LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

Az egész jegyzet során $\mathbb{K}$ végig egy tetszőlegesen rögzített **test**et jelöl.

Testek

Testek a racionális számok $+, -, \cdot, /$ műveleteinek alaptulajdonságait teljesítő algebrai struktúrák. Tehát $\mathbb{K}$-nak van két kitüntetett eleme, amelyeket mindig 0-val és 1-gyel fogunk jelölni. Ezek neve szokásosan: a $\mathbb{K}$-beli **nulla**-elem (**zéró**-elem) ill. **egység**-elem. $\mathbb{K}$ el van látva egy $+, -, \cdot$ művelehármassal (nevük szokásosan **összeadás, kivonás, szorzás**), $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ pedig még egy / művelettel is (szokásos neve **osztás**). Ezek a következő axiómákat teljesítik:

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad , \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \qquad & (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}) \\
\alpha + 0 = \alpha \quad , \quad \alpha - \alpha = 0 \qquad & (\alpha \in \mathbb{K}) \\
\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \quad , \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \qquad & (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}) \\
\alpha \cdot 1 = \alpha \quad , \quad \alpha / \alpha = 1 \qquad & (0 \neq \alpha \in \mathbb{K}) \\
\varepsilon \cdot (\alpha + \beta) = (\varepsilon \cdot \alpha) + (\varepsilon \cdot \beta) \qquad & (\varepsilon, \alpha, \beta \in \mathbb{K}) \ .
\end{aligned}$$

Általánosan is használni fogjuk a racionális algebra jól-ismert jelölési konvencióit: elhagyjuk a szorzáspontot és automatikus preferenciát biztosítunk a multiplikatív (szorzó-osztó) műveleteknek az additívakkal (összeadás-kivonás) szemben.

Példa. 1) $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ a **valós számok** teste a szokásos $+, \cdot$ összeadással és szorzással. Az olvasó számára ez lehet szinte mindig a szemléltető példa.

2) $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ a **komplex számok** teste. Ez kiterjesztése $\mathbb{R}$-nek. Látni fogjuk, hogy sok $\mathbb{R}$-ből származó problémát egyszerűbben tárgyalhatunk a $\mathbb{C}$-beli "ideális" elemekkel.

3) $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ a **racionális számok** teste. Ez része $\mathbb{R}$-nek. Mind elméleti, mind numerikus megfontolásoknál célszerű lehet tudni, hogy egyes eredmények *pontosan* előállíthatók egész számok hányadosaként.

4) $\mathbb{K} := \mathbb{Z}_p$ a **modulo-p számtest**. Itt p egy adott **prímszám**,

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}_p := \{0, 1, \ldots, p-1\} \\ &n \overset{p}{+} m := [n + m \text{ maradéka mod-}p] \\ &n \overset{p}{\cdot} m := [nm \text{ maradéka mod-}p] \end{aligned}$$

a $+$, $\cdot$ műveletek pedig a $\overset{p}{+}$, $\overset{p}{\cdot}$ **maradékos** összeadás ill. szorzás. Sok számelméleti kérdést lehet a véges $\mathbb{Z}_p$ testek segítségével tárgyalni.

Alapprobléma

Valamely $n, m \in \mathbb{N}$ mellett adottak az

$$a_{ij}, b_i \in \mathbb{K} \qquad (i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$$

számok. Keresendők mindazok az

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

szám-n-esek, amelyek teljesítik az

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \tag{$*$}$$

egyenletrendszert.

Kérdés. Hogyan állapítható meg, hogy van-e egyáltalán ilyen $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ megoldás, és ha van, hogyan számíthatók ki az összes megoldások?

Átfogalmazások.

1) Hasonlóan, mint $\mathbb{R}^n$-ben, bevezethetjük $\mathbb{K}^n$-ben is az

$$\langle (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n) \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

skalárszorzatot. Most az $a'_i := (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ sorvektoraival az egyenletrendszernek és a megoldás $x := (x_1, \ldots, x_n)$ vektorával $(*)$ a

$$\left.\begin{aligned} \langle a'_1, x\rangle &= b_1 \\ &\vdots \\ \langle a'_m, x\rangle &= b_m \end{aligned}\right\}$$

relációkkal ekvivalens. Az $\mathbb{R}^n$ térben az $\big\{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle a, x\rangle = b\big\}$ alakzat egy sík. Így a $(*)$ rendszer megoldásait m sík metszetének pontjai adják.

2) Oszlopva irva $\mathbb{K}^m$ elemeit, azaz bevezetve az

$$a_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad (j = 1, \ldots, n) \ , \qquad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

jelöléseket, másrészt $\mathbb{K}^m$ elemeit szokásosan $\{1, \ldots, m\} \to \mathbb{K}$ függvényekként felfogva*

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b$$

alakban írható fel a $(*)$ alapegyenletrendszerünk.

3) Tovább folytatva geometriai irányban az előbbi gondolatmenetet, vezessük be az

$$\begin{aligned} A : \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^m \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\mapsto x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \end{aligned}$$

leképezést. Így az alapegyenletrendszerünk az

$$A(x) = b$$

alakot ölti. Ezzel a probléma úgy szemlélhető, hogy keresendők azok a pontok, amelyeket egy bizonyos fajta leképezés egy adott (a $b \in \mathbb{K}^m$) pontba visz.

---

* Így b az 1-hez b_1-et, 2-höz b_2-t, …, m-hez b_m-et rendelő függvény, $x_j a_j$ pedig mint a_j-nek az x_j-szerese az $\big(i \mapsto x_j a_{ij} : \ i = 1, \ldots, m\big)$ függvény.

Gauss elimináció

A $(*)$ egyenletrendszer talán legegyszerűbb szisztematikus megoldási módja a **Gauss elimináció**, amit alább ismertetünk.

Tekintsük a $(*)$ rendszer első sorát. Ez

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \ .$$

Ha itt az összes együtthatókra $a_{1j} = 0$, akkor $b_1 \neq 0$ esetén nincs megoldása $(*)$-nak, $b_1 = 0$-nál pedig az egyenletünk semmitmondó $(0 = 0)$, azaz $(*)$-ból törölhetjük. Eltekintve ezektől az extrém esetektől, vehető tehát, hogy $\exists\ j\ a_{1j} \neq 0$. Átszámozva az indexeket, vehető (az általánosság megszorítása nélkül) az is, hogy a legelső együtthatóra

$$a_{11} \neq 0 \ .$$

Vonjuk ki most az első egyenlet a_{i1}/a_{11}-szeresét az i-edik egyenletből $i = 2, \ldots, m$-re. Ezzel a megoldások halmazát nem változtatjuk, de egy olyan

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_{m1}^{(1)}x_1 + a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{array}\right\} \qquad (*^1)$$

egyenletrendszert kapunk, amelyben 0 áll az első oszlopban a bal felső sarokban levő $a_{11}^{(1)}$ kivételével:

$$\begin{array}{rrcl} a_{11}^{(1)}x_1 + & a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\ & a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(1)}x_n & = & b_3^{(1)} \\ & a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{4n}^{(1)}x_n & = & b_4^{(1)} \\ & \vdots & & \vdots \\ & a_{m2}^{(1)}x_2 + a_{m3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n & = & b_m^{(1)} \end{array} \ .$$

Itt természetesen $b_1^{(1)} = b_1$, $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}$ és $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j}a_{i1}/a_{11}$ ill. $b_i^{(1)} = b_i - b_1 a_{i1}/a_{11}$ minden $1 \le j \le n$ és $2 \le i \le m$ indexre.

A második lépésben ugyanezt tesszük, de csak a második sortól kezdve. Vegyük észre, hogy a második sor most

$$a_{22}^{(1)}x_1 + a_{23}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}$$

alakú, mivel $a_{21}^{(1)} = 0$. Sőt az utána következő sorok is mind x_2-től kezdődnek. Így a második lépésben már olyan

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(2)} x_j = b_i^{(2)} \qquad (i = 1, \dots, m) \tag{$*^2$}$$

egyenletrendszerhez jutunk, amelynek alakja

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{11}^{(2)}x_1+ & a_{12}^{(2)}x_2+ & a_{13}^{(2)}x_3+ & a_{14}^{(2)}x_4 & +\cdots & +a_{1n}^{(2)}x_n & = & b_1^{(2)} \\
 & a_{22}^{(2)}x_2+ & a_{23}^{(2)}x_3+ & a_{24}^{(2)}x_4 & +\cdots & +a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\
 & & a_{33}^{(2)}x_3+ & a_{34}^{(2)}x_4 & +\cdots & +a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\
 & & a_{43}^{(2)}x_3+ & a_{44}^{(2)}x_4 & +\cdots & +a_{4n}^{(2)}x_n & = & b_4^{(2)} \\
 & & a_{53}^{(2)}x_3+ & a_{54}^{(2)}x_4 & +\cdots & +a_{5n}^{(2)}x_n & = & b_5^{(2)} \\
 & & \vdots & & & & \vdots & \\
 & & a_{m3}^{(2)}x_3+ & a_{m4}^{(2)}x_4 & +\cdots & +a_{mn}^{(2)}x_n & = & b_m^{(2)}
\end{array} .$$

A 3-ik lépésben az első lépés analogonját már a 3-ik sor 3-ik elemétől kezdve hajthatjuk végre, és ezzel

