznak $x$ belső pontja, ha $x \in H$ és van olyan $\alpha > 0$, hogy $G_\alpha(x) \subset H$. $H \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, ha minden pontja belső pont. $x \in \mathbb{R}^n$ környezetének hívunk minden olyan $H$ nyílt halmazt, amelyre $x \in H \subset \mathbb{R}^n$ teljesül. $\mathbb{R}^n$ egy részhalmazát zártnak nevezzük, ha komplementere nyílt.

Legyen adott egy $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$ sorozat $k = 1, 2, \ldots$. Azt mondjuk, hogy $x_k$ az $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ elemhez konvergál, ha minden $i$-re $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $x_{k,i} \to a_i$.
Jelben: $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, vagy $x_k \to a$, ha $k \to \infty$.
Evidens, hogy $\lim_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0$, ha $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. Az $x_k$ sorozatot divergensnek mondjuk, ha van olyan $i (i = 1, 2, \ldots, n)$, amelyre $x_{k,i}$ divergens.

## $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tipusú függvények

Adott $n, m \in \mathbb{N}$ mellett az $\mathbb{R}^n$ térből az $\mathbb{R}^m$ térbe képező függvényekkel fogunk foglalkozni. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ értelmezési tartományát $D_f$-vel fogjuk jelölni, $D_f \subset \mathbb{R}^n$. Ilyen függvények például $\mathbb{R}^n$-et, $\mathbb{R}^m$-be képező lineáris transzformációk. Ezek általános alakja $f(x) = xA$, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Nem lineáris függvényt kapunk például, ha a mátrixszámítás alkalmazásaiban bemutatott madárpopulációban (3. példa) az $\alpha$ és $\beta$ elhalálozási ráta a madárfaj összlétszámától is függ. Ha egy adott évben $x = (x_0, x_1, x_2)$ a madárfaj életkor szerinti vektora, akkor

$$\alpha = \alpha_0\Big(1 - \frac{x_0 + x_1 + x_2}{K}\Big), \quad \beta = \beta_0\Big(1 - \frac{x_0 + x_1 + x_2}{K}\Big)$$

elég jól leírja a halálozási ráták változását, ahol $K$ jelöli az élettér kapacitását, $\alpha_0, \beta_0$ pedig arányossági tényezők $(0 < \alpha_0, \beta_0, K)$. Ekkor a következő évben a madárfaj életkor szerinti vektorát az az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, függvény írja le, amelyre

$$f = f(x_0, x_1, x_2) = (2x_2, [1 - \alpha_0 + \frac{\alpha_0}{K}(x_0 + x_1 + x_2)]x_0,$$

$$[1 - \beta_0 + \frac{\beta_0}{K}(x_0 + x_1 + x_2)]x_1).$$

Szemléltetni, felrajzolni egy ilyen többváltozós, többértékű függvényt általában nem lehet. Azonban, ha

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1,$$

akkor az $(x, y, z)$ kordináta rendszerben felületként ábrázolható, $x, y$ befutja az értelmezési tartományt az $x, y$ síkon, $z = f(x, y)$. Az ilyen függvények egy másik szemléltetési módja a szintvonalas ábrázolás. Ez abban áll, hogy bizonyos $c_i \in \mathbb{R}$ valós számokhoz ábrázoljuk a síkon az

$$\{(x, y) \in D_f, \quad f(x, y) = c_i\}$$

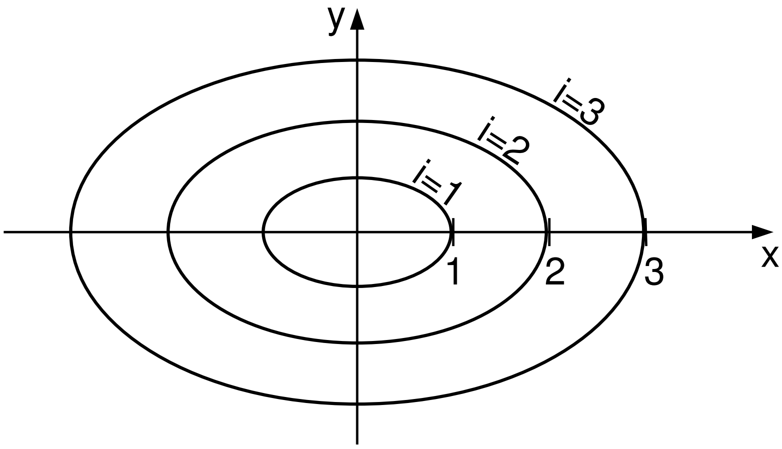
halmazokat az úgynevezett szintvonalakat. Például, ha

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2$$

akkor a $c_i = i^2$ számokhoz tartozó szintvonalak az

$$\Big(\frac{x}{i}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{\frac{i}{2}}\Big)^2 = 1$$

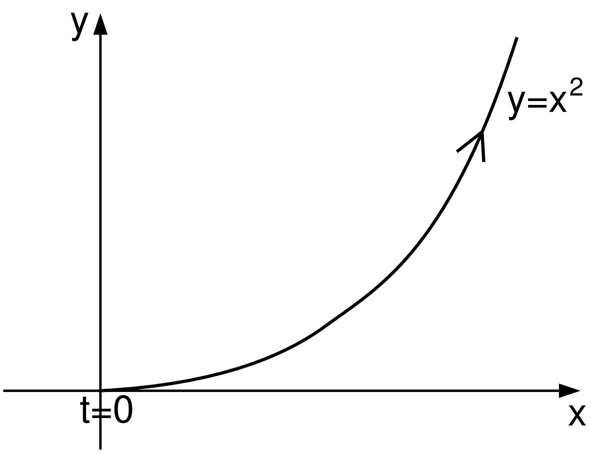
ellipszisek.




Ezen az ábrázoláson alapulnak a szintvonalas térképek.

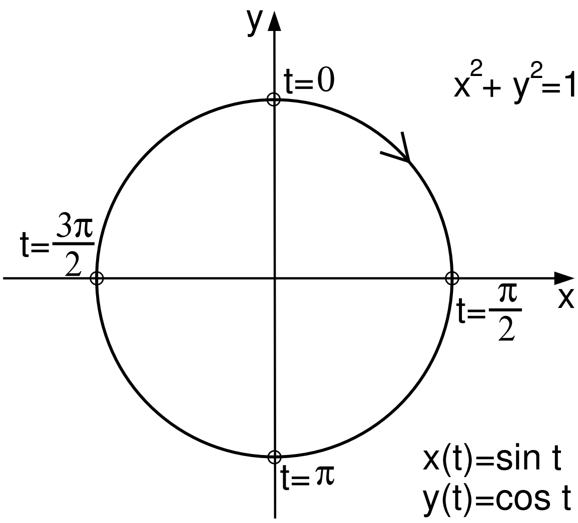
Ha $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$, akkor $f$ az $(x, y)$ síkban irányított görbeként ábrázolható. Az $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ jelöléssel, ahol $t$ a független változó, $t \in D_f \subset \mathbb{R}$, az $(x = f_1(t), y = f_2(t))$ paraméteres görbét kell ábrázolni. Ha a $t$ változót $x = f(t)$-ből kifejezzük, $t = \varphi(x)$, akkor az $x$ és $y$ közötti kapcsolatot az $y = f_2(\varphi(x))$ függvény írja le.

Például, ha $f(t) = (t^2, t^4)$, akkor $x = t^2$, $y = t^4$-ből $x \geq 0$, $t = \pm\sqrt{x}$, $y = x^2$ adódik. Így a függvény az $y = x^2$ $(x \geq 0)$ félparabolával szemléltethető.




Ha $t$ a negatív számokon keresztül tart 0-hoz a $(t^2, t^4)$ pont a parabola szárán tart az origóhoz, $t = 0$ éppen az origóba esik, majd $t > 0$-ra ugyan azon a parabola ágon mozogva távolodik az origótól, kétszer leírva a parabola szárát.

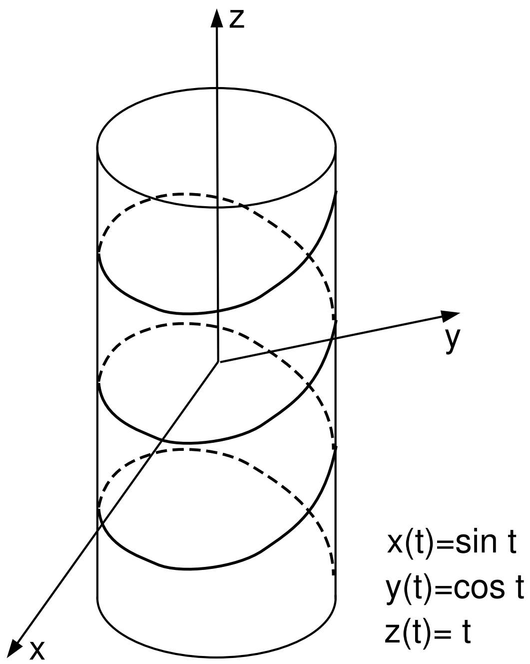
Egy másik példaként vegyük az $f(t) = (\sin t, \cos t)$ függvényt. Ekkor $x = \sin t$, $y = \cos t$-ből $x^2 + y^2 = 1$, azaz a $(\sin t, \cos t)$ pont az egységsugarú körön mozog.




Hasonlóan szemléltethetők az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

tipusú függvények is térbeli görbeként. Például, ha $f(t) = (\sin t, \cos t, t)$, akkor a görbe paraméteres alakja $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = t$. Mivel $x^2 + y^2 = 1$ a $z = f(t)$ vetülete az $(x, y)$ síkra mindig az egységsugarú körre esik, végtelen sokszor befutva azt. $z$ állandóan növekszik. Ennek a görbének a neve csavarvonal, ami hengerfelületen ábrázolható.



