Gyakorló feladatok a Pénzügyi matek kurzushoz

1. Kamatszámítás, diszkontálás

1.1. Betesszünk a bankba 1 millió forint. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre egyszerű kamatozás; kamatos kamatozás félévenkénti újratőkésítéssel; illetve folytonos kamatozás esetén.

a. Írjuk fel formulával, hogy mennyi pénzünk lesz a $t \geq 0$ időpontban, ha az éves kamatláb $i = 4\%$. Mennyi idő alatt gyarapodik a pénzünk 50%-kal?

b. Milyen éves kamatlábra van szükség ahhoz, hogy a pénzünk 5 év alatt 50%-kal növekedjen? (A kamatszámítási módszerek különböző kamatlábat igényelnek.)

1.2. Mi egy vállalat vagyunk, és egy új üzemet tervezünk építeni. Most az első év elején állunk, és a mai napon be kellene fektetnünk 10 millió forintot. A 2. év elején az üzem már hozna 2 millió forint hasznot. Ezek után egy év múlva további 5 millió forintot kellene befektetnünk. A 4. és az 5. év elején az üzem 10 millió forint hasznot hozna majd. Határozza meg a fenti pénzáramlások jelenértékét. Ezek alapján megéri belevágni ebbe a beruházásba? (A kockázatmentes befektetések éves szinten 5% kamatot ígérnek, számoljunk évenkénti újratőkésítéssel.)

1.3. 20 év múlva szeretnék nyugdíjba vonulni, ezért kéthavonta félreteszek egy rögzített összeget a fizetésemből. A pénzt egy olyan bankszámlára rakom, mely hosszú távon is stabil 6% éves kamatot fizet kéthavi újratőkésítéssel. Nyugdíjasként kéthavonta 150 ezer forintot szeretnék felvenni, és úgy tervezem, hogy örökké élek. Mekkora összeget kell kéthavonta befizetnem?

1.4. Tegyük fel, hogy a FED államkötvényt bocsájt ki 1000 dollár névértékkel és többfajta lejárati idővel. A lejárati idők 1, 2, 3 illetve 5 év. A kamatot egy összegben, a lejáratkor fizetik ki. A kötvényekre kiírt kamatláb eltérő az egyes lejárati idők esetén, ez megtalálható az alábbi táblázatban. A kötvényeket nem a névértéken lehet megvásárolni, a kibocsájtási ár szintén szerepel a táblázatban.

a. Határozzuk meg a lejáratig számított hozamot mindegyik lejárati idő esetén. Ezek alapján vázlatosan ábrázoljuk a hozamgörbét.

b. A táblázat utolsó oszlopa egy pénzáramot tartalmaz. (Például egy év múlva ki kell fizetnünk 10 ezer dollárt, de két év múlva lesz 15 ezer dollár bevételünk.) Határozzuk meg ennek a cash flownak a jelenértékét. A diszkontálás során használjuk az a. feladatrészben kapott hozamgörbét.

Év	Éves kamatláb	Kibocsájtási ár ($)	Cash flow ($)
1	2%	1000	-10.000
2	2,5%	950	15.000
3	3,5%	1100	-5000
5	4,5%	1050	20.000

1.5. Tekintsünk egy kötvényt B_0 névértékkel és T év lejárati idővel. (T pozitív egész szám.) A kötvény évente fizet kamatot, és a kötvényre kiírt éves kamatlábat jelölje i. Határozzuk meg a kötvény jelenértékét. A diszkontálás során a kockázatmentes kamatláb legyen szintén i, és számoljunk évenkénti újratőkésítéssel.

a. Mutassuk meg, hogy ebben az esetben $\mathrm{PV} = B_0$.

b. Ha a piacon ezt a kötvényt pontosan a B_0 áron lehet megvásárolni, akkor mennyi a lejáratig számított hozam? Ehhez viszonyítva hogyan változik a lejáratig számított hozam, ha a piaci ár a névérték alatt illetve felett van?

2. A tőzsde működése, mean-variance portfolióanalízis

2.1. Egy tőzsdén egy adott részvény esetében az alábbi ajánlatokat szerepelnek az order bookban (ár/mennyiség):

Vételi ajánlatok: 45/10, 44/20, 43/5; eladási ajánlatok: 47/10, 48/5, 49/20.

Mi történik, ha egy kereskedő az alábbi ajánlatokat jegyzi be a könyvbe?

a. Eladási ajánlat: 44/30.

b. Vételi ajánlat: 48/20.

2.2. Adott egy kötvény és egy részvény, mindkettőnek 2000 forint a jelenlegi ára. A kötvény 8%-os éves hozamot fizet. A részvény egy év múlva 1900, 2300 vagy 2700 forintot érhet rendre 0,3, 0,5 és 0,2 valószínűségekkel. 3 millió forint áll a rendelkezésünkre, ebből állítunk össze egy portfóliót.

a. Jelölje S_1 és B_1 a részvény illetve a könyvény értékét 1 év múlva. Adjuk meg a két véletlen változó eloszlását, várható értékét és szórását.

b. Ha a darab részvényt vásárolunk, akkor ez az értékpapírcsomag várhatóan mennyit fog majd érni egy év múlva? Mennyi a portfólió értékének a szórása? Ábrázoljuk a várható értéket és a szórást az a mennyiség függvényében.

c. Hogyan állítsuk össze a portfoliónkat, ha az a célunk, hogy várható értékben 400 ezer forint hozamot realizáljunk?

d. Hány darab részvényt vásároljunk, ha azt szeretnénk, hogy a portfólió jövőbeli értékének a szórása legfeljebb 200 ezer forint legyen? Mennyi ebben az esetben a hozam várható értéke?