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{11}^{(3)}x_1+ & a_{12}^{(3)}x_2+ & a_{13}^{(3)}x_3+ & a_{14}^{(3)}x_4 & +\cdots & +a_{1n}^{(3)}x_n & = & b_1^{(3)} \\
 & a_{22}^{(3)}x_2+ & a_{23}^{(3)}x_3+ & a_{24}^{(3)}x_4 & +\cdots & +a_{2n}^{(3)}x_n & = & b_2^{(3)} \\
 & & a_{33}^{(3)}x_3+ & a_{34}^{(3)}x_4 & +\cdots & +a_{3n}^{(3)}x_n & = & b_3^{(3)} \\
 & & & a_{44}^{(3)}x_4 & +\cdots & +a_{4n}^{(3)}x_n & = & b_4^{(3)} \\
 & & & a_{54}^{(3)}x_4 & +\cdots & +a_{5n}^{(3)}x_n & = & b_5^{(3)} \\
 & & & \vdots & & & \vdots & \\
 & & & a_{m4}^{(3)}x_4 & +\cdots & +a_{mn}^{(3)}x_n & = & b_m^{(3)}
\end{array}$$

típusú egyenletekhez jutunk. Ilyen módon folytatva $\min\{n, m\}$ lépést tehetünk meg:

1) Ha $m \geq n$, akkor az n-ik lépésben olyan

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(n)} x_j = b_i^{(n)} \qquad (i = 1, \dots, m) \tag{$*^n$}$$

egyenletrendszert kapunk, ahol az

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11}^{(n)}x_1 & & & & \\
 & a_{22}^{(n)}x_2 & & & \\
 & & a_{33}^{(n)}x_3 & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & a_{nn}^{(n)}x_n
\end{array}$$

főátló alatti együtthatók eltűnnek:

$$a_{ij}^{(n)} = 0 \quad (i > j) \ .$$

Vagyis $(*^n)$ egyenletrendszer ekkor

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{11}^{(n)}x_1 & +a_{12}^{(n)}x_2 & +a_{13}^{(n)}x_3 & a_{14}^{(n)}x_4 & +\cdots & +a_{1n}^{(n)}x_n & = & b_1^{(n)} \\
 & a_{22}^{(n)}x_2 & +a_{23}^{(n)}x_3 & +a_{24}^{(n)}x_4 & +\cdots & +a_{2n}^{(n)}x_n & = & b_2^{(n)} \\
 & & +a_{33}^{(n)}x_3 & +a_{34}^{(n)}x_4 & +\cdots & +a_{3n}^{(n)}x_n & = & b_3^{(n)} \\
 & & & a_{44}^{(n)}x_4 & +\cdots & +a_{4n}^{(n)}x_n & = & b_4^{(n)} \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & a_{nn}^{(n)}x_n & = & b_n^{(n)} \\
 & & & & & 0 & = & b_{n+1}^{(n)} \\
 & & & & & 0 & = & b_{n+2}^{(n)} \\
 & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & 0 & = & b_m^{(n)}
\end{array} \qquad (*^n)$$

alakú lesz. Itt jegyezzük meg, hogy maga az **elimináció** szó jelentése *megsemmisítés* (régebbi magyar szakkifejezéssel *kiküszöbölés*). Nevezetesen, az algoritmus célja a *főátló alatti elemek eltűntetése.*

A $(*^n)$ rendszer már könnyen megoldható: Ha $\exists\ i > n \quad b_i^{(n)} \neq 0$, akkor a $0 = b_i^{(n)} \neq 0$ ellentmondás miatt eleve nem lehet megoldás. Ha pedig $b_i = 0$ $(i > n)$, akkor pontosan egy $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ megoldása van $(*^n)$-nek (és így $(*)$-nak is), amit alulról egymás utáni behelyettesítéssel kapunk meg:

$$\begin{aligned}
x_n &= b_n^{(n)}/a_{nn}^{(n)} \Rightarrow x_n \text{ ismert}, \\
x_{n-1} &= \left[b_{n-1}^{(n)} - a_{n-1,n}^{(n)}x_n\right]/a_{n-1,n-1}^{(n)} \Rightarrow x_{n-1} \text{ is ismert}, \\
x_{n-2} &= \left[b_{n-2}^{(n)} - a_{n-2,n-1}^{(n)}x_{n-1} - a_{n-2,n}^{(n)}x_n\right]/a_{n-2,n-2}^{(n)} \Rightarrow x_{n-2} \text{ is ismert}, \\
&\ \vdots \\
x_1 &= \left[b_1^{(n)} - a_{12}^{(n)}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n\right]/a_{11}^{(n)} \Rightarrow x_1 \text{ is ismert} \ .
\end{aligned}$$

2) Ha $m < n$, azaz ha kevesebb sor van mint oszlop a $(*)$ egyenletrendszerben, akkor m eliminációs lépést tehetünk meg. Ezzel az

$$\begin{array}{l}
a_{11}^{(m)}x_1 + a_{12}^{(m)}x_2 + a_{13}^{(m)}x_3 + \cdots + a_{1m}^{(m)}x_m + a_{1,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}^{(m)}x_n = b_1^{(m)} \\
\qquad a_{22}^{(m)}x_2 + a_{23}^{(m)}x_3 + \cdots + a_{2m}^{(m)}x_m + a_{2,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}^{(m)}x_n = b_2^{(m)} \\
\qquad\qquad a_{33}^{(m)}x_3 + \cdots + a_{3m}^{(m)}x_m + a_{3,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \cdots + a_{3n}^{(m)}x_n = b_3^{(m)} \\
\qquad\qquad\quad \ddots \\
\qquad\qquad\qquad a_{mm}^{(m)}x_m + a_{m,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}^{(m)}x_n = b_m^{(n)}
\end{array} \qquad (*^m)$$

egyenletrendszerhez jutunk. Adjunk tetszőleges értékeket az $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ ismeretleneknek, és vezessük be a

$$\bar{b}_i(x_{m+1}, \ldots, x_n) := b_i^{(m)} - a_{i,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \cdots + a_{in}^{(m)} x_n \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

konstansokat. Ezekkel $(*^m)$ átírható

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}^{(m)} x_1 + a_{12}^{(m)} x_2 + a_{13}^{(m)} x_3 + a_{14}^{(m)} x_4 + \cdots + a_{1m}^{(m)} x_m & = & \bar{b}_1(x_{m+1}, \ldots, x_n) \\
a_{22}^{(m)} x_2 + a_{23}^{(m)} x_3 + a_{24}^{(m)} x_4 + \cdots + a_{2m}^{(m)} x_m & = & \bar{b}_2(x_{m+1}, \ldots, x_n) \\
a_{33}^{(m)} x_3 + a_{34}^{(m)} x_4 + \cdots + a_{3m}^{(m)} x_m & = & \bar{b}_3(x_{m+1}, \ldots, x_n) \\
a_{44}^{(m)} x_4 + \cdots + a_{4m}^{(m)} x_m & = & \bar{b}_4(x_{m+1}, \ldots, x_n) \\
\ddots & & \\
a_{mm}^{(m)} x_m & = & \bar{b}_m(x_{m+1}, \ldots, x_n)
\end{array}$$

alakba. Ez utóbbi alulról egymás utáni behelyettesítésekkel egyértelműen megoldható $x_1, \ldots, x_m$-re.

> **Tétel.** *Ha a $(*)$ egyenletrendszernek van megoldása, akkor olyan megoldása is van, amelynek minden tagja az a_{ij}, b_i $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ adatokból véges sok $+, -, \cdot, /$ művelettel áll elő (vagyis azok racionális polinomja).*

Bizonyítás. Ha van megoldás, láttuk, hogy a változók és az egyenletek alkalmas sorrendcseréje után a Gauss elimináció az ℓ-edik lépésben olyan, az eredetivel ekvivalens (a $(*)$-géival azonos megoldásokkal rendelkező) $(*^\ell)$ rendszerre vezet, amelynél

$$\begin{aligned}
a_{\ell\ell}^{(\ell)} &\neq 0\ , \\
a_{ij}^{(\ell)} &= \left[a_{ij}^{(\ell-1)} \text{ ha } i \le \ell,\ \ a_{ij}^{(\ell-1)} - a_{\ell j}^{(\ell-1)} a_{i\ell}^{(\ell-1)} / a_{\ell\ell}^{(\ell-1)} \text{ ha } \ i > \ell \right] , \\
b_i^{(\ell)} &= \left[b_i^{(\ell-1)} \text{ ha } i \le \ell,\ \ b_i^{(\ell-1)} - b_\ell^{(\ell-1)} a_{i\ell}^{(\ell-1)} / a_{\ell\ell}^{(\ell-1)} \text{ ha } \ i > \ell \right] .
\end{aligned}$$

Ezért minden lépésben az összes $a_{ij}^{(\ell)}, b_i^{(\ell)}$ együtthatók racionális polinomjai a kezdeti $a_{ij}^{(0)} := a_{ij}, b_i^{(0)} := b_i$ adatoknak. A 2) alesetben $x_{m+1} := \cdots := x_n := 0$ mindig vehető, és ezzel $\bar{b}_i(0, \ldots, 0) = b_i^{(m)}$ $(m < i \le n)$. Ezután a megoldáshoz vezető alulról való visszahelyettesítések szintén véges sok alapműveletből állnak.