## Gyakorló feladatok

1) Végezzük el az alábbi műveleteket, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}:$$

1) $2A + 3B$, 2) $A - B$, 3) $AB$, 4) $BA$

5) $A^2B$, 6) $B^3$, 7) $A^{-1}$, 8) $A^{-1}B$

2) Végezze el az alábbi szorzásokat:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1\ 2\ 3)$

7) $(1\ 2\ 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, 8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8) $(A + B)^2$, 9) $AB - BA$, 10) $A^2 - B^2$

11) $E + A + A^2$, 12) $ABA$, 13) $(A - 2B)^2$

3) Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

Lineárisan függők-e, a következő vektorok?

1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 01 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

3) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\\-1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

4) $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Lineárisan függőek a $C[0,1]$ tér következő elemei:

1) $e^x$, $\sin x$, $\cos x$

2) $x$, $\sin x$, $1$

3) $x$, $x^2$, $x^3$

4) $1$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{(x+1)^2}$

Igaz-e, hogy a $\begin{pmatrix}a & b & c\\0 & d & e\\0 & 0 & f\end{pmatrix}$ típusú mátrixok halmaza lineáris teret alkot? Ha igen, adja meg a dimenzióját!

5) Konvergálnak-e az alábbi pontsorozatok:

1) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n,\ \sqrt[n]{n+2},\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$

2) $\left\{\sqrt[n]{2n},\ \left(\frac{3}{n}\right)^n,\ \frac{2^n}{n!},\ \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right\}$

3) $\left\{(-1)^n,\ \frac{2}{n},\ \left(\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

4) $\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^n,\ \left(1+\frac{2}{n}\right)^n,\ \sqrt[n]{n+1}\right\}$

## $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények határértéke és folytonossága

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy van olyan $x_k \in \mathbb{R}^n$ sorozat, amelyre $x_k \in D_f$ és $\lim_{k\to\infty} x_k = a$.

Azt mondjuk, hogy $a$-ban $f$-nek létezik a határértéke és $A$-val egyenlő, ha $A \in \mathbb{R}^m$ és tetszőleges olyan $x_k$ sorozat esetén, amelyre $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, $x_k \in D_f$ és $x_k \neq a$ teljesül, az is igaz, hogy $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = A$. A határérték jelölésére használjuk a $\lim_{x\to a} f(x) = A$ írásmódot is.

Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvényt folytonosnak nevezzük az $a \in D_f$ helyen, ha

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Példa. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Ekkor $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ha $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = 0$, akkor $f(x_n, y_n) = 1 \to 1$, míg ha $x_n = 0$, $y_n = \frac{1}{n}$, akkor $f(x_n, y_n) = -1 \to -1$, így $f$-nek nem létezik a határértéke (0,0)-ban.

Példa. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$. $D_f = R^2 \setminus \{(0,0)\}$. Most mind az $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = 0$, mind az $x_n = 0$, $y_n = \frac{1}{n}$ esetben az $f(x_n, y_n) \to 0$, így ha létezik a határéték, akkor az csak 0 lehet. Legyen tehát $x_n, y_n$ tetszőleges olyan sorozat, amelyre $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ és $x_n$ és $y_n$ egyidejűleg nem egyenlő nullával. Ekkor

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n^3 - y_n^3}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{(x_n - y_n)(x_n^2 + x_n y_n + y_n^2)}{x_n^2 + y_n^2}.$$

Felhasználva, hogy $|x_n y_n| \leq \frac{x_n^2+y_n^2}{2}$, nyerjük, hogy

$$|f(x_n, y_n)| \leq \frac{|x_n - y_n|(x_n^2 + \frac{x_n^2+y_n^2}{2} + y_n^2)}{x_n^2 + y_n^2} =$$

$= \frac{3}{2}(x_n - y_n) \to 0$ ha $n \to \infty$. Így $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Példa. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0, \ y = 0. \end{cases}$$

Az előző példa alapján nyerjük, hogy $f$ folytonos (0,0)-ban. Más $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ pontban, legyen $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$. Ekkor $x_n^2 + y_n^2 \to x_0^2 + y_0^2 \neq 0$, $x_n^3 - y_n^3 \to x_0^3 - y_0^3$ és így $f(x_n, y_n) \to f(x_0, y_0)$ a sorozatokra tanult eredmények alapján. Tehát $f$ mindenhol folytonos.

## Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények differenciálszámítása

Tekintsünk először egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvényt. Legyen $(x_0, y_0)$ $D_f$ egy belső pontja. Ekkor $g(x) := f(x, y_0)$ egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvény. Ha $g$ differenciálható $x_0$-ban, akkor $f$-et $(x_0, y_0)$-ban $x$ szerint parciálisan differenciálhatónak nevezzük, amit $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ vagy $f'_x(x_0, y_0$-val jelöljük. Hasonlóan definiáljuk az $y$ szerinti parciális differenciálhányadost is, mint $h(y) := f(x_0, y)$ differenciálhányadosa $y_0$-ban. Ennek jelölése: $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ vagy $f'_y(x_0, y_0)$. Ha $f$-nek $x$ szerinti differenciálhányadosa egy $H \subset D_f$ halmaz minden pontjában létezik, akkor értelmezzük a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ $(f'_x(x, y))$ függvényt a $H$ halmazon. Értelmeszerűen definiáljuk az $y$ szerinti parciális differenciálhányadost is.

<u>Példa</u>. $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$. $D_f = R^2 \setminus \{(x, y) : x + y = 0\}$. Ekkor

$$f'_x(x, y) = \frac{y}{x+y} - \frac{xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x}{x+y} - \frac{xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

értelmezettek $D_f$ minden pontjában.

<u>Példa</u>.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = \\ &= \frac{2x^3 + 2xy^2 - 2x^3 + 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_y &= \frac{-2y}{x^2+y^2} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y = \\ &= \frac{-2yx^2 - 2y^3 - 2yx^2 + 2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

A (0,0) pontban $x \neq 0$-ra $f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$, és $f(0, y) = -1$, $y \neq 0$-ra tehát $f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$. Ebből az utolsó példából az is látszik, hogy a parciális differenciálhányadosok meglétéből nem következik a függvény folytonossága.

Ha az $f'_x$ és $f'_y$ függvények léteznek az $(x, y)$ pont valamely környezetében, akkor előfordulhat, hogy ezeknek is létezik az $x$ szerinti, vagy az $y$ szerinti parciális differenciálhányadosuk. Ezeket a következő módon jelöljük

$$\frac{\partial f'_x}{\partial x} = f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f'_y}{\partial x} = f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

<u>Példa</u>. Legyen $f(x, y) = x^4 + 4x^2y^3 + 7x \sin y$. Ekkor

$$f'_x(x, y) = 4x^3 + 8xy^3 + 7 \sin y$$

$$f'_y(x, y) = 12x^2y^2 + 7x \cos y$$

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 + 8y^3$$

$$f''_{xy}(x, y) = 24xy^2 + 7 \cos y$$

$$f''_{yy}(x, y) = 24x^2y - 7x \sin y$$

$$f''_{yx}(x, y) = 2x\ xy^2 + 7 \cos y.$$

Észrevehetjük, hogy $f''_{xy} = f''_{yx}$ minden $(x, y)$ pontban. Ez elég gyakran így van, pontosabban, ha $f'_x, f'_y, f''_{xy}$ és $f''_{yx}$ léteznek az $(x_0, y_0)$ pont egy környezetében, ott folytonosak, akkor ebben a környezetben $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Legyen adott egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}'$ típusú függvény, $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, értelmezési tartományát jelölje $D_f$. Ha $x_0 \in D_f$, $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$, akkor értelmezhetjük az $x_k(k = 1, 2, \ldots, n)$ szerinti, vagy más elnevezéssel a $k$-adik koordináta szerinti parciális deriváltat az $x_0$ helyen, mint a

$$h(y) = f\ (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0k-1}, y, x_{0k+1}, \ldots, x_n)$$

függvény differenciálhányadosát az $y = x_{0k}$ helyen. Ennek jelölése

$$f'_{x_k}(x_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0).$$

Ha ez egy $H$ halmaz minden pontjában teljesül, akkor beszélhetünk a $k$-adik változó szerint parciális dervált függvényről. A kétváltozós esettel analóg módon definiáljuk a magasabb parciális deriváltakat is. Igaz az is, hogy, ha $f$, $f'_{x_i}$, $f'_{x_j}$, $f''_{x_ix_j}$, $f''_{x_jx_i}$ folytonosak egy $H$ halmazon, akkor

$$f''_{x_ix_j}(x) = f''_{x_jx_i}(x) \quad \forall x \in H.$$

<u>Definíció.</u> Azt mondjuk, hogy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható $D_f$ egy belső pontjában, ha $x_0$-nak van olyan $U$ környezete, emelyre $U \subset D_f$ és van olyan $A \in \theta^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ úgy hogy

(3) $$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)A + g(x) \quad \forall x \in U,$$

és $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\|x - x_0\|} = 0$. $A \in \theta^n$ vektort $f$ $x_0$-beli differenciálhányadosának nevezzük és $f'(x_0)$- val jelöljük, $f'(x_0) = A$.

**Tétel.** Ha $f$ differenciálható $x_0$-ban, akkor $f$ folytonos $x_0$-ban, $f$ minden változója szerint parciálisan differenciálható és

$$f'(x_0) = (f'_{x_1}(x_0),\ f'_{x_2}(x_0), \ldots, f'_{x_n}(x_0))^T.$$

*Bizonyítás.* $g(x)$ folytonossága alapján minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $x \neq x_0$, $\|x - x_0\| < \delta$ esetén $\frac{|g(x)|}{\|x - x_0\|} < \varepsilon$.