2.3. Adott két részvény, mindkettőt 1000 forintos áron lehet megvásárolni a mai napon. Egy év múlva a két részvény értékének várható értéke 1200 illetve 1300 forint, a részvények értékenek szórása 200 illetve 300 forint, az értékek közötti korrelációs együttható $-0{,}2$. 50 ezer forintból állítunk össze egy portfoliót.

a. Jelölje a azt, hogy hány darabot vásárolunk az első részvényből. Írjuk fel formulával majd ábrázoljuk koodináta-rendszerben, hogy hogyan függ a portfoliónk jövőbeli értékének várható értéke és szórása az a paramétertől! Határozzuk meg a várható értéket arra a két portfolióra, mikor a pénzünket teljes mértékben az első illetve a második részvénybe fektetjük be. Mely a mellett lesz a portfoliónk értékének a szórása minimális?

b. Vázlatosan ábrázoljuk az elérhető portfoliókat a várható érték és a szórás által meghatározott koordináta-rendszerben. Külön tüntessük fel az előző pontban meghatározott három portfiloót! Jelöljük be az ábrán a portfolió határt (portfolio frontier) és a hatékony portfolió határt (efficient portfolio frontier).

c. Tegyük fel, hogy a piacon kötvényt is vásárolhatunk 1000 forintos névértéken kockázatmentes 10%-os hozammal. Ábrázolja az előző pont koordinátarendszerében azokat a portfoliókat, melyeket a kötvény és az első részvény felhasználásával állíthat össze. Mennyi a meredeksége az így kapott egyenesnek, és hogyan értelmezhető ez a meredekség?

d. Vázlatosan ábrázolja az előző pont grafikonján a tőkepiaci egyenest és a piaci portfoliót.

3. Származékos termékek

3.1. Egy termelő vállalat vagyunk, és szeptember 15-én meg kell vásárolnunk egy bizonyos alapanyagot spot áron. Vásárolunk future-t szeptember 15. lejárati nappal ugyanerre az alapanyagra 10 dolláros áron. Összességében mennyibe kerül nekünk az alapanyag, ha szeptember 25-én a spot ár 12 dollár? És ha 8 dollár?

3.2. Egy almatermelő gazdaság vagyunk, és szerződésben állunk egy feldolgozó üzemmel. A szerződés értelmében 3 hónap múlva le kell szállítanunk 100 tonna almát, melyért ők spot áron fizetnek. Mi viszont a kockázat kiküszöbölése érdekében szeretnénk az árat előre rögzíteni mondjuk 100 egység/tonna áron. Az élő szerződésünk erre nem ad lehetőséget, de lehetőségünk van forward szerződéseket kötni.

a. Mit tegyünk?

b. Tegyük fel, hogy 3 hónap múlva a spot ár 95 egység/tonna. Írja le részletesen, hogy mi történik ebben az esetben.

3.3. Adott egy piac, melyen két eszközzel lehet kereskedni, egy részvénnyel és egy kötvénnyel. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy kereskedni mindig csak az év legelső napján tudunk, a többi napon csak ülünk a portfóliónkon. Most a 0. év első napján vagyunk, és mindkét eszköznek 100 a spot ára. A kötvény évente 5% kamatot fizet, a részvény ára pedig vagy 10%-kal nő, vagy pedig 20%-kal csökken egy év alatt a korábbi évektől függetlenül.

a. Van a piacon arbitrázslehetőség?

b. Forward szerződést szeretnénk kötni a részvényre 1 év lejárati idővel. Mennyi az arbitrázsmentes kötési ár?

c. Tekintsünk egy európai put opciót 1 év lejárati idő és $K=95$ kötési ár mellett! Adjuk meg az opció arbitrázsmentes árát és a fedezeti portfóliót! Tegyük fel, hogy a piacon $C=5$ ennek az opciónak az ára! Mit tegyünk?

d. Tekintsünk egy európai call opciót 2 év lejárati idővel és $K=100$ kötési ár mellett! Adjuk meg az opció arbitrázsmentes árát!

3.4. Ábrázolja az alábbi kombinált opciók kifizetési függvényét. Milyen várakozásaik vannak a részvény lejáratkori árára nézve azon befektetőknek, akik ilyen kombinált opciókat tartanak? (Minden opció azonos T lejárati időre vonatkozik.)

a. Bull spread: egy darab európai call opció vétele K_1 kötési áron és egy darab európai vételi opció eladása K_2 kötési áron, ahol $K_1 < K_2$.

b. Bear spread: ugyanaz, mint a bull spread, csak éppen $K_1 > K_2$.

c. Straddle: egy darab európai call opció és egy darab európai put opció vétele azonos K kötési árral.

3.5. Tekintsünk két származékos terméket azonos T lejárati időre rendre F_1 és F_2 kifizetési függvénnyel. Tegyük fel, hogy mindkét termékre tudunk fedezeti portfoliót konstruálni, és jelölje C_1 és C_2 a két termék arbitrázsmentes árát. Bizonyítsuk be a következő állításokat.

a. Ha $F_1 \leq F_2$ m.b., akkor $C_1 \leq C_2$.

b. Ha $F_1 = F_2$ m.b., akkor $C_1 = C_2$.