Pivot elemek

Az előbbi elméleti tárgyalás során azt az egyszerűsítő feltevést tettük, hogy az összes lépések során a főátlóbeli együtthatók nem tűnnek el. Ez nem lényeges megszorítása az általánosságnak, mivel a változók sorrendjét tetszőlegesen választhatjuk meg. A gyakorlat során azonban nem célszerű az állandó sorrendváltás, főleg, ha aránylag kis egyenletrendszereket "kézzel" oldunk meg. Elég csak kijelölni az i-edik lépésben, hogy az i-edik sor melyik eleme alatt akarunk kinullázni. Ezeket az elemeket nevezzük **pivot** elemeknek, vagy régebbi magyar terminológia szerint **főelem**eknek. (A **pivot** szó angol eredetű, jelentése *tengely, csukló*).

Példa. Vegyük a

$$\begin{array}{rrrcr} & 2x_2 & +\ x_3 & = & 19 \\ 3x_1 & +\ 3x_2 & +\ x_3 & = & 35 \\ 4x_1 & +10x_2 & +4x_3 & = & 102 \end{array}$$

egyenletrendszert. Itt az 1. elem eleve nem lehet pivot, hiszen az értéke $= 0$ (az első sor teljes alakja: $0x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 19$). Mivel $a_{13} = a_{23} = 1$, célszerű az első sorbeli pivotnak a x_3 tagját venni:

$$\begin{array}{rrrcr} & 2x_2 & +\underline{x_3} & = & 19 \\ 3x_1 & +\ x_2 & & = & 16 \\ 4x_1 & +2x_2 & & = & 26 \end{array}$$

(az 1. sort kivonva a 2.-ból, és az 1. sor 4-szeresét kivonva a 3.-ikból). A második sorból válasszuk pivotnak x_2 tagját:

$$\begin{array}{rrrcr} & 2x_2 & +\underline{x_3} & = & 19 \\ 3x_1 & +\underline{x_2} & & = & 16 \\ \underline{-2x_1} & & & = & -6 \end{array}$$

(a 3. sorból kivonva a 2. sor 2-szeresét). Az x_1 ismeretlen tagját az utolsó sorban automatikusan pivotnak tekintjük. A pivotokat visszafelé meghatározva

$$x_1 = -6/(-2) = 3\ , \quad x_2 = 16 - 3x_1 = 16 - 9 = 7\ , \quad x_3 = 19 - 2x_2 = 19 - 14 = 5\ .$$

Numerikus instabilitás. Látszólag megoldódott minden problémánk gyakorlati szempontból. A Gauss elimináció algoritmusát rutinszerűen be lehet programozni számítógépekbe, s az alkalmazó számára nincs más hátra, csak az adatok bevitele. Már a legrégibb elektronikus számítógépek első programjai között ott volt a Gauss elimináció. Az első kellemetlen meglepetések hamarosan jelentkeztek: $40 - 50$ ismeretlenes egyenletrendszerek esetén gyakran előfordult, hogy a gép nehézség nélkül kiadott eredményt, de az visszahelyettesítve teljesen rossznak bizonyult. A hibát nem az elméletileg tökéletes algoritmus rossz beprogramozása okozta, hanem a gép kerekítései a számolások során. A helyzetet a következő (első látásra kissé ostobának tűnő) példával szemléltethetjük: A

$$\begin{aligned} x_1 + 10000x_2 &= 10000 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

rendszer megoldása $x_1 = 10000/9999$; $x_2 = 9998/9999$. Olyan Gauss eliminációt alkalmazva, amelynek a pivotjai a főátlóban vannak, a megoldás az

$$\begin{aligned} x_1 + 10000x_2 &= 10000 \\ -9999x_2 &= -9998 \end{aligned}$$

egyenleteken keresztül vezet. Ha az osztást olyan gép végzi el, amelyik csak 3 tizedesre tud kerekíteni, akkor az $x_2 \approx 1,000$ eredményt, és innen visszahelyettesítve az

$$x_1 + 10000 \approx 10000 \quad , \Rightarrow x_1 \approx 0$$

katasztrofálisan pontatlan kimenetet kapjuk.

A kerekítési hibákra való ilyen nagyfokú érzékenységet nevezik **numerikus instabilitás**nak.

Megjegyzés. Az előbbi egyszerű példa jól mutatja az elméleti megközelítés fontosságát. Nevezetesen, a Tétel szerint, ha egy $(*)$ típusú egyenletrendszer együtthatói racionálisak, akkor egyértelmű megoldás esetén a megoldás tagjai is mind racionálisak. Ezeket mint egész számok párjait mindig lehet pontosan véges sok digitális jeggyel reprezentálni. Így a szokásos végtelen tizedes (vagy kettedes) törtes reprezentációból adódó kerekítési hibák elkerülhetők.

A pivotok ügyes megválasztásával a Gauss elimináció numerikus hibái jelentősen csökkenthetők, de ennek elemzése igen nehéz, ma is sok nyitott kérdéshez vezető probléma.

A jegyzet ettől kezve elméletibb irányba fordul. A Gauss eliminációval kapcsolatban a következő fajta problémákat fogjuk vizsgálni:

Milyen szerkezetű a megoldások halmaza?

Mikor van pontosan egy megoldás, és milyen zárt formula adható arra?

Milyenek egy egyenletrendszer legegyszerűbb ekvivalens átalakítottjai új változók bevezetésével?

VEKTORTEREK

Emlékeztető. $\mathbb{R}^n$ jelöli az $\{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ függvények halmazát. Később tisztázódó okokból az $(x_1, \ldots, x_n)$ rendezett n-essel azonosított

$$\big(1 \mapsto x_1, \ldots, n \mapsto x_n\big) \text{ függvény egyik jelölése az } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ún. **oszlopvektor**. A valós értékű függvényeknek van egy természetes algebrája: $f+g$ az $x \mapsto f(x)+g(x)$ függvény, $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén pedig αf az $x \mapsto \alpha f(x)$ függvény. Ennek a konvenciónak megfelelően

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} .$$

Hasonlóképpen értelmezhetjük az oszlopvektorok különbségét, számokkal való leosztottjaikat, sőt akár szorzatukat ill. hányadosukat. Az utóbbi két multiplikatív műveletnek azonban nem lesz jelentősége a tárgyalásunk szempontjából.

Definíció. A $\big(V, +, \lambda\cdot\ (\lambda \in \mathbb{K}), 0\big)$ algebrai struktúra, ahol
V egy halmaz,
$+ :\ V \times V \to V$ egy 2-változós művelet V-n,
0 egy kitűntetett eleme V-nek,
mindegyik rögzített $\lambda \in \mathbb{K}$ számra $\lambda\cdot :\ V \to V$ egy 1-változós művelet V-n
$\mathbb{K}$ fölötti **vektortér**, ha a műveletei teljesítik a következő axiómákat

$$\begin{aligned}
&v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \\
&(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3) && (v_1, v_2, v_3 \in V) \\
&(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 v + \lambda_2 v \\
&(\lambda_1 \lambda_2) v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) && (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K},\ v \in V) \\
&\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda \cdot v_2 && (\lambda \in K,\ v_1, v_2 \in V) \\
&1 \cdot v = v + 0 = v \\
&0 \cdot v = 0 && (v \in V)\ .
\end{aligned}$$

Tétel. *$v+(-1)\cdot v=0 \qquad (v\in V)$ a V vektortérben. Vagyis a V-beli összeadás invertálható.*

BIZONYÍTÁS. $v+(-1)\cdot v=1\cdot v+(-1)v=(1+(-1))v=0\cdot v=0$

Jelölés. A továbbiakban bármely $V,+,\lambda\cdot\ \ (\lambda\in\mathbb{K}),0$ vektortérben fogjuk használni a függvényekre már megszokott

$$\lambda v:=\lambda\cdot v\ , \qquad -v:=(-1)\cdot v$$

jelölési konvenciókat. A $\mathbb{K}$ testbeli ill. V vektortérbeli zéruselemek közös 0 jelölése nem fog félreértést okozni. A körülményes $V,+,\lambda\cdot\ \ (\lambda\in\mathbb{K}),0$ jelölés helyett a nyilvánvaló álladó elemek elhagyásával csak V-t fogunk írni általában.

Példa. 1) $\mathbb{K}^n$ a a komponensenkénti

$$\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}u_1+v_1\\ \vdots\\ u_n+v_n\end{pmatrix}\ , \qquad \lambda\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\lambda u_1\\ \vdots\\ \lambda u_n\end{pmatrix}$$

műveletekkel vektortér. Számunkra ez a példa alapvető fontosságú. Látni fogjuk: az összes véges dimenziós (a pontos definíciót ld. később) vektortér szekezete lényegében azonos valamilyen $\mathbb{K}^n$-ével.

2) Általában is, ha X egy tetszőleges (nem-üres) halmaz, akkor az

$$\mathcal{F}(X,\mathbb{K}):=\big\{X\to\mathbb{K}\text{ függvények}\big\}$$

függvénytér a pontonkénti

$$f+g:x\mapsto f(x)+g(x)\ \ , \qquad \lambda f:x\mapsto\lambda f(x) \qquad\qquad \big(f,g\in\mathcal{F}(X,\mathbb{K}),\ \lambda\in\mathbb{K}\big)$$

műveletekkel vektorér.