Legyen $\delta_1 = \max(\delta, 1)$. Ekkor $\|x - x_0\| < \delta_1$ esetén $|g(x)| < \varepsilon \|x - x_0\| < \varepsilon\delta_1 \leq \varepsilon$, azaz $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$. Azonban $\lim_{x \to x_0}(x - x_0)A = 0$ is teljesül, ezért $\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$, azaz $f(x)$ folytonos $x_0$-ban. a tétel második felének bizonyításához jelöljük $A$ elemeit $a_i$-vel, $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ és legyen adott egy $i$ egész szám, $1 \leq i \leq n$. Legyen továbbá $h(y) = f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0i-1}, y, x_{0i+1}, \ldots x_{0n})$. Ekkor $x - x_0 = (0, 0, \ldots, 0, y - y_0, 0, \ldots 0)$

$$h(y) - h(y_0) = a_i(y - y_0) + g(y),$$

ahonnan

$$\frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0} - a_i = \frac{g(y)}{y - y_0}.$$

Mivel $\lim_{y \to y_0} \frac{|g(y)|}{|y - y_0|} = 0$, ezért

$$\lim_{y \to y_0} \left| \frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0} - a_i \right| = 0,$$

azaz $f$ parciálisan differenciálható az $i$-edik változó szerint és $f'_{x_i}(x_0) = a_i$.

Legyen adott egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvény. Ezt akkor nevezzük differenciálhatónak az értelmezési tartományának egy belső $x_0$ pontjában, ha van $x_0$-nak egz olyan $U$ környezete, hogy

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)A + g(x),$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $g : U \to \mathbb{R}^m$ és $\lim_{x\to x_0} \frac{\|g(x)\|}{\|x-x_0\|} = 0$.

Az $A$ mátrixot $f'(x_0)$-vel szoktuk jelölni. Be lehet látni, hogy $f'(x_0)$ létezéséből következik $f(x)$ folytonossága és mindegyik komponensének bármelyik változó szerinti parciális differenciálhatósága, sőt, ha

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)),$$

akkor

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Igaz a következő állítás is.

**Tétel.** Ha $H \subset D_f$ és $f$ mindegyik komponensének az összes parciál differenciálhányadosa létezik és folytonos $H$-n, akkor $f'(x)$ létezik $\forall x \in H$ és (4) teljesül.

Legyen adott $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és differenciálható egy $H \subset D_f$ nyílt halmazon. Ekkor

$$f'(x) = (f'_{x_1}(x),\ f'_{x_2}(x), \ldots, f'_{x_n}(x))$$

$x \in H$ esetén. Ha $f' : H \to \mathbb{R}^n$ is differenciálható, akkor definiálhatjuk ennek a differenciálhányados függvényét is, amit $f^{''}(x)$-el jelölünk,

$$f^{''}(x) = (f'(x))' = \begin{pmatrix} f^{''}_{x_1x_1}(x) & f^{''}_{x_2x_1}(x) & \ldots & f^{''}_{x_nx_1}(x) \\ f^{''}_{x_1x_2}(x) & f^{''}_{x_2x_2}(x) & \ldots & f^{''}_{x_nx_1}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f^{''}_{x_1x_n}(x) & f^{''}_{x_2x_n}(x) & \ldots & f^{''}_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}$$

Tehát $f^{''}(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ez szimmetrikus mátrix lesz, ha az összes első és másodrendű parciális derivált folytonos.

<u>Definíció.</u> Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $f$ differenciálható $x_0 \in D_f$-ben, akkor $f'(x_0)$-t $f$ gradiensének is szokás nevezni.

## Szélsőérték számítás

<u>Definíció.</u> Egy $x_0 \in D_f$ pontban $f$-nek lokális maximuma van, ha az $x_0$-nak van olyan $U$ környezete, hogy $U \subset D_f$ és

$$f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in U.$$

$x_0 \in D_f$-ben $f$-nek lokális minimuma van, ha $x_0$-nak van olyan $U \subset D_f$ környezete, hogy

$$f(x) \ge f(x_0) \quad \forall x \in U.$$

$x_0 \in D_f$-ben $f$-nek lokális szélsőértéke van, ha lokális maximuma, vagy lokális minimuma van.

**Tétel**. Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$-nek $x_0 \in D_f$-ben lokális szélsőértéke van és parciális differenciálhányadosai léteznek $x_0 \in D_f$-ben akkor $f'_{x_i}(x_0) = 0$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

*Bizonyítás.* Legyen $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ és $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ adott. Definiáljuk a

$$h(y) = f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0i-1}, y, x_{0_{i+1}}, \ldots x_{0n})$$

függvényt. Ekkor $h(y)$ differenciálható $x_{0i}$-ben, $h$-nak szélsőértéke van $x_{0i}$-ben és így

$$0 = h'(y) = f'_{x_i}(x_0)$$

amit be akartunk látni.

A következő tételt bizonyítás nélkül közöljük, technikailag kicsit nehézkesebb. Az egyváltozós függvényekre ismert tétel általánosítására többváltozós $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényekre.

Az ilyen függvényekre, ha $f$ összes első és másodrendű parciális differenciálhányadosa létezik és folytonos egy $H \subset D_f$ nyílt halmazon, akkor $f'(x) \in \mathbb{R}^n$, $f^{''}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is létezik minden $x \in H$-ra. Emlékeztetünk, hogy $f^{''}(x)$ szimmetrikus mátrix. Adott $x_0 \in H$ esetén definiálhatjuk a $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kifejezést a

$p(x) = xf^{''}(x_0)x^T$ formulával.

Minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $p(\lambda x) = (\lambda x)f^{''}(x_0)(\lambda x)^T = \lambda^2 p(x)$. Így $p(\lambda x_1) < 0 (> 0)$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

**Tétel.** Legyen $H \subset D_f$ nyílt halmaz és tegyük fel, hogy $f$ összes első és második differenciálhányadosa létezik és folytonos $H$-n és egy $x_0 \in H$ esetén

$$f'(x_0) = 0.$$

Ha $p(x) = xf^{''}(x_0)x^T > 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ esetén, akkor $f$-nek $x_0$-ban lokális minimuma van. Ha $p(x) < 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$-ra, akkor $f$-nek $x_0$-ban lokális maximuma van. Ha $p(x)$ vesz fel pozitív és negatív értéket is, akkor $f$-nek nincs szélsőértéke $x_0$-ban. Más esetekben $f'(x_0)$ és $f^{''}(x_0)$ segítségével a szélsőérték létezése nem dönthető el.

A fenti tételt jobban kifejtjük $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvények esetén, akkor

$$f^{''}(x_0) = \begin{pmatrix} f^{''}_{x_1x_1}(x_0) & f^{''}_{x_2x_1}(x_0) \\ f^{''}_{x_1x_2(x_0)} & f^{''}_{x_2x_2(x_0)} \end{pmatrix}.$$

A rövidség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket.

$a = f^{''}_{x_1x_1}(x_0)$, $b = f^{''}_{x_1x_2}(x_0) = f^{''}_{x_2x_1}(x_0)$

$d = f^{''}_{x_2x_2}(x_0)$

Ekkor

$$p(x) = (x_1 \cdot x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2.$$

Ha $a = 0$ és $b \neq 0$, akkor $p(x) = x_2(2bx_1 + dx_2)$. Ekkor

$x_1 > -\frac{d}{2b}x_2$ és $x_2 > 0$ esetén $bP(x) > 0$

$x_1 > -\frac{d}{2b}x_2$ és $x_2 < 0$ esetén $bP(x) < 0$,

tehát $P(x)$ vesz fel pozitív és negatív értéket is.

Ha $a = 0$ és $b = 0$, akkor $P(x) = dx_2^2$, tehát $P(x)$ előjele állandó, de az $x_1 \neq 0$, $x_2 = 0$ pontokban $P(x) = 0$, így ebben az esetben a szélsőérték nem dönthető el.

Ha $d = 0$ és $b \neq 0$, akkor hasonlóan az előző esethez $P(x)$ vesz fel pozitív és negatív értéket is, a $d = b = 0$ esetben a szélsőértékre nem tudunk következtetni.

Ha $a \neq 0$, akkor

$$P(x) = a\Big(x_1^2 + \frac{2b}{a}x_1x_2 + \frac{d}{d}x_2^2\Big) =$$

$$a\Big(\Big(x_1 + \frac{b}{a}x_2\Big)^2 + \Big(\frac{d}{a} - \frac{b^2}{a^2}\Big)x_2^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{a}(ax_1 + bx_2)^2 + \frac{ad - b^2}{a}x_2^2$$

Ha $a > 0$ és $ad - b^2 > 0$, akkor

$$\frac{1}{a}(ax_1 + bx_2)^2 \geq 0 \quad \text{és} \quad \frac{ad - b^2}{a}x_2^2 \geq 0$$

teljesül. Tehát $P(x) = 0$ csak úgy lehet, ha $x_2 = 0$ és $ax_1 + bx_2 = 0$, amelyből $x_1 = 0$ is következik. Ilyenkor tehát $P(x) > 0$ minden $x \neq 0$-ra.