3) Egy $f\in\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ függvény **tartó**ja alatt a $\operatorname{supp}(f):=\{x\in X:\ f(x)\neq 0\}$ halmazt értjük (a jelölés a latin *support* szó rövidítése). Mivel mindig $\operatorname{supp}(f+g)\subset\operatorname{supp}(f)\cup\operatorname{supp}(g)$ ill. $\operatorname{supp}(\lambda f)=\operatorname{supp}(f)$ ha $\lambda\neq 0$, az

$$\mathcal{F}_0(X,\mathbb{K}):=\big\{\text{véges tartójú }X\to\mathbb{K}\text{ függvények}\big\}$$

a szokásos pontonkénti összeadással és konstanssal való szorzással vektortér. Látni fogjuk: *minden vektortér algebrai szerkezete megegyezik valamilyen $\mathcal{F}_0(X,\mathbb{K})$ alakú tér szerkezetével.*

4) $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ **polinom** alatt olyan $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ függvényt értünk, amely valamely véges sok $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{K}$ együtthatókkal $P : \zeta \mapsto \sum_{k=0}^{N} a_k \zeta^k$ alakban írható. Mivel $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ polinomok összegei és konstansszorosai szintén polinomok, a

$$\mathrm{Pol}(\mathbb{K}) := \{\mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ polinomok}\}$$

függvénytér a pontonkénti összeadással és konstanssal való szorzással vektortér.

Lineáris leképezések

Definíció. Legyenek V_1, V_2 vektorterek ($\mathbb{K}$ fölött). Az $A : V_1 \to V_2$ leképezés **lineáris**, ha

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{K}\,,\ x, y \in V_1)\ .$$

A lineáris $V_1 \to V_2$ leképezések családját $\mathcal{L}(V_1, V_2)$-vel fogjuk jelölni. Ha pedig a kiindulási tér egybeesik a képtérrel, röviden $\mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V, V)$-t írunk.

Lemma. a) *Legyen $n \geq 2$ tetszőlegesen adott. Az $A : V_1 \to V_2$ leképezés pontosan akkor lineáris, ha*

$$A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 A(v_1) + \dots + \alpha_n A(v_n) \qquad \begin{matrix}(\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\,,\\ v_1, \dots, v_n \in V_1).\end{matrix}$$

b) *Ha az $A : V \leftrightarrow V$ leképezés lineáris, akkor annak az A^{-1} inverze is lineáris.*

Bizonyítás. a) Ha $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, akkor teljes indukcióval

$$\begin{aligned}
A(\alpha_1 v_1) &= \alpha_1 A(v_1)\\
A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= A(\alpha_1 v_1) + A(\alpha_2 v_2) = \alpha_1 A(v_1) + \alpha_2 A(v_2)\\
&\ \ \vdots\\
A\big(\textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k v_k\big) &= A\big(\textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k\big) + A(\alpha_{n+1} v_{n+1}) =^{\text{IND. FELT.}}\\
&= \Big[\textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k A(v_k)\Big] + \alpha_{n+1} A(v_{n+1}) = \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k A(v_k)\ .
\end{aligned}$$

A fordított implikáció triviális.

b) Legyen $A : V \leftrightarrow V$ lineáris. Ekkor

$$\begin{aligned}
\alpha_1 A^{-1}(v_1) + \alpha_2 A^{-1}(v_2) &= A^{-1} \circ A\big[\alpha_1 A^{-1}(v_1) + \alpha_2 A^{-1}(v_2)\big] =\\
&= A^{-1}\big[\alpha_1 A(A^{-1} v_1) + \alpha_2 A(A^{-1} v_2)\big] =\\
&= A^{-1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)\ .
\end{aligned}$$

Vagyis a már bizonyított a) pont szerint $A^{-1} \in \mathcal{L}(V)$.

Megjegyzés. A lineáris algebra fő témája: a lineáris leképezések leírása.

Vegyük észre, hogy a lineáris leképezések éppen a vektorterek művelettartó leképezései algebrai szempontból. *Ha tehát V_1, V_2 vektorterek és létezik lineáris kölcsönösen egyértelmű $A : V_1 \leftrightarrow V_2$ leképezés közöttük, akkor a V_1-re érvényes algebrai állítások A segítségével átírhatók V_2-re.*

Példa. Az előbbi 1)-4) példák vektortereivel kapcsolatban bemutatunk egy-egy tipikus egyszerű lineáris leképezést.

1) Egy tetszőlegesen rögzített $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ szám-n-es mellett az

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n$$

leképezés lineáris $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$.

2,3) Véve egy $T : X \to X$ transzformációt*, az $f \mapsto f \circ T$ leképezés $\mathcal{L}\big(\mathcal{F}(X)\big)$-be (ill. $\mathcal{L}\big(\mathcal{F}_0(X)\big)$-be a 3) pl.-nál) tartozik.

4) A $P \mapsto P'$ **differenciálás**, azaz a

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^k \mapsto \sum_{k=1}^{N} k \cdot a_k z^{k-1}$$

leképezés (ahol z^k a $\mathbb{K} \ni \zeta \mapsto \zeta^k$ függvény) $\mathcal{L}(\mathrm{Pol}(\mathbb{K}))$-ba tartozik.

> **Tétel.** *Legyenek V_1, V_2 vektortérek a $\mathbb{K}$ test fölött. A pontonkénti vektorműveletekkel az $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ tér $\mathbb{K}$ fölötti vektortér.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $A, B \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Belátandó: Az $L : v \mapsto \alpha A(v) + \beta B(v)$ leképezés lineáris.

Ha $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{K}$ és $v_1, v_2 \in V$, akkor

$$\begin{aligned} L(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2) &= \alpha A(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2) + \beta B(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2) = \\ &= \alpha\big[\xi_1 A(v_1) + \xi_2 A(v_2)\big] + \beta\big[\xi_1 B(v_1) + \xi_2 B(v_2)\big] = \\ &= \alpha\xi_1 A(v_1) + \alpha\xi_2 A(v_2) + \beta\xi_1 B(v_1) + \beta\xi_2 B(v_2) = \\ &= \xi_1\alpha A(v_1) + \xi_2\alpha A(v_2) + \xi_1\beta B(v_1) + \xi_2\beta B(v_2) = \\ &= \xi_1[\alpha A(v_1) + \beta B(v_1)] + \xi_2[\alpha A(v_2) + \beta B(v_2)] = \\ &= \xi_1 L(v_1) + \xi_2 L(v_2)\ . \end{aligned}$$

* A **függvény, leképezés, transzformáció** szavak csupán egymás szinonimái ebben a jegyzetben.

Definíció. A továbbiakban az $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ teret mindig vektortérként fogjuk fel az

$$A + B := \big[v \mapsto A(v) + B(v)\big] \ , \quad \lambda A := \big[v \mapsto \lambda A(v)\big] \qquad (A, B \in \mathcal{L} \ , \ \lambda \in \mathbb{K})$$

műveletekkel. Később tisztázódó okból az $\mathcal{L}(V_1, V_2)$-beli számításoknál általában nem fogjuk zárójelbe írni a leképezések argumentumát, azaz pl. Av-t írunk $A(v)$ helyett.

Tétel. *Lineáris leképezések kompoziciója lineáris és disztributív az összeadásra nézve. Azaz*

1) $A \circ B \in \mathcal{L}(V_1, V_3)$ *valahányszor* $B \in \mathcal{L}(V_1, V_2)\, , \ A \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$.

2) *Ha* $C_1, C_2 : \ V_3 \leftarrow V_2$ *ill.* $D_1, D_2 : \ V_2 \leftarrow V_1$ *lineáris leképezések és* $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$, *akkor*

$$\big(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2\big) \circ \big(\mu_1 D_1 + \mu_2 D_2\big) = \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \mu_j C_i D_j$$

mint a számok szorzásánál.

Bizonyítás. 1) Ha $\xi_1, xi_2 \in \mathbb{K}$ és $v_1, v_2 \in V_1$,

$$\begin{aligned} A \circ B(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2) &= A\big[B(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2)\big] = \\ &= A\big[\xi_1 B v_1 + \xi_2 B v_2)\big] = \\ &= \xi_1 A(Bv_1) + \xi_2 A(Bv_2) = \xi_1 (A \circ B) v_1 + \xi_2 (A \circ B) v_2 \ . \end{aligned}$$

2) Definíció szerint $(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) w = \lambda_1 (C_1 w) + \lambda_2 (C_2 w)$ $(w \in V_2)$. Ezt alkalmazva $v \in V_1$ mellett a $w := (\mu_1 D_1 + \mu_2 D_2) v = \mu_1 (D_1 v) + \mu_2 (D_2 v)$ vektorra,

$$\begin{aligned} &\big(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2\big) \circ \big(\mu_1 D_1 + \mu_2 D_2\big) v = \\ &\quad = \lambda_1 C_1 \big((\mu_1 (D_1 v) + \mu_2 (D_2 v)\big) + \lambda_2 C_2 \big((\mu_1 (D_1 v) + \mu_2 (D_2 v)\big) =^{C_1, C_2 \text{ LIN.}} \\ &\quad = \lambda_1 \big(\mu_1 C_1 D_1 v + \mu_2 C_1 D_2 v\big) + \lambda_2 \big(\mu_1 C_2 D_1 v + \mu_2 C_2 D_2 v\big) = \\ &\quad = \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \mu_j C_i D_j \ . \end{aligned}$$

Definíció. Ettől kezdve a lineáris leképezések összetételének jelölésekor elhagyjuk a kompozíció jelét (pl. $A \circ B$ helyett AB-t írunk), a számok szorzás-jelölésével analóg módon. Sőt az összetétel műveletét **szorzás**nak is nevezzük a lineáris leképezéseknél.

Példa. Az $f_0 := 0\,,\ f_1 := 1\,, \dots,\ f_{n+1} := f_{n-1} + f_n\,, \dots$ rekurzív definícióval adott $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ Fibonacci sorozat előáll az

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \qquad (n = 0, 1, \dots)$$

rekurzió-mentes formában. Ennek az első látásra talán meglepő ténynek a hátterében az előző tétel áll.

Legyen $\mathbf{S}$ az $(x_1, x_2, \dots)$ számsorozatok tere. Tekintsük ezen a

$$T : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$$

eltolást. Nyilván $T \in \mathcal{L}(\mathbf{S}, \mathbb{R})$. Alkalmazzuk ezt kétszer az $\mathbf{f}$ Fibonacci sorozatra:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (f_1, f_2, f_3, f_4, \dots) \\ T\mathbf{f} &= (0, f_1, f_2, f_3, \dots) \\ T^2\mathbf{f} &= (0, 0, f_1, f_2, \dots)\,. \end{aligned}$$

Az $f_n + 1 = f_{n-1} + f_n$ összefüggés szerint ezt a

$$(T^2 + T - 1)\mathbf{f} = T^2\mathbf{f} + T\mathbf{f} - \mathbf{f} = (1, 0, 0, \dots)$$

polinomiális formába írhatjuk. A ttel 2) pontja szerint

$$(\lambda - T) \circ (\mu - T) = T^2 - (\lambda + \mu)T + \lambda\mu \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})\,.$$

Ha tehát a $t^2 + t - 1$ polinom gyökeit

$$\alpha := \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \beta := \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

-vel jelöljük a továbbiakban, akkor

$$(\alpha - T) \circ (\beta - T)\mathbf{f} = (1, 0, 0, \dots)\,.$$

Észrevétel: $\lambda \neq 0$ esetén a $\lambda - T$ lineáris leképezés invertálható ($\mathbf{S}$-en).

Bizonyítás. A $(\lambda - T)\mathbf{x} = \mathbf{y}$ egyenlet jelentése tagonkénti kiírásban

$$(\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \lambda x_3 - x_2, \dots) = (y_1, y_2, y_3, \dots)\,.$$

Ez $\mathbf{x}$-re lépésenként egyértelműen megoldható, ha $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= y_1 & x_1 &= \lambda^{-1} y_1 \\ \lambda x_2 - x_1 &= y_2 & x_2 &= \lambda^{-1}(y_2 + x_1) = \lambda^{-1} y_2 + \lambda^{-2} y_1 \\ \lambda x_3 - x_2 &= y_3 & &\vdots \\ &\vdots & x_n &= \lambda^{-1} y_n + \lambda^{-2} y_{n-1} + \dots + \lambda^{-n} y_1\,. \end{aligned}$$

Speciálisan

$$(\lambda - T)^{-1}(1,0,0,\dots) = (\lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \lambda^{-3}, \dots)\,.$$

Innen rögtön eljutunk a Fibonacci sorozat nem-rekurzív formulájához az

$$\mathbf{f} = (\beta - T)^{-1}(\alpha - T)^{-1}(1,0,0,\dots) = (\beta - T)^{-1}(\alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \alpha^{-3}, \dots)$$

összefüggés alapján. Az $y_n := \alpha^{-n}$ és $\lambda := \beta$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} f_n &= \beta^{-1}\alpha^{-n} + \beta^{-2}\alpha^{-n+1} + \dots + \beta^{-n}\alpha^{-1} \\ &= \beta^{-1}\alpha^{-1}\frac{\beta^{-n} - \alpha^{-n}}{\beta^{-1} - \alpha^{-1}} \overset{\alpha\beta=-1}{=} \frac{(-\alpha)^{-n} - (-\beta)^{-n}}{\beta - \alpha}\,. \end{aligned}$$

Alterek

Általában is, egy algebrai struktúra altere annak egy olyan részhalmaza, amelyből a műveletei nem vezetnek ki. Ekkor az altér a rá megszorított eredeti műveletekkel az eredetiével azonos típusú (de kisebb) algebrai struktúrát alkot. Ennek megfelelően a vektorterek altereit a következőképpen adhatjuk meg.

Definíció. Legyen V egy vektortér. Az $U \subset V$ alakzat **altér** V-ben, ha

$$\mathbb{K}U + \mathbb{K}U \subset U \neq \{0\}\,.$$

A V tér alterei a tartalmazásra nézve hálószerűen rendezett családot alkotnak (mint az rögtön adódik az alábbi tétel 3. pontjából). Innen az angol *lattice*(=háló) szó alapján a szokásos jelölés:

$$\mathrm{Lat}(V) := \big\{V \text{ alterei}\big\}\,.$$

Példa. 1) Legyen $m \le n$. Ekkor $\mathbb{K}^n$-nek altere a

$$\big\{(\xi_1, \dots, \xi_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}) :\ \xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbb{K}\big\}$$

halmaz, amelynek szerkezete $\mathbb{K}^m$-ével izomorf.

2) Az $\mathcal{F}_0(X)$ tér altere mindig $\mathcal{F}(X)$-nek.

3) A $\mathrm{Pol}(\mathbb{K})$ tér altere $\mathcal{F}(\mathbb{K})$-nak.

4) A $[0,1]$ intervallumon folytonos valós ($\mathbb{R}$-beli) értékű függvények $\mathcal{C}\big([0,1]\big)$ tere altere $\mathcal{F}\big([0,1]\big)$-nek ($\mathbb{K} := \mathbb{R}$ mellett).

5) Általában is alterekhez vezet a következő konstrukció:

Definíció. Az $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ lineáris leképezés 0-terét A **mag**jának nevezzük, és $\ker(A)$-val jelöljük. A **képtér** jelölése a $\mathrm{ran}(A)$, mint az értékkészletnél szokásos általában *. Azaz

$$\ker(A) := A^{-1}\{0\} = \{v \in V_1 : \ Av = 0\} \ , \quad \mathrm{ran}(A) := AV_1 = \{Av : \ v \in V_1\} \ .$$

Propozíció. *Lineáris leképezés kép- ill. 0-tere altér a cél- ill. kiindulási vektortérben.*

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Ekkor $U_1 := \ker(A)$-t ill. $U_2 := \mathrm{ran}(A)$-t írva

$$A(\mathbb{K}U_1 + \mathbb{K}U_1) = \mathbb{K}AU_1 + \mathbb{K}AU_1 = \mathbb{K}\{0\} + \mathbb{K}\{0\} = \{0\} \ ,$$
$$\mathbb{K}U_2 + \mathbb{K}U_2 = \mathbb{K}AV_1 + \mathbb{K}AV_1 = A(\mathbb{K}V_1 + \mathbb{K}V_1) = A(V_1) = U_2 \ .$$

Tétel. 1) *$U \in \mathrm{Lat}(V)$ esetén $0 \in U$ és $\big(U, +, \lambda\cdot \ (\lambda \in \mathbb{K})\big)$ vektortér, továbbá $\mathbb{K}U + \mathbb{K}U = U$.*

2) *$\{0\} \in \mathrm{Lat}(V)$.* 3) *Alterek tetszőleges metszetei alterek. Azaz ha $\{U_i : \ i \in \mathcal{I}\} \subset \mathrm{Lat}(V)$, akkor $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathrm{Lat}(V)$.*

Bizonyítás. 1) Legyen $U \in \mathrm{Lat}(V)$. Ekkor

$$\{0\} = \{0\} + \{0\} = 0 \cdot U + 0 \cdot U \subset \mathbb{K}U + \mathbb{K}U \subset U \ .$$

Másrészt

$$U = 1 \cdot U \subset \mathbb{K}U = \mathbb{K}U + \{0\} = \mathbb{K}U + 0 \cdot U \subset \mathbb{K}U + \mathbb{K}U \subset U \ .$$

Innen $0 \in U = \mathbb{K}U + \mathbb{K}U$. Ha $u, v \in U$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor

$$u + v = 1 \cdot u + 1 \cdot v \in \mathbb{K}U + \mathbb{K}U = U \ , \quad \lambda u = \lambda u + 0 \cdot u \in \mathbb{K}U + \mathbb{K}U = U \ .$$

2) Triviális. 3) Ha $\lambda\mu \in \mathbb{K}$ és $u, v \in U := \bigcap_{i\in\mathcal{I}} U_i$, akkor $u, v \in U_i$ $(i \in \mathcal{I})$, ahonnan 1) alapján $\lambda u + \mu v \in U_i$ $(i \in \mathcal{I})$, és így $\lambda u + \mu v \in U$. Azaz a $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ill. $u, v \in U$ elemek tetszőleges választása miatt $\mathbb{K}U + \mathbb{K}U \subset U$.

Definíció. Egy V vektortérben az $S \subset V$ alakzat által **kifeszített altér** az azt tartalmazó legkisebb

$$\mathrm{Span}(S) := \bigcap\big\{U \text{ altér } \subset V : \ U \supset S\big\}$$

* Az angol *kernel* = mag ill. *range* = értékkészlet terminológia alapján.

altér $\big($v.ö. Tétel 3)$\big)$. A jelölés eredete az angol *span*(=kifeszítés) szó.