Ha $a < 0$ és $ad - b^2 > 0$, akkor

$$\frac{1}{a}(ax_1 + bx_2) \leq 0, \quad \frac{ad - b^2}{a}x_2^2 \leq 0,$$

és $f(x) = 0$ csak úgy lehet, ha $x_2 = 0$ és $ax_1 + bx_2 = 0$, vagyis $x_1 = 0$. Az

$a > 0$, $ad - b^2 < 0$, vagy

$a < 0$, $ad - b^2 < 0$ esetben

$$\frac{1}{a}(ax_1 + bx_2)^2 \quad \text{és} \quad \frac{ad - b^2}{a}x_2^2$$

ellentétel előjelűek, az $(x_1, 0)$ $x_1 \neq 0$ típusú pontokban, valamit a $(0, x_2)$ $x_2 \neq 0$ típusú pontokban ellentétes előjelű értékeket vesz fel $P(x)$. Megjegyezzük még, hogy ha $a = 0$, akkor $D = -b^2$, tehát $b \neq 0$ ekvivalens $D \neq 0$-val. Továbbá, ha $D = 0$, $a \neq 0$, akkor $P(x) = \frac{a}{a}(ax_1 + bx_2)^2$ állandó előjelű és nem csak a (0,0)-ban vesz fel zérus értéket.

Így a fentiek összefoglalásaként a következő esetek lehetségesek.

Ha

$$f'_{x_1}(x_0) = 0, \quad f'_{x_2}(x_0) = 0,$$

$$a = f''_{x_1x_1}(x_0), \quad D = f''_{x_1x_1}(x_0)f''_{x_2x_2}(x_0) - (f''_{x_1x_2}(x_0))^2$$

és

$a > 0, D > 0 \Rightarrow f$-nek $x_0$-ban lokális minimuma van

$a < 0, D > 0 \Rightarrow f$-nek $x_0$-ban lokális maximuma van

$$\left.\begin{array}{l} a < 0, D < 0 \\ a > 0, D < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f\text{-nek } x_0\text{-ban nincs szélsőértéke}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 0, D = 0 \\ a \neq 0, D = 0 \\ a = 0, D \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{nem dönthető el a szélsőérték létezése}$$

1. <u>Feladat</u>. Tekintsük az $f(x,y) = e^{-\frac{1}{2}(x_2^2+y^2)}$ függvényt, ami a természetes eloszlások területén játszik fontos szerepet. Keressük, hogy hol van lokális szélsőértéke

$$f'_x = -xe^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

$$f'_y = -ye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

$f'_x = 0$, $f'_y = 0$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $x = y = 0$.

$$f''_{xx} = -e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} + x^2e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

$$f''_{xy} = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

$$f''_{yy} = -e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} + y^2e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

$$a = f''_{xx}(0,0) = -1 < 0$$

$$b = f''_{xx}(0,0)f''_{yy}(0,0) - (f''_{xy}(0,0))^2 = 1.$$

Tehát a függvénynek lokális helyi minimum van (0,0)-ban.

## Gyakorló feladatok

1) Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, állapítsuk meg a szintvonalak, illetve tengely metszetek segítségével, hogy milyen felületeket határoznak meg ezek a függvények.

1) $f(x,y) = x + y$,
2) $f(x,y) = x^2 + y^2$,
3) $f(x,y) = x^2 - y^2$,
4) $f(x,y) = (x+y)^2$
5) $f(x,y) = \frac{x}{y}$,
6) $f(x,y) = \sqrt{xy}$,
7) $f(x,y) = \frac{1}{xy}$,
8) $f(x,y) = \log\sqrt{1 - |x+y|}$,
9) $f(x,y) = \sqrt{x - y^2}$,
10) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,
11) $\sqrt{\log \mathrm{tg} xy}$

2) Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát:

1) $f(x,y) = \log xy^2$,
2) $f(x,y) = xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})$
3) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$,
4) $f(x,y) = \log(4 - x^2 - y^2)$
5) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - \log z$,
6) $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

7) $f(x,y,z)=\sqrt{1-\log(xyz)}$, 8) $f(x,y,z)=\frac{x}{y+z}$

9) $\log(z-\sqrt{x^2+y^2})$, 10) $f(x,y,z)=\frac{z}{x^2+y^2}$

11) $f(x,y,z)=\log(x^2-y^2-z^2)$, 12) $f(x,y,z)=\log\frac{x}{y-z}$

3) Léteznek-e az alábbi határértékek?

1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}$, 2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2+x-y}{1+x+y}$

3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos(x^2+y)$, 4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y^3}{x^4+y^2}$

4) Hol folytonosak az alábbi függvények?

1) $f(x,y)=\sin(xy)$, 2) $f(x,y)=\sqrt{x+y}$

3) $f(x,y)=\begin{cases} y\sin\frac{1}{x}, & \text{ha} \quad x\neq 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x=0 \end{cases}$

4) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad x=y=0 \\ 0, & \text{ha} \quad x=y=0 \end{cases}$

5) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{y^2}{x^4}, & \text{ha} \quad |y|<x^2 \\ 1, & \text{ha} \quad |y|\geq x^2 \end{cases}$

6) $f(x,y,z)=\frac{1}{x+y+z}$, 7) $f(x,y,z)=\frac{z}{(x+y)^2}$

5) Adja meg az alábbi függvények első és másodrendű parciális deriváltfüggvényeit:

1) $f(x,y)=x^4+y^4-4x^2y^2$, 2) $f(x,y)=xy+\frac{x}{y}$

3) $f(x,y)=xy\sin(x+y)$, 4) $f(x,y)=\frac{\cos x^2}{y^2}$

5) $f(x,y)=\log(x+y^2)$, 6) $f(x,y)\text{arctg}\frac{y}{x}$

7) $f(x,y)=\sqrt{x+y^2}$, 8) $f(x,y)=\sqrt{x+\sqrt{y}}$

9) $f(x,y)=xe^y+e^{x^2+y^2}$, 10) $f(x,y)=\log(x+\sqrt{y})$

11) $f(x,y)=\sin^2 x+\sin y^2$, 12) $f(x,y)=x^2y\log x$

13) $f(x,y,z)=x^2+y^2z^2$, 14) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

15) $f(x,y,z)=\sqrt{\log x+y^2+\sin z}$, 16) $f(x,y,z)=xyz$

6) Állítsa elő a következő függvények megjelölt parciális deriváltfüggvényeit:

$f(x,y)=x\log(xy)-y\log(xy)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$

$f(x,y)=x^3\sin y+y^3\sin x$, $\frac{\partial^6 f}{\partial x^3\partial y^3}$

$f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{\partial^5 f}{\partial x^3\partial y^2}$

$f(x,y,z)=e^{xyz}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$

$f(x,y,z)=xyze^{x+y+z}$, $\frac{\partial^6 f}{\partial x^3\partial y^2\partial z}$.

Adja meg az alábbi függvények lokális szélsőérték helyeit, döntse el, hogy ott lokális maximum vagy minimum van-e?

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y,$ $\qquad$ $f(x,y) = y \sin x$

$f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy,$ $\qquad$ $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2-4y)}$

$f(x,y) = x^2 + xy,$ $\qquad$ $f(x,y) = \frac{x}{x+y}$

$f(x,y) = e^x \sin y,$ $\qquad$ $f(x,y) = e^x \cos y$

$f(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y},$ $\qquad$ $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

## Valószínűségszámítás

A tudományokban sokszor megfigyelünk és igyekszünk leírni olyan jelenségeket, amelyekben a véletlen nagy szerepet játszik, például előre pontosan meg nem jósolható időjárás változás. Bizonyos esetekben olyan reprodukálható kísérleteket is végzünk, amelyek kimenetele véletlenszerű. E két módszer gyakran keverten jelentkezik. A valószínűségszámítás ilyen véletlen kimenetelű jelenségek, kísérletek matematikai leírásával foglalkozik.

Ebben a tudományban is található néhány alapfogalom. A valószínűségszámítás alkalmazásakor ezeket az alapfogalmakat mindig egyértelműen, és a valóságnak megfelelően kell látni, különben a felépített modellünk nem írja le a jelenséget. Ezek az alapfogalmakat a következőkben felsoroljuk. Ezeket nem definiáljuk, hanem csak a jelentésüket magyarázzuk, ahol ez szükséges.

*Valószínűségi kisérlet*: Olyan kisérlet, amely egymástól függetlenül akárhányszor megismételhető (megfigyelhető) és amely kimenetele véletlenszerű.

- *Esemény:* a valószínűségi kisérlet során bekövetkezhető lehetséges kimenetelek.
- *Két esemény összegén* azt az eseményt értjük, amely bekövetkezése abban áll, hogy a két esemény valamelyike bekövetkezik.
- Két esemény *szorzatán* azt az eseményt értjük, amely akkor következik be, ha mindkét esemény bekövetkezik.
- Egy esemény *ellentett* eseménye akkor következik be, ha az esemény nem következik be.
- Lehetetlen esemény az az esemény, amely sohasem következik be.
- Biztos esemény az az esemény, amely mindig bekövetkezik.
- Elemi események a lehető legegyszerűbb kimenetelei a valószínűségi kisérletnek.
- *Gyakoriság:* egy valószínűségi kisérletet $n$-szer megismételve, egy esemény gyakorisága

az esemény bekövetkezéseinek számát jelenti. Ennek jelölése $\kappa_n$, vagy $\kappa_n(A)$, ha $A$ jelöli az eseményt.

- *Relatív gyakoriságon* a $\dfrac{\kappa_n(A)}{n}$ hányadost értjük.
- Egy $A$ esemény valószínűségén értjük azt a valós számot, amely körül a relatív gyakoriság ingadozik.

*Például.* Ha a valószínűségi kisérlet abban áll, hogy feldobunk egy játékkockát, akkor 6 darab elemi esemény van, az $i$-edik jelenti azt, hogy $i$-t dobtunk a kockával $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Egy esemény például, hogy páros számot dobtunk, jelöljük ezt $A$-val. $B$ jelölje a páratlan szám dobását, $C$ jelölje, hogy a dobott szám 4-nél nagyobb. Ekkor $A+B$ a biztos esemény, $AB$ a lehetetlen esemény, $AC$ azt jelenti, hogy 6-ost dobtunk. $A$ ellentett eseménye a $B$, $C$ elentett eseménye pedig, hogy az 1,2,3,4 közül dobjuk valamelyiket. Ebben az esetben az elemi események valószínűsége $\frac{1}{6}$, ha a kocka szabályos.

Ha egy folyó vízállását figyeljük meg, akkor azt elemi eseménynek vehetjük a folyó vízszintjének a tenger szintjétől mért magasságát, amit egy szakasz pontjaival azonosíthatunk. Ez persze csak elvi jelentőségű, mert mérni úgyis csak racionális számot tudunk több-kevesebb pontossággal. Ezért eseménynek itt elég venni az alapszakasz részintervallumait és az ezekből összeadással, szorzással létrejövő halmazokat. Egy ilyen esemény valószínűségét cak a sokéves megfigyelések alapján tudjuk megadni.

## Valószínűségi mezők

Most a pontos matematikai definíciók következnek.

Valószínűségi mezőn értjük az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast, ahol

1. $\Omega$ nem üres halmaz, $\Omega$ elemeit elemi eseményeknek nevezzük. $\mathcal{A}$ $\Omega$ bizonyos részhalmazaink egy rendszere. $\mathcal{A}$ elemeit eseményeknek nevezzük. Két esemény összegén a halmazelméleti egyesítést, szorzatán a halmazelméleti metszetüket értjük. Ezek jelölése $A + B, AB$. Az $A$ esemény ellentett eseménye $\Omega$ azon elemeit jelentik, amelyek nem tartoznak $A$-hoz. Ennek jelölése: $\overline{A}$. $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$.
2. $\Omega \in \mathcal{A}$
3. Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\overline{A} \in \mathcal{A}$.

4. Ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor
$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$
5. $0 \leq P(A)$, minden $A \in \mathcal{A}$-ra.
6. $P(\Omega) = 1$
7. Ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ és $A_i A_j = \emptyset$ minden $i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$-re, akkor
$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=i}^{\infty} P(A_i).$$

A $P(A)$ számot az $A$ esemény valószínűségének nevezzük. Az 1-7 szabályok a legalapvetőbb tulajdonságok, ezeket axiómáknak nevezzük.

### Az axiómák további tulajdonságai

8. Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Ugyanis $A + \overline{A} = \Omega$ és $A\overline{A} = \emptyset$, így 7 és 6 alapján
$$P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$
amelyből következik az állítás.
9. $P(\emptyset) = 0$, azaz a lehetetlen esemény valószínűsége nulla. Ugyanis $\emptyset = \overline{\Omega}$, így 6 és 8-ból következik az állítás.
10. Ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, $A_i A_j = \emptyset$ minden $i \neq j \in \mathbb{N}$ esetén és $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, akkor
$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = 1.$$
Egy ilyen eseményrendszert teljes eseményrendszernek nevezzük. Maga az állítás közvetlenül adódik 6 és 7-ből.
11. Ha az $A$ esemény maga után vonja a $B$ eseményt, vagyis $A \subset B$, akkor
$$P(A) \leq P(B) \quad \text{és} \quad P(B - A) = P(B) - P(A).$$
Ugyanis $B = A + (B - A)$ és $A(B - A) = \emptyset$ teljesül, ezért 7 alapján
$$P(B) = P(A) + P(B - A).$$

Innen és 5-ből következik az állítás.

12. Tetszőleges $A$ eseményre $0 \leq P(A) \leq 1$. Ez is következik az előző tulajdonságból, mivel $A \subset \Omega$ és $P(\Omega) = 1$.

13. Ha $A$ és $B$ tetszőleges események, akkor

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Ugyanis $A + B = A + (B - AB)$ és $A(B - AB) = \emptyset$. Ezért

$$P(A + B) = P(A) + P(B - AB).$$

Itt $AB \subset B$, tehát $P(B - AB) = P(B) - P(AB)$, ahonnan következik az állítás.

14. Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események, akkor

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Ugyanis kettő esemény esetén ez a 13. tulajdonságból következik. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén teljesül. Ekkor

$$P\left(\sum_{i=1}^{k+1} A_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i + A_{k+1}\right) \leq$$

$$\leq P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) + P(A_{k+1}) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i) + P(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i).$$

## A valószínűségi mezők főbb típusai

Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt *diszkrétnek* nevezzük, ha

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$$

azaz az elemi események egy sorozattal is felsorolhatók. Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező *véges*, ha véges sok elemi esemény van és az elemi események bármely részhalmaza esemény. Az $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ valószínűségi mező klasszikus, ha véges és bármely elemi esemény valószínűsége egyenlő. Ilyenkor ha $n$ darab különböző elemi esemény van, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ és $p = P(\omega_i)$

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n = \Omega$$

ahonnan $1 = \sum_{i=1}^{n} P(\Omega_i) = np$, azaz $p = \frac{1}{n}$. Ha az $A \in \mathcal{A}$ esemény $k$ darab elemi eseményt tartalmaz, $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \omega_{i_k}\}$, akkor

$$P(A) = \sum_{y=1}^{k} P(\omega_{i_j}) = kp = \frac{k}{n}.$$

Tehát klasszikus valószínűségi mező esetén tetszőleges esemény valószínűségét megkapjuk, ha a kedvező esetek számát elosztjuk az összes lehetséges esetek számával.

Az $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ valószínűségi mezőt geometriai valószínűségi mezőnek nevezzük, ha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és minden $A$ eseménynek létezik $n$ dimenziós térfogata, valamint az események valószínűsége egyenesen arányos az események $n$ dimenzós térfogatával.

Ha ezt az arányossági tényezőt $K$-val, az $A$ esemény $n$ dimenzós térfogatát $\mu(A)$-val jelöljük, akkor

$$P(A) = K\mu(A).$$

Speciálisan $A = \Omega$ esetén $1 = K\mu(\Omega)$ adódik, ahonnan $K = \frac{1}{\mu(\Omega)}$, ezért

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Tehát geometriai valószínűség esetén a valószínűséget úgy kapjuk meg, hogy a kedvező esetek térfogatát elosztjuk az összes eset térfogatával.

1. Egy pénzérmét addig dobunk, amíg fejet nem dobunk. Modellezzük ezt a kisérletet! Mekkora a valószínűsége, hogy 10-szer kellett feldobni a pénzérmét? Mekkora a valószínűsége, hogy sosem dobunk fejet?

2. Ketten megbeszélik, hogy délután 5 és 6 óra között találkoznak. Egymástól függetlenül véletlenszerűen érkeznek és 20 percet várnak egymásra. Mekkora a valószínűsége, hogy találkoznak?

3. A 32 lapos magyar kártya csomagból egyszerre húzunk 2 lapot. Mi a valószínűsége, hogy mindekettő piros?

4. Egy körben véletlenszerűen választunk egy húrt. Mi a valószínűsége, hogy a húr hossza a kör sugaránál nagyobb?

**Események függetlensége, feltételes valószínűség**

Definíció. Az $A$ és $B$ eseményeket függetlennek nevezzük, ha $P(AB) = P(A)P(B)$. Hétköznapi értelemben ez azt jelenti, hogy nincsenek egymásra befolyással, az egyik bekövetkezésének semmilyen hatása szincs a másikra.

*Példa.* Dobjunk fel egy kockát és egy 10 forintost. Mekkora a valószínűsége, hogy a kockával 6-ost, a pénzérmével fejet dobunk?

*Megoldás.* A kockával $\frac{1}{6}$ valószínűséggel dobunk 6-ost, az érmével $\frac{1}{2}$ valószínűséggel fejet. A két esemény egymástól független, ezért a keresett valószínűség $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$. Ha $P(B) > 0$, akkor definiálhatjuk az $A$ eseményen a $B$ eseményre vonatkoztatott feltételes valószínűséget, amit $P(A|B)$-vel jelölünk.

Definíció. $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$. Könnyen látható, hogy a feltételes valószínűségekre érvényesek a következő relációk:

$$0 \leq P(A|B) \leq 1$$

$$P(B|B) = 1$$

$$P(\sum A_i|B) = \sum_i P(A_i|B), \quad \text{ha } A_iA_j = \emptyset \;\; i \neq j \text{ esetén.}$$

$$P(A|B) = 1, \quad \text{ha } B \subset A$$

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A), \quad \text{ha } P(A) > 0,\; P(B) > 0.$$

Könnyen látható az is, hogy ha $A$ és $B$ pozitív valószínűségi események és függetlenek, akkor $P(A|B) = P(A)$.

*Példa.* Egy urnában 2 fehér és 4 fekete golyó van. Egymás után kihúzunk 2 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a második golyó fekete, feltéve, hogy az első fehér. Jelölje $A$ azt az eseményt, hogy az első fehér, $B$ pedig azt, hogy a második fekete. Keressük a $P(B|A)$ valószínűséget.

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(AB) = \frac{2 \cdot 4}{6 \cdot 5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}.$$

Tehát $P(B|A) = \dfrac{4}{15} \cdot \dfrac{3}{1} = \dfrac{4}{5}$.

*Példa.* Vizsgáljuk a kétgyermekes családokban a gyermekek nemének megoszlását! Ekkor az elemi események halmaza $\Omega = \{FF, FL, LF, LL\}$. Tekintsünk minden elemi eseményt egyformán valószínűnek, számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy egy kiválasztott kétgyermekes családban mindkét gyermek fiú, ha tudjuk, hogy van fiú a családban.

A: Mindkét gyermek fiú

B: Van fiú a családban.

Keressünk a $P(A|B)$ valószínűséget.

$P(AB) = P(A) = \dfrac{1}{4}$

$P(B) = \dfrac{3}{4}$

Tehát $P(A|B) = \dfrac{1}{3}$.