Az $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ vektort V-ben a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok egy **lineáris kombináció**jának nevezzük.

Tétel. *A V vektortérbeli S alakzat által kifeszített alteret az S-beli vektorok lineáris kombinációi adják. Azaz*

$$\mathrm{Span}(S) = \big\{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \\ v_1, \ldots, v_n \in S \quad (n \in \mathbb{N})\big\}.$$

Bizonyítás. Nyilván $S \subset \mathrm{Span}(S)$ és az $U := \mathrm{Span}(S)$ alakzat altér V-ben. Innen

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in \mathbb{K}U + \cdots + \mathbb{K}U = U \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ v_1, v_n \in V)\ .$$

Tehát $\mathrm{Span}(S)$ tartalmazza az összes S-ből vett lineáris kombinációkat. Azt kell még belátnunk, hogy S-beli lineáris kombinációk lineáris kombinációi is S-beli lineáris kombinációk maradnak. Ehhez elég csak kettő kombinációra szorítkoznunk. Tegyük fel, hogy $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ és $u_1, \ldots, u_n \in S$ ill. $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{K}$ és $v_1, \ldots v_m \in S$, továbbá $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \alpha\big(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n\big) + \beta\big(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n\big) &= \\ = \underbrace{(\alpha\lambda_1)}_{\in\mathbb{K}}\ \underbrace{u_1}_{\in S} + \cdots + (\alpha\lambda_n)u_n + (\beta\mu_1)v_1 + \cdots + \underbrace{(\beta\mu_m)}_{\in\mathbb{K}}\ \underbrace{v_n}_{\in S} &\in \\ \in \mathbb{K}S + \cdots + \mathbb{K}S \subset \mathrm{Span}(S)\ . \end{aligned}$$

Következmény. *Ha $U_1, \ldots, U_n \in \mathrm{Lat}(V)$, akkor*

$$\mathrm{Span}(U_1 \cup \cdots \cup U_n) = U_1 + \cdots + U_n \\ \big(= \{u_1 + \cdots + u_n :\ u_k \in U_k\ (k = 1, \ldots, n)\}\big).$$

Bizonyítás. Elegendő csak $n = 2$-re bizonyítani, hiszen innen indukcióval azonnal adódik az állítás. Nyilván $U_1 + U_2 \subset \mathrm{Span}(U_1 \cup U_2)$. Ha $v \in U_1 + U_2$, alkalmas λ_1, λ_2 skalárokkal és $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ vektorokkal $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ írható. Csakhogy $\lambda_k u_k \in \mathbb{K}U_k = U_k$ $(k = 1, 2)$, és így $v \in U_1 + U_2$ is.

Példa. Az $\big\{(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0)\big\}$ vektorhármas kifeszítettje $\mathbb{R}^4$-ben a $\big\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0) :\ \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}\big\} = \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ altér.

Ugyanígy $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ az $\mathbb{R}(1,0,0,0)$ $(= \{(r,0,0,0) : r \in \mathbb{R}\})$, $\mathbb{R}(0,1,0,0)$, $\mathbb{R}(0,0,1,0)$ alterek (egyenesek) kifeszítettje.

Megjegyzés. Hogy ne kelljen feleslegesen sok indexes kifejezést írnunk egy (esetleg végtelen) S halmazból vett lineáris kombinációk jelölésére, bevezetjük az

$$\sum_{v\in S} f(v) := \sum_{v\in \operatorname{supp}(f)} f(v) = \sum_{v\in S:\ f(v)\neq 0} f(v)$$

alakú összegeket a véges tartójú (véges sok helyen $\neq 0$) $f : S \to V$ függvényekre. Ezek jól-definiáltak, mivel a véges összegek jól-definiáltak. Sőt

$$\alpha \sum_{v\in S} f(v) + \beta \sum_{v\in S} g(v) = \sum_{v\in S} \alpha f(v) + \beta g(v) \qquad \big(f, g \in \mathcal{F}_0(S, V)\big) ,$$

ahol $\mathcal{F}_0(S, V)$ a véges tartójú $S \to V$ függvények családja. Ezzel a tétel eredménye:

$$\operatorname{Span}(S) = \big\{\sum_{v\in S} \lambda(v)v :\ \lambda \in \mathcal{F}_0(S, \mathbb{K})\big\} .$$

Faktortér

Definíció. A V vektortér $U \in Lat(V)$ altere szerint az $u, v \in V$ vektorok **kongruensek**, jelölésben $u \equiv v \pmod U$, ha $u + U = v + U$.

Propozíció. 1) *A* $\equiv \pmod U$ *reláció ekvivalencia* V*-n.*
2) *Ha* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *és* $u' \equiv u,\ v' \equiv v \pmod U$*, akkor mindig* $\alpha u' + \beta v' \equiv \alpha u + \beta v \pmod U$.

Bizonyítás. 1) A $\equiv \pmod U$ reláció reflexivitása, szimmetriája és tranzitivitása triviális.

2) $u \equiv u' \pmod U$ miatt $u = u + 0 \in u + U = u' + U$, ahonnan $u - u' \in U$. Ugyanígy $v - v' \in U$. Most

$$\begin{aligned}
&\alpha(u - u') + \beta(v - v') \in \alpha U + \beta U \subset U \ \big[\Leftarrow\ U \in \operatorname{Lat}(V)\big] ,\\
&(\alpha u + \beta v) - (\alpha u' + \beta v') \in U ,\\
&\alpha u + \beta v \in \alpha u' + \beta v' + U .
\end{aligned}$$

Innen

$$\alpha u + \beta v + U \subset (\alpha u' + \beta v' + U) + U \subset \alpha u' + \beta v' + U .$$

Az $u' \leftrightarrow u,\ v' \leftarrow v$ cserékkel kapjuk a fordított $\alpha u' + \beta v' + U \subset \alpha u + \beta v + U$ tartalmazást.

Lemma. $\{u' : \; u' \equiv u \pmod U\} = u + U \qquad (u \in U)$.

BIZONYÍTÁS. Legyen $u \in V$ tetszőlegesen rögzítve. Ekkor

$$u' \equiv u \pmod U \; , \;\; \Rightarrow \;\; u' + u = u + U \; , \;\; \Rightarrow u' = u' + 0 \in u + U \; .$$

Tegyük fel, hogy $u' \in u + U$. Ekkor

$$u' - u \in U \; , \; \Leftrightarrow \; u' - u \equiv 0 \pmod U \; , \; \overset{2)}{\Leftrightarrow} u' \equiv u \pmod U \; .$$

Következmény. *A* $\equiv \pmod U$ *ekvivalencia mellékosztályainak* $\{v + U : \; v \in V\}$ *családja vektortérré tehető. Azaz jól-definiáltak az*

$$\alpha \cdot \underbrace{(\, u + U \,)}_{\{u:\, u' \equiv u \,(\mathrm{mod}\, U)\}} \;+\; \beta \cdot \underbrace{(\, v + U \,)}_{\{v':\, v' \equiv v \,(\mathrm{mod}\, U)\}} \;:=\; \underbrace{(\, \alpha u + \beta v \,) + U}_{\{w:\, w \equiv \alpha u + \beta v \,(\mathrm{mod}\, U)\}}$$

lineáris kombinációk az összes mellékosztályokra.

Definíció. A V vektortér U altere szerinti **faktortér** az U-mellékosztályok

$$V/U := \{v + U : \; v \in V\}$$

tere az előbbi következményben leírt műveletekkel: $M, N \in V/U$ ill.$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$-ra

$$\alpha \cdot N + \beta \cdot M := \big[S \in V/U : \; S \subset \alpha N + \beta M (= \{\alpha u + \beta v : \; u \in N, \; v \in M\})\big] \; .$$

Megjegyzés. Könnyen látható, hogy a V/U faktortérben vektorműveletek majdnem egybeesnek megfelelő halmazműveletekkel. Nevezetesen, $N + M = \{u + v : u \in N, \; v \in M\}$ és $\alpha \neq 0$-nál $\alpha \cdot N = \{\alpha u : \; u \in N\}$ a V/U-beli értelemben is. Csak a $0 \cdot N = U$ eset jelent eltérést. (Az összeadás neutrális eleme az $U \in V/U$ elem a faktortérben).

Példa. 1) Vegyük $\mathbb{R}^3$-ban az $S := \{(\xi_1, \xi_2, 0) : \; \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}\}$ síkot mint alteret. Az $\mathbb{R}^3/S$ faktortér elemei az S-sel párhuzamos

$$S_\alpha := \{(\xi_1, \xi_2, \alpha) : \; \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}\} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

síkok. Az $\mathbb{R}^3/S$-beli vektorműveleteket az

$$\lambda \cdot S_\alpha + \mu \cdot S_\beta = S_{\lambda\alpha + \mu\beta} \qquad (\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

formula tökéletesen leírja. Tehát $\mathbb{R}^3/S$ szerkezete megegyezik $\mathbb{R}$-ével (az $\alpha \mapsto S_\alpha$ leképezés lineáris $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}^3/S$).