A feltételes valószínűség gyakorlati felhasználása többnyire nem abban áll, hogy $P(AB)$ és $P(B)$ alapján meghatározzuk $P(A|B)$ értékét, hanem általában fordítva alkalmazzuk. Vagy ismerjük a feltételes valószínűségeket, vagy feltételezhetünk róla kézenfekvő feltevéseket és ezáltal következtethetünk más események valószínűségeire. Az ilyen következtetésekhez a szorzási szabály, Bayes tétele és a teljes valószínűség tétele ad lehetőséget.

<u>Szorzási szabály tétele</u>. Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események, $P(A_1) > 0$, $P(A, A_2) > 0, \ldots P(A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}) > 0$, akkor

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1 \ldots A_{n-2}) \ldots P(A_2|A_1)P(A_1).$$

*Bizonyítás.* Ha $n = 1$, akkor a feltételes valószínűség definíciója segítségével

$$P(A_1A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1).$$

$n > 2$ esetén ezt lehet többször alkalmazni,

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1})P(A_1A_2 \ldots A_{n-1})$$

$$P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1 \ldots A_{n-2})P(A_1A_2 \ldots A_{n-2})$$

Ezt tovább folytatva jutunk a keresett állításhoz.

*Példa.* Egy akváriumban 12 díszhal van, 3 sárga, 4 pirosas, 5 fekete. Egymás után kihalászunk 4 halat. Mi a valószínűsége, hogy az első kettő sárga, a többi pedig fekete.

$A_1$: az első kihalászott sárga,

$A_2$: a második kihalászott sárga,

$A_3$: a harmadik fekete,

$A_4$: a negyedik fekete.

Keressük a $P(A_1A_2A_3A_4)$ valószínűséget. Tudjuk, hogy $P(A_1) = \frac{3}{12}$, $P(A_2|A_1) = \frac{2}{11}$

$$P(A_3|A_1A_2) = \frac{5}{10}, \quad P(A_4|A_1A_2A_3) = \frac{4}{9}.$$

Így a keresett valószínűség: $\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{99}$.

**Teljes valószínűség tétele:**

Legyenek $B_1, B_2, \ldots, B_n$ olyan események, amelyekre $i \neq j$ esetén $B_iB_j = \emptyset$, $\sum_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ és $P(B_i) > 0$. Ekkor tetszőleges $A$ eseményre

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

*Bizonyítás.* $P(A|B_i)P(B_i) = \frac{P(AB_i)}{P(B_i)}P(B_i) = P(AB_i)$. Mivel

$$AB_i \cdot AB_j = \emptyset \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n} AB_i = A\sum_{i=i}^{n} B_i = A\Omega = A,$$

ezért

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

Megjegyzés: Érvényes ez a tétel a következő formában is. Ha $B_1, B_2, \ldots$ események olyan sorozat, amelyre $B_iB_j = \emptyset$ $i \neq j$-re, $\sum_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$ és $P(B_i) > 0$, akkor $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)P(B_i)$.

## Valószínűségi változók, eloszlásfüggvény

Legyen adott egy $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ valószínűségi mező. Egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ leképezést valószínűségi változónak nevezzük, ha minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}.$$

Ekkor definiálhatjuk az $F : \mathbb{R} \to R$, $F(x) = P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\})$ függvényt, amit eloszlásfüggvénynek nevezünk. A jobboldalon álló valószínűséget a továbbiakban röviden $P(\xi < x)$-el jelöljük. Az eloszlásfüggvényről belátható, hogy

1) monoton növő

2) balról folytonos

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$

Ez a három tulajdonság jellemzi is az eloszlásfüggvényt, azaz, ha egy $F(x)$ teljesíti a fenti feltételeket, akkor létezik egy valószínűségi mező, egy rajta értelmezett valószínűségi változó úgy, hogy neki éppen $F(x)$ az eloszlásfüggvénye.

A valószínűségi változóknak 2 fő csoportjuk van: diszkrét, vagy folytonos. A $\xi$ valószínűségi változót diszkrétnek nevezzük, ha az értékkészletét sorozatként meg lehet adni. A $\xi$ valószínűségi változó folytonos, ha $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(s)ds$ alakban írható valamilyen $f(x)$ függvényre. $f(x)$-et sűrűségfüggvénynek szokás hívni.

## A diszkrét valószínűségi változók jellemzői

Legyen $\xi$ diszkrét valószínűségi változó, lehetséges értékei: $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Jelölje: $p_i = P(\xi = x_i)$. Ekkor szükségképpen $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Az $(x_i, p_i)$ számpárok sorozatát a valószínűségi változó eloszlásának nevezzük. Akkor mondjuk, hogy $\xi$-nek létezik a várható értéke, ha $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|p_i < \infty$. Az $M(\xi) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ értéket a valószínűségi változó várható értékének nevezzük. Ha $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i < \infty$, akkor azt mondjuk, hogy $\xi$-nek létezik a szórása. Ennek jelölése és definíciója:

$$D(\xi) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - M^2(\xi)}.$$

### Folytonos valószínűségi változók jellemzői

Folytonos valószínűségi változó eloszlásán az $f(x)$ sűrűségfüggvényét értjük. Azt mondjuk, hogy két valószínűségi változó ugyanazt az eloszlást követi, ha sűrűség függvényük megegyezik (majdnem minden pontban). Nyílvánvaló, hogy $F'(x) = f(x)$ minden olyan pontban, ahol $f(x)$ folytonos. Igaz az is, hogy

1) $f(x) \geq 0$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Ez a két tulajdonság jellemzi is a sűrűségfüggvényeket, azaz ha $f(x)$ teljesíti 1) és 2)-et, akkor $f(x)$ sűrűségvény3e valamilyen valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változónak. Akkor mondjuk, hogy $\int$-nek létezik a várható értéke, ha $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$. Ekkor $M(\xi) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ a várható érték. Ha $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx < \infty$, akkor $\int$-nek létezik a szórása, ennek definíciója:

$$D(\xi) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(\xi)}.$$

### Nevezetes eloszlások

*Diszkrét egyenletes eloszlás*

Egy $X$ valószínűségi változót diszkrét egyenletes eloszlásúnak nevezünk, ha értékkészlete véges

$$R_X = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

és minden értéket egyforma valószínűséggel vesz fel. Következésképpen

$$p_k = \frac{1}{n} \quad (k = 1, \ldots, n\}$$

Paraméterei: $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

Várható érték: $M(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$

Szórós négyzet: $D^2(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$

Példa: Ha $(\Omega, A, P)$ klasszikus valószínűsége mező, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan valószínűségi változó, amely kölcsönösen egyértelmű leképezést biztosít $\Omega$ és $R_X$ között, akkor $X$ diszkrét egyenletes eloszlást követ.

*Binomiális eloszlás*

Adott $n \in \mathbb{N}$ és $p \in (0,1)$ esetén az $X$ valószínűségi változót binomiális eloszlásúnak nevezünk, ha

$$R_X = \{0, 1, \ldots, n\}$$

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} (k = 0, 1, \ldots, n)$$

Paraméterei: $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$

Várható érték: $M(X) = np$

Szórás négyzet: $D^2(X) = np(1-p)$

Példa: A korábban vizsgált visszatevéses mintavétel esetén ha $X$ jelöli az $n$ kihúzás alatt a piros golyók számát és a piros golyó kihúzásának valószínűsége $p$, akkor $X$ binomiális eloszlást követ.

*Hipergeometrikus eloszlás*

Paraméterei: $N, m, n \in \mathbb{N}$, $m, n < N$. $X$ hipergeometrikus eloszlást követ, ha

$$R_X = \{0, 1, \ldots, n\}$$

$$P_k = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \{k = 0, 1, \ldots, n\}.$$

Várható érték: $M(X) = n\frac{m}{N}$

Szórás négyzet: $O(X) = n\frac{m}{N}\left(1 - \frac{m}{N}\right)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$

Példa: A visszatevés nélküli mintavétel esetén, ha $X$ jelöli az $n$- edik kihúzás után a piros golyók számát, akkor $x$ hipergeometrikus eloszlást követ.

*Geometriai eloszlás*:

Paramétere: $p \in (0,1)$

$X$ geometriai eloszlást követ, ha

$$R_X = N \quad \text{és} \quad p_k = P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Mivel a geometriai sor összegképlete alapján

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

és valóban eloszlás.

Várható érték: $M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = \frac{1}{p}$

Szórás négyzet: $D^2(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1}p = \frac{1-p}{p^2}$.

*Poisson-eloszlás*

Paramétere: $\lambda > 0$.

$X$ Poisson-leoszlású, ha

$$R_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

$$P_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Mivel $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$, ezért ez valóban eloszlás.

Várható érték: $M(X) = \lambda$

Szórás négyzet: $D^2(X) = \lambda$.

Ugyanis

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

$$D^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k-1} - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2 = e^{-\lambda} \Big( \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \Big) - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda} \Big( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \Big) - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda} \Big( \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \Big) - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda} \Big( \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \Big) - \lambda^2 = e^{-\lambda} (\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) - \lambda^2 = \lambda.$$

*Származtatása.* Tekintsük a binomiális eloszlás

$$p_{n,k} = \binom{n}{k} p_k (n-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

tagjait. Ha adott $k$ mellett $n \to \infty$ úgy, hogy $p \to 0$ és $np = \lambda > 0$ állandó, akkor

$$\lim_{n\to\infty} p_{n,k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

*A normális eloszlás.* Gyakran előforduló eloszlás. Egy valószínűségi változó normális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

ahol $m$ valós, $\sigma$ pedig pozitív állandó, az eloszlás paraméterei. Annak bizonyítása, hogy ez valóban sűrűségfüggvény nem triviális, maga az eloszlásfüggvény sem fejezhető ki elemi függvényekkel. Az $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}} ds$ azonosságban az $\dfrac{s-m}{\sigma} = n$ változót bevezetve látható, hogy

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Bevezetve a $\Phi(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ függvényt

$$F(x) = \Phi\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big)$$

alakban írható. Maga a $\Phi$ is eloszlásfüggvény az $m = 0$, $\sigma = 1$ paraméterértékekkel normális eloszlást követ, az úgynevezett standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye. A $\Phi$-nek az értékeit beépített számítógépes programok adják meg. Belátható, hogy $M(\xi) = m$, $D(\xi) = \sigma$ tetszőleg normális eloszlás esetén.

*Exponenciális eloszlkás.* Egyes, főleg véletlen időtartamokat jelölő $\xi$ valószínűségi változókra teljesül az a feltétel, hogy bármely $x$ időpontot választva is ki, ha a véletlen időtartam az $x$ ideig nem ért véget, akkor úgy tekinthető, mintha az egész folyamat az $x$ időpontban kezdődött volna. Matematikai formulával $P(\xi \geq x + y | \xi \geq x) = p(\xi \geq y)$, $x > 0$, $y > 0$. Ez ekvivalens a $P(\xi \geq x + y) = P(\xi \geq x)\ p(\xi \geq y)$ egyenlőséggel. Innen levezethető, hogy az ilyen eloszlás eloszlás függvénye

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha} \quad x > 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ahol $\lambda > 0$ állandó, az eloszlás paramétere. Ekkor a sűrűségfüggény

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha} \quad x > 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$

Ennek várható értéke és szórása is könnyen számítható:

$$M(\xi) = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(\xi) = \Big( \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} \Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

*Egyenletes eloszlás az* $(a, b)$ *intervallumon*

Legyen $-\infty < a < b < \infty$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha} \quad a < x < b \\ 0, & \text{ha} \quad x < a \quad \text{vagy} \quad x > b. \end{cases}$$

Ekkor

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1,$$

tehát ez sűrűségfüggvény. Ha $\xi$-nek ez a sűrűségfüggvénye, akkor $\xi$-ről azt mondjuk, hogy egyenletes eloszlást követ az $(a, b)$ intervallumon.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leq 0 \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha} \quad a < x \leq b \\ 1, & \text{ha} \quad b < x \end{cases}$$

$$M(\xi) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \Big[ \frac{x^2}{2} \Big]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$D^2(\xi) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \Big( \frac{a+b}{2} \Big)^2 = \frac{1}{b-a} \Big[ \frac{x^3}{3} \Big]_2^b - \Big( \frac{a+b}{2} \Big)^2 =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b}{4} =$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Tehát $D(\xi) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

## Írásbeli vizsgakérdések

Mit nevezünk sorozatnak?

Mikor mondunk egy sorozatot monoton növekedőnek?

Mikor mondunk egy sorozatot monoton csökkenőnek?

Mikor mondunk egy sorozatot monotonnak?

Mikor mondunk egy sorozatot felülről korlátosnak?

Mikor mondunk egy sorozatot alulról korlátosnak?

Mikor mondunk egy sorozatot korlátosnak?

Mikor mondunk egy sorozatot konvergensnek?

Milyen kapcsolat van egy sorozat korlátossága és konvergens volta között?

Milyen kapcsolat van egy sorozat korlátos és monoton volta és konvergens volta között?

Írjon le öt darab, egymástól független nevezetes sorozatot a határértékével együtt!

Egy sorozatnak hány darab határértéke lehet?

Hogyan számítjuk ki konvergens sorozatok összegének a határértékét?

Hogyan számítjuk ki konvergens sorozatok különbségének a határértékét?

Hogyan számítjuk ki konvergens sorozatok szorzatának a határértékét?

Hogyan számítjuk ki konvergens sorozatok hányadosának a határértékét?

Adja meg a Fibonacci számsorozat képzési szabályát!

Adja meg a Fibonacci számsorozat általános tagját!

Adja meg az egyenlőtlenségekre vonatkozó határátmeneti szabályokat!

Milyen kapcsolat van a korlátos és a konvergens sorozatok között?

Milyen kapcsolat van a monoton és a konvergens sorozatok között?

Milyen sorozatot nevezünk rekurzívnek?

Mikor mondjuk egy sorozatról, hogy divergens?

Mikor mondjuk egy sorozatról, hogy a plusz végtelenbe divergál?

Mikor mondjuk egy sorozatról, hogy a minusz végtelenbe divergál?

Mit nevezünk függvénynek?

Hogyan értelmezzük az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények hányadosát?

Hogyan értelmezzük az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények összegét?

Hogyan értelmezzük az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények szorzatát?

Hogyan értelmezzük az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények hányadosát?

Hogyan értelmezzük az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények hatványát?

Hogyan értelmezzük az $f$ és a $g$ függvények fog összetételét?

Hogyan definiáljuk az inverz függvényt?

Milyen függvényeknek létezik az inverze?

Hogyan értelmezzük az $f(x)$ függvény inverzét?

Hogyan értelmezzük az $f(x)$ $H$-ra való megszorítását?

Milyen függvényeket nevezünk elemi függvényeknek?

Mikor mondjuk az $f(x)$ függvényt monoton növekedőnek?

Mikor mondjuk az $f(x)$ függvényt monoton csökkenőnek?

Mikor mondjuk az $f(x)$ függvényt monotonnak?

Mikor mondjuk az $f(x)$ függvényt felülről korlátosnak?

Mikor mondjuk az $f(x)$ függvényt alulról korlátosnak?

Mikor mondjuk az $f(x)$ függvényt korlátosnak?

Mikor mondjuk, hogy az $f(x)$ függvénynek lokális helyi maximuma van $a$-ban?

Mikor mondjuk, hogy az $f(x)$ függvénynek lokális helyi minimuma van van $a$-ban?

Mikor mondjuk, hogy az $f(x)$ függvénynek szélsőértéke van $a$-ban?

Mikor mondjuk az $f(x)$ függvényt periódikusnak?

Mikor mondjuk az $f(x)$ függvényt párosnak?

Mikor mondjuk az $f(x)$ függvényt páratlannak?

Mikor mondjuk az f(x) függvényt konvexnek?

Mikor mondjuk az $f(x)$ függvényt konkávnak?

Mikor nevezzük az értelmezési tartomány egy pontját torlódási pontnak?

Mit jelent az, hogy egy függvénynek egy véges helyen létezik a határértéke?

Mit jelent az, hogy egy függvénynek egy véges helyen létezik a jobboldali határértéke?

Mit jelent az, hogy egy függvénynek egy véges helyen létezik a baloldali határértéke?

Mit jelent az, hogy az $f(x)$ függvénynek $a$-ban a tágabb értelemben vett határértéke a plusz végtelen?

Mit jelent az, hogy az $f(x)$ függvénynek $a$-ban a tágabb értelemben vett határértéke a mínusz végtelen?

Mit jelent az, hogy az $f(x)$ függvénynek $a$-ban a tágabb értelemben vett jobboldali határértéke a plusz végtelen?

Mit jelent az, hogy az $f(x)$ függvénynek $a$-ban a tágabb értelemben vett baloldali határértéke a plusz végtelen?

Mit jelent az, hogy az $f(x)$ függvénynek $a$-ban a tágabb értelemben vett jobboldali határértéke a minusz végtelen?

Mit jelent az, hogy az $f(x)$ függvénynek $a$-ban a tágabb értelemben vett baloldali határértéke a minusz végtelen?

Mit jelent az, hogy egy függvénynek plusz végtelenben létezik a határértéke?

Mit jelent az, hogy egy függvénynek plusz végtelenben plusz végtelen a határértéke?

Mit jelent az, hogy egy függvénynek plusz végtelenben mínusz végtelen a határértéke?

Mit jelent az, hogy egy függvénynek mínusz végtelenben létezik a határértéke?

Mit jelent az, hogy egy függvénynek mínusz végtelenben mínusz végtelen a határértéke?

Mit jelent az, hogy egy függvénynek mínusz végtelenben plusz végtelen a határértéke?

Mikor nevezünk egy függvényt egy adott helyen folytonosnak?

Mikor nevezzük az $f(x)$ függvényt folytonosnak egy $H$ halmazon?

Mikor nevezzük az $f(x)$ függvényt folytonosnak?

Adjon meg három darab, függvényekre vonatkozó, egymástól független nevezetes határértéket a határértékükkel együtt!

Mikor nevezzük az $f(x)$ függvényt differenciálhatónak az $a$ helyen?

Mikor nevezzük az $f(x)$ függvényt differenciálhatónak a $H$ halmazon?

Mikor nevezzük az $f(x)$ függvényt differenciálhatónak?

Adjon meg öt darab egymástól független elemi függvényt a differenciálhányados függvényével együtt!

Mikor nevezzük az $f(x)$ függvényt differenciálhatónak a $H$ halmazon?

Hogyan differenciáljuk egy függvény konstans szorosát?

Hogyan differenciáljuk két függvény összegét?

Hogyan differenciáljuk két függvény konstans szorosát?

Hogyan differenciáljuk két függvény hányadosát?

Hogyan differenciáljuk az összetett függvényt?

Hogyan differenciáljuk az inverz függvényt?

Zárt intervallumon folytonos függvények van-e legnagyobb értéke?

Zárt intervallumon folytonos függvények van-e legkisebb értéke?

Nyilt intervallumon folytonos függvények van-e legnagyobb értéke?

Nyilt intervallumon folytonos függvények van-e legkisebb értéke?

Zárt intervallumon folytonos függvények értékkészletének két különböző pontja között

Milyen értékeket vesz fel?

Mondja ki a Rolle-féle középértéktételt!

Mondja ki a Lagarnge-féle középértéktételt!

Mondja ki a Cauchy-féle középértéktételt!

Milyen kapcsolat van egy függvény differenciálhatósága és folytonossága között?