2) Két (Lebesgue-) integrálható $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt azonosnak szokás a harmonikus analízisben tekinteni, ha azok egy 0-hosszmértékű halmazon kívül egybeesnek. A függvények 0-mértékű halmazon kívüli egybeesése ekvivalencia-reláció. Tehát a harmonikus analízisben az "integrálható függvény"-nek nevezett objektumok valójában nem $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, hanem az

$$\mathcal{I} := \{\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : \ -\infty < \underline{\int}\varphi = \overline{\int}\varphi < \infty\}$$

függvénytérnek a 0-mértékű halmazon kívüli egybeesés $\approx$ ekvivalencia-relációja szerinti mellékosztályai. Ezeknek a mellékosztályoknak a tere

$$L^1(\mathbb{R}) := \big\{\{\psi \in \mathcal{I} : \ \psi \approx \varphi\} : \ \varphi \in I\big\} \ .$$

Az $\mathcal{I}$-beli függvények lineáris kombinációi is $\mathcal{I}$-ben maradnak, és

$$\varphi \approx \psi \ \Leftrightarrow \ \varphi - \psi \approx 0 \ \Leftrightarrow \ \int|\varphi - \psi| = 0 \qquad (\varphi, \psi \in \mathcal{I}) \ .$$

Ezért $\mathcal{I}$ altér $\subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$, és az

$$\begin{aligned} \mathcal{N} :&= \{\varphi \in \mathcal{I} : \ \varphi \approx 0\} = \\ &= \{\varphi \in \mathcal{I} : \ \int|\varphi| = 0\} \end{aligned}$$

ekvivalenciaosztály szerinti faktortér éppen

$$L^1(\mathbb{R}) = \mathcal{I}/\mathcal{N} \ .$$

Lemma. *Egy lineáris $A : V \to Z$ lináris leképezés állandó a* $\ker(A) := \{v : \ Av = 0\}$ *altér szerinti mellékosztályokon, és az*

$$\begin{aligned} A_0 : \ & V/\ker(A) \to Z \\ & v + \ker(A) \mapsto Av \end{aligned}$$

leképezés lineáris és injektív.

Bizonyítás. Ha a $v_1 \equiv v_2 \pmod{\ker(A)}$, akkor $v_1 - v_2 \in \ker(A)$, azaz $A(v_1 - v_2) = 0$, és így $Av_1 = Av_2$. Ezért az A_0 leképezés jól-definiált. Az A_0 linearitása adódik az

$$\begin{aligned} A_0\big(\alpha_1[v_1 + \ker(A)] + \alpha_2[v_2 + \ker(A)]\big) &= A_0\big((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + \ker(A)\big) = \\ &= A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2 = \\ &= \alpha_1 A_0(v_1 + \ker(A)) + \alpha_2 A_0(v_2 + \ker(A)) \end{aligned}$$

relációból. Döntő az A_0 injektivitása: Ha $A_0(v_1 + \ker(A)) = A_0(v_2 + \ker(A))$, akkor $Av_1 = Av_2$, azaz $A(v_1 - v_2) = 0$ és $v_1 - v_2 \in \ker(A)$, tehát $v_1 + \ker(A) = v_2 + \ker(A)$ következik.

Megjegyzés. Az A_0 leképezés *kölcsönösen egyértelmű* $V/\ker(A) \leftrightarrow \mathrm{ran}(A)(:= AV)$ a Lemma szerint. Ez a tény lehetőséget ad, hogy csak a $\ker(A), \ker(B)$ magterekkel leírhassuk, mikor "osztható" a B lineáris leképezés A-val.

Tétel. *Legyenek $A : V \to Z_1$, $B : V \to Z_2$ lineáris leképezések. Ekkor*

$$\ker(A) \subset \ker(B) \iff \exists\, L : \mathrm{ran}(A) \xrightarrow{\text{lin.}} \mathrm{ran}(B)) \qquad B = LA\ .$$

Bizonyítás. Ha $B = LA$, akkor $B : \ker(A) \xrightarrow{A} 0 \xrightarrow{L} 0$, és így $\ker(A) \subset \ker(B)$.

Tegyük fel, hogy $\ker(A) \subset \ker(B)$. Most az $A_0 : v + \ker(A) \mapsto Av$ leképezés jól-definiált és lineáris $V/\ker(A) \leftrightarrow \mathrm{ran}(A)$. Hasonlóan, a $B_0 : v + \ker(B) \mapsto Bv$ operátorra $V/\ker(B) \leftrightarrow \mathrm{ran}(B)$. Észrevétel:

$$\begin{aligned} A &= A_0 I \quad , \quad \text{ahol} \quad I : v \mapsto v + \ker(A)\ , \\ B &= B_0 J \quad , \quad \text{ahol} \quad J : v \mapsto v + \ker(B)\ . \end{aligned}$$

Mivel $\ker(A)\, \text{altér} \subset \ker(B)\, \text{altér} \subset V$, fennáll $\ker(B) = \ker(A) + \ker(B)$. Ezért a

$$K : v + \ker(A) \mapsto v + \ker(B) = (v + \ker(A)) + \ker(B)$$

leképezés is jól-definiált és lineáris. Sőt $J = KI$. Ekkor

$$\begin{aligned} B &= B_0 J = B_0 KI = B_0 KI = B_0 K A_0^{-1} A_0 I = \\ &= \underbrace{B_0 K A_0^{-1}}_{L} A\ . \end{aligned}$$

Megjegyzés. A tételbeli L operátor formulája

$$L(z) = \big[Bv :\ Av = z\big] \qquad (z \in \mathrm{ran}(A))\ .$$

Gyakorlat. Adjunk ennek alapján elemi bizonyítást a tételre.

Direkt összeg

A következőkben egy olyan alapvető konstrukcióval ismerkedünk meg, amely több vektortérből egy új, nagyobb teret hoz létre.

> Propozíció. *Legyenek $U_1, \dots, U_n$ vektorterek. Ekkor $U_1 \times \cdots \times U_n$ az*
> $$(u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, u_n) := (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$
> $$\lambda(u_1, \dots, u_n) := (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)$$
> *műveletekkel vektortér.*

Bizonyítás. Triviális.

Definíció. Az $U_1, \dots, U_n$ vektorterek **direkt összege** az $U_1 \times \cdots \times U_n$ szorzattér a (Propozícióban megadott) komponensenkénti műveletekkel. Ha V egy vektortér, $W, U_1, \dots, U_n \in \mathrm{Lat}(V)$ és a

$$\Phi : (u_1, \dots, u_n) \mapsto u_1 + \cdots + u_n$$

leképezésre $\Phi : U_1 \times \cdots \times U_n \leftrightarrow W$, akkor azt mondjuk (félreértés veszélye nélkül), hogy W az $U_1, \dots, U_n$ **alterek direkt összege**.

Példa. 1) $\mathbb{K}^n$ n-szeres direkt összege $\mathbb{K}$-nak (mint $\mathbb{K}$-fölötti vektortérnek).

2) Az $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ függvénytér folytonos függvényeinek $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ altere a páros ill. páratlan folytonos függvényekből álló alterek direkt összege. (Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény **páros**, ha $f(-x) = f(x)$, **páratlan**, ha $f(-x) = -f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$).

Megjegyzés. Ha W az $U_1, \dots, U_n \in \mathrm{Lat}(V)$ alterek direkt összege, akkor szükségképpen $W = U_1 + \cdots + U_n$.

Bizonyítás. A definícióbeli jelölésekkel $W = \Phi(U_1 \times \cdots \times U_n) = U_1 + \cdots + U_n$.

Definíció. Ha az $U_1, \dots, U_n \in \mathrm{Lat}(V)$ altereknek van direkt összege, azt $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ fogja jelölni.

Megjegyzés. Szükségképpen $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n = U_1 + \cdots + U_n$. Az $\oplus$ jellel hangsúlyozzuk a **direkt felbonthatóság** (a definícióbeli Φ leképezés injektivitása) tényét.

Példa. $\mathbb{R}^4$-ben az $\mathbb{R}e_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ahol $e_1 := (1, 0, 0, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0, 0)$ és $e_3 := (0, 0, 1, 0)$ alterek összege direkt, azaz $\mathbb{R}^3 \times \{0\} = \oplus_{i=1}^3 \mathbb{R}e_i$.

Ugyanakkor az $e := (1, 1, 0, 0)$ vektorral az $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e$ altérösszeg már nem direkt.

Lemma. *Az* $A : V \to V$ *lineáris leképezés pontosan akkor injektív (azaz kölcsönösen egyértelmű), ha* $Av \neq 0 \quad (v \neq 0)$.

Bizonyítás. Mindenképpen $A0 = 0$. Ha tehát A injektív, akkor $v \neq 0$ esetén $Av \neq 0$.

Tegyük fel, hogy $Av \neq 0 \quad (v \neq 0)$, és legyen $v_1, v_2 \in V$ két különböző vektor. Ekkor $v := v_1 - v_2 \neq 0$ és így $Av_1 - Av_2 = A(v_1 - v_2) = Av \neq 0$ azaz $Av_1 \neq Av_2$.

Tétel. *Legyenek* $U_1, \cdots, U_n \in \mathrm{Lat}(V)$ *és* $W := U_1 + \cdots + U_n$. *Ekkor*

$$W = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \iff U_i \cap \sum_{k:\ k \neq i} U_k = \{0\} \quad (i = 1, \ldots, n) \ .$$

Bizonyítás. Legyen Φ az $(u_1, \ldots, u_n) \mapsto u_1 + \cdots + u_n$ leképezés $U_1 \times \cdots \times U_n$-en.