Hogyan jellemzi egy függvény monoton növekedését a differenciálhányados segítségével?

Hogyan jellemzi egy függvény monoton csökkenését a differenciálhányados segítségével?

Milyen elegendő feltételeket ismer a lokális helyi maximum létezésére az első differenciálhányados segítségével?

Milyen elegendő feltételeket ismer a lokális helyi minimum létezésére az első differenciálhányados segítségével?

Milyen szükséges feltételeket ismer a lokális helyi maximum létezésére az első differenciálhányados segítségével?

Milyen szükséges feltételeket ismer a lokális helyi minimum létezésére az első differenciálhányados segítségével?

Milyen szükséges feltételeket ismer a lokális helyi maximum létezésére a második differenciálhányados segítségével?

Milyen szükséges feltételeket ismer a lokális helyi minimum létezésére a második differenciálhányados segítségével?

Hogyan szól a L'Hospital szabály?

Hogyan olvasható le egy függvény konvexsége a második differenciálhányadosból?

Hogyan olvasható le egy függvény konkávsága a második differenciálhányadosból?

Hogyan jelöljük a végtelen sort?

Mikor nevezünk egy végtelen sort konvergensnek?

Adja meg a geometriai sort?

Mikor konvergens a geometriai sor?

Adja meg a hatványsor általános alakját!

Hogyan számítjuk ki egy hatványsor konvergencia sugarát?

Mit tud állitani a hatványsor differenciálhatóságáról?

Mit nevezünk az $f(x)$ függvény $a$-hoz tartozó Taylor polinomjának?

Mit nevezünk az $f(x)$ függvény $a$-hoz tartozó Taylor sorának?

Mit nevezünk az $f(x)$ függvény MacLauren sorának?

Irja fel az exponenciális függvény MacLauren sorát!

Irja fel a $\sin(x)$ függvény MacLauren sorát!

Irja fel a $\cos(x)$ függvény MacLauren sorát!

Irja fel a $\log(1+x)$ függvény MacLauren sorát!

Mit nevezünk primitív függvénynek?

Mit nevezünk határozatlan integrálnak?

Hogyan integrálunk parciálisan?

Hogyan integrálunk helyettesítéssel?

Adja meg a szétválasztható tipusú differenciálegyenlet általános alakját!

Mi a határozott integrál szemléletes jelentése?

Hogyan változik a határozott integrál értéke a határok felcserélésével?

Miért mondjuk a határozott integrált intervallum additívnak?

Milyen egyenlötlenségeket ismer a határozott integrálra?

Hogyan szól az integrál középérték tétele?

Mit nevezünk $f(x)$ integrálfüggvényének?

Milyen állítás igaz az integrál függvény folytonosságára?

Milyen állítás igaz az integrál függvény differrenciálhatóságára?

Hogyan szól a Newton-Leibniz formula?

Hogyan definiáljuk az impropius integrált nem korlátos intervallumon?

Hogyan definiáljuk nem korlátos függvény impropius integrálját véges intervallumon?

Adjon meg 5 db alapintegrált!

Hogyan néz ki egy komplex szám algebrai alakja?

Mit nevezünk egy komplex szám valós részének?

Mit nevezünk egy komplex szám képzetes részének?

Hogyan néz ki egy komplex szám geometriai alakja?

Mit nevezünk egy komplex szám konjugáltjának?

Mit nevezünk egy komplex szám abszolút értékének?

Mit nevezünk egy komplex szám argumentumának?

Írja le a lineáris tér alaptulajdonságait?

Mondjon 5 db példát lineáris térre!

Milyen elemeket nevezünk lineárisan függőeknek?

Milyen elemeket nevezünk lineárisan függetleneknek?

Mikor mondjuk egy lineáris térről, hogy n dimenziós?

Mikor mondjuk egy lineáris térről, hogy végtelen dimenziós?

Milyen mátrixokat lehet összeszorozni?

Milyen mátrixokat lehet összeadni?

Milyen tulajdonságai vannak a mátrixszorzásnak?

Milyen tulajdonságokkal rendelkezik az összeadás a mátrixok körében?

Mikor mondunk egy többváltozós skaláris függvényt parciálisan differenciálhatónak egy pontban?

Hogyan jelöli egy kétváltozós függvény másodrendű parciális differenciálhányadosait? Sorolja fel az összeset!

Mikor mondjuk, hogy egy többváltozós skaláris függvénynek lokális maximuma van egy pontban?

Mikor mondjuk, hogy egy többváltozós skaláris függvénynek lokális minimuma van egy pontban?

Mikor mondjuk, hogy egy többváltozós skaláris függvénynek szélsőértéke van egy pontban?

Mi a szélsőérték létezésének a szükséges feltétele?

Milyen segédfüggvényt alkotunk a differenciálhányadosból a szélsőérték vizsgálatakor?

Hogyan dönti el a segédfüggvény segítségével a szélsőérték milyenségét?

Mit nevezünk valószínűségi kisérletnek?

Mit nevezünk eseménynek?

Mit értünk két esemény összegén?

Mit értünk két esemény szorzatán?

Mit értünk egy esemény ellentett eseményén?

Mit nevezünk biztos eseménynek?

Mit nevezünk lehetetlen eseménynek?

Mikor mondjuk, hogy egy esemény bekövetkezése maga után vonja egy másik bekövetkezését?

Mit nevezünk gyakoriságnak?

Mit nevezünk relatív gyakoriságnak?

Mi a valószínűségi mező absztrakt jelölése, az elemeinek az elnevezése és kapcsolatuk egymással?

Milyen alaptulajdonságai vannak az elemi események halmazának?

Milyen alaptulajdonságai vannak az eseményeknek?

Milyen alaptulajdonságokkal rendelkezik a valószínűség?

Hogyan számítja ki az ellentett esemény valószínűségét?

Mekkora a lehetetlen esemény valószínűsége?

Mit nevezünk teljes eseményrendszernek?

Milyen kapcsolat van két esemény valószínűsége között, ha az egyik bekövetkezése maga után vonja a másik bekövetkezését?

Hogyan számítja ki két esemény összegének a valószínűségét?

Milyen tipusú valószínűségi mezőket ismer?

Mikor nevezünk egy valószínűségi mezőt klasszikusnak?

Hogyan szól az egyenletességi hipotézis?

Hogyan számítja ki egy esemény valószínűségét klasszikus valószínűségi mezőben?

Hogyan számítja ki egy esemény valószínűségét geometriai valószínűségi mezőben?

Mikor nevezünk két eseményt függetlennek?

Mi a feltételes valószínűség definíciója?

Hogyan szól a teljes valószínűség tétele?

Mit nevezünk valószínűségi változónak?

Mit nevezünk eloszlásfüggvénynek?

Mit nevezünk sűrűségfüggvénynek?

Mit nevezünk eloszlásnak?

Milyen tulajdonságok jellemzik az eloszlásfüggvényt?

Milyen tulajdonságok jellemzik a sűrűségfüggvényt?

Soroljon fel ötöt az ön által ismert nevezetes eloszlások közül!

Mit értünk várható értéken?

Mit értünk szóráson?

Definiálja a diszkrét egyenletes eloszlást és mondjon rá példát!

Adja meg a diszkrét egyenletes eloszlás várható értékét és szórását!

Definiálja a binomiális eloszlást és mondjon rá példát!

Adja meg a binomiális eloszlás várható értékét és szórását!

Definiálja a geometriai eloszlást és mondjon rá példát!

Adja meg a geometriai eloszlás várható értékét és szórását!

Definiálja a Poisson eloszlást! Hogyan lehet származtatni?

Adja meg a Poisson eloszlás várható értékét és szórását!

Definiálja a normális eloszlást!

Adja meg a normális eloszlás várható értékét és szórását!

Definiálja az exponenciális eloszlást!

Adja meg az exponenciális eloszlás várható értékét és szórását!

Definiálja az egyenletes eloszlást!

Adja meg az egyenletes eloszlás várható értékét és szórását!

## Szóbeli vizsgakérdések

Sorozatok tulajdonságai, határértéke.

Sorozatok határátmeneti szabályai és a határérték tulajdonságai.

Nevezetes határértékek sirozatokra.

A Fibonacci-féle számsorozat.

A tágabb értelembem vett határérték.

Függvényműveletek.

Függvények tulajdonságai.

Függvények határértéke, tágabb értelembem vett határérték.

A differenciálhányados fogalma és szemléletes jelentése.

A differenciálhányados műveleti szabályai, az elemi függvények differenciálhányadosa.

A folytonos függvények tulajdonságai.

A differenciálható függvények tulajdonságai.

Végtelen sorfogalma és konvergenciája. A geometriai sor.

Hatványsorok, Taylor sor.

Határozatlan integrálás.

Integrálási szabályok.

A szétválasztható tipusú differenciálegyenletek.

A határozott integrál fogalma és szemléletes jelentése.

A határozott integrál tulajdonságai.

Az integrálfüggvény és tulajdonságai.

Impropius integrál.

Komplex számok algebrai és geometriai alakja.

Múveletek komplex számok körében.

A lineáris tér fogalma, példák lineáris terekre.

Lineáris függőség, függetlenség, bázis, dimenzió.

Műveletek a mátrixok körében.

A parciális differenciálhányados.

A többváltozós függvények szélsőérték számítása.

A valószínűségszámítás alapfogalmai.

Valószínűségi mező és axiómái.

Az axiómák további tulajdonságai.

A valószínűségi mezők tipusai.

Események függetlensége, feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele.

Valószínűségi változók, eloszlás és sürüségfüggvény.

Várható érték és szórás, eloszlásfogalma.

A nevezetesebb diszkrét eloszlások.

A nevezetesebb folytonos eloszlások.