$\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy $W = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$. Ekkor

$$\Phi\{(u_1, 0, \ldots, 0) : u_1 \in U_1\} = U_1, \ldots, \Phi\{(0, \ldots, 0, u_n) : u_n \in U_n\} = U_n$$
$$\Phi^{-1}(U_i) = \underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{i-1} \times U_i \times \underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{n-i} =: \widehat{U}_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \ .$$

Csakhogy az $\widehat{U}_i$ alterek $U_1 \times \cdots \times U_n$-ben teljesítik az $\widehat{U}_i \cap \sum_{k:\ k \neq i} \widehat{U}_k = \{0\}$ tulajdonságot. Ugyanilyen tulajdonságúaknak kell a $U_i = \Phi(\widehat{U}_i)$ halmazoknak is lennie, mivel feltevés szerint Φ lineáris $U_1 \times \cdots \times U_n \leftrightarrow W$ leképezés.

$\Leftarrow$: Ha Φ nem injektív, a lemma szerint található olyan $(u_1, \ldots, u_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n$, amelyre

$$u_1 + \cdots + u_n = \Phi(u_1, \ldots, u_n) = 0 \ , \quad (u_1, \ldots, u_n) \neq (0, \ldots, 0) \ .$$

Valamelyik i indexre $u_i \neq 0$. Ezzel $\sum_{k:\, k \neq i}(-u_k) = u_i \in U_i\{0\}$. Azaz ilyenkor $U_i \cap \sum_{k:\, k \neq i} U_k \neq \{0\}$.

LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG, BÁZIS

Definíció. A V vektortérben a $v \in V$ vektor **lineárisan független** az $S \subset V$ vektorhalmaztól, ha $v \notin \mathrm{Span}(S)$.

$$S \text{ lineárisan független } (\subset V) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, v \in S \;\; v \text{ lineárisan független } S \setminus \{v\}\text{-től} .$$

A **lin.fgtlen** rövidítést fogjuk használni a lineárisan független kifejezésre (főleg formulákban).

Megjegyzés. $\mathrm{Span}(\emptyset) = \{0\}$, ezért $\{0\}$ mindig lineárisan függő.

Másrészt $\emptyset$ maga lineárisan független.

Mondhatni, egy $v \in V$ vektor **lineárisan függ** a $v_1, \ldots, v_n$ vektoroktól, ha azok valamilyen lineáris kombinációja. Láttuk: a $\mathrm{Span}(S)$ altér éppen az S-ből vett lineáris kombinációkból áll. Innen a lineáris függetlenség általános definiciója.

Tétel. *S lineárisan független $\subset V$ pontosan akkor, ha*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

valahányszor $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ és $v_1, \ldots, v_n \in S$ $(n = 1, 2, \ldots)$, azaz ha

$$\sum_{v \in S} \lambda(v) v = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 0 \qquad \big(\lambda \in \mathcal{F}_0(S, \mathbb{K})\big) .$$

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy $v_1, \ldots, v_n \in S$, $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ de pl. $\lambda_1 \neq 0$. Ekkor a

$$v_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n \in \mathrm{Span}\{v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathrm{Span}(S \setminus \{v_1\})$$

ellentmondásra jutunk.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy S lineárisan függő. Ekkor $v \in \mathrm{Span}(S \setminus \{v\})$ valamely $v \in S$ vektorra. Ez

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

alakú valamilyen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ együtthatók ill. $v_1, \dots, v_n \in S \setminus \{v\}$ vektorok mellett. Most

$$\underbrace{1}_{\neq 0} \cdot v + (-\lambda_1)v_1 + \cdots + (-\lambda_n)v_n = 0\ .$$

Következmény. *S lin.fgtlen $\Leftrightarrow$ $\forall F$ véges$\subset S$ $\quad F$ lin.fgtlen .*

Következmény. *Ha S lin.fgtlen$\subset V$ és $v \in V$ lineárisan független S-től, akkor $\{v\} \cup S$ lin fgtlen$\subset V$.*

Megjegyzés. A lemma geometriai jelentése: *A $v_1, \dots, v_n \in V$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha nem-zérók és a $\mathbb{K}v_1, \dots, \mathbb{K}v_n$ alterek összege direkt.*

Bizonyítás. A lineáris $\Phi : (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) \mapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ leképezés pontosan akkor injektív, ha a $\Phi(\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) = 0$ eset csak úgy fordulhat elő, ha $(\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) = 0$.

Tétel. (Hamel). *Tegyük fel, hogy Z a V vektortér egy részhalmaza, amelyre $V = \mathrm{Span}(Z)$, és legyen S egy lineárisan független része Z-nek. Ekkor*

$$\exists\ H \text{ lin.fgtlen } \subset Z \qquad S \subset H \text{ és } \mathrm{Span}(H) = V\ .$$

Bizonyítás. Csak **véges** Z halmaz esetére végezzük el. (Az általános bizonyítás ennek egy transzfinit változata).

Ha Z véges$\subset V$, akkor van legtöbb elemből álló az S-et tartalmazó lineárisan független részhalmazai között. Legyen H egy ilyen halmaz. Erre már

$$\forall\ v \in Z \setminus H \qquad \{v\} \cup H \text{ nem lin.fgtlen}\ . \tag{$**$}$$

A második Következmény szerint most minden $z \in Z$ vektor lineárisan függő H-tól, azaz $z \in \mathrm{Span}(H)$ $(z \in Z)$. Így

$$\mathrm{Span}(H) \supset Z\ ,\Longrightarrow \quad V \supset \mathrm{Span}(H) = \mathrm{Span}\big(\mathrm{Span}(H)\big) \supset \mathrm{Span}\big(Z\big) = V\ .$$

Megjegyzés. Végtelen Z esetén is meg lehet adni $(**)$ tulajdonságú H halmazt. Ilyen létezését a matematikai logika egyik axiomatikus erejű elve, a **végesen meghatározott tulajdonságú maximális halmazok létezésé**nek elve biztosítja.

Tulajdonság alatt valamilyen halmazon értelmezett IGAZ,HAMIS értékű függvényt értünk. (Ilyenkor azt mondjuk, hogy az x elem T **tulajdonságú**, ha $T(x) =$

IGAZ). Egy tulajdonság **végesen meghatározott**, ha egy X alaphalmaz összes részhalmazain van értemezve, és minden $Y \subset X$ halmaz pontosan akkor T tulajdonságú, ha az összes véges részhalmazai T tulajdonságúak. A halmazelméletbeli Kiválasztási Axióma egyik ekvivalense a következő elv:

Ha T egy végesen meghatározott tulajdonság egy Z halmaz részhalmazain, és $S(\subset Z)$ egy T tulajdonságú halmaz, akkor S belefoglalható egy maximális T tulajdonságú halmazba is, azaz

$$\exists\, H \subset Z \quad S \subset H,\ T(H) = \text{IGAZ},\ \forall\, z \in Z \setminus H \quad T(H \cup \{z\}) = \text{HAMIS}\ .$$

Annyit kell még észrevennünk, hogy *a lineáris függetlenség végesen meghatározott tulajdonság.*

Definíció. Legyen V egy vektortér. A $H(\subset V)$ halmaz **Hamel-bázis** (röviden **bázis**) V-ben, ha H lineárisan független és $V = \mathrm{Span}(H)$.

A Hamel tétel bizonyításából kiderül az alábbi.

Következmény. *A maximális (tovább nem bővíthető) lineárisan független halmazok a bázisok.*

Megjegyzés. Hamel tételét az $S := \emptyset$ esetre alkalmazva láthatjuk, hogy *minden vektortérben van (Hamel-féle) bázis.*

Példa. 1) $\mathbb{K}^n$-ben az $e_i := (\delta_{ik} : k = 1, \dots, n)$ $(i = 1, \dots, n)$ vektorok* bázist alkotnak. Ezt $\mathbb{K}^n$ **kanonikus bázisá**nak nevezzük, maguk az $e_1, \dots, e_n$ vektorok $\mathbb{K}^n$ tér **kanonikus egységvektorai**.

2) $\mathcal{F}_0(X)$-ben bázis a $\mathbb{K}^n\big(= \mathcal{F}_0\{1, \dots, n\}\big)$ kanonikus bázisát általánosító $\big\{(\delta_{xy} : y \in X) :\ x \in X\big\}$ függvényrendszer.

3) Bár tudjuk, hogy $\mathcal{F}(X)$-ben is vannak bázisok, *véges explicit fomulával* ezek egyikét sem lehet leírni, ha az X halmaz *végtelen.* (Így biológiai lényünk teljesen alkalmatlan arra, hogy egy ilyen bázist pl. vizuálisan elképzeljünk). Ez a tény is mutatja a Hamel tétel bizonyításához használt logikai axióma erejét.

4) A $\mathrm{Pol}(\mathbb{K})$ térben az alappolinomok $\{1, z, z^2, z^3, \dots\}$ családja bázis.

Propozíció. *Ha* $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ *és* B_k bázis $\subset U_k$ $(k = 1, \dots, n)$, *akkor* $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ bázis $\subset V$.

---

* Szokásosan $\delta_{ik} := \big[1 \text{ ha } i = k,\ 0 \text{ ha } i \neq k\big]$ az ún. **Kronecker delta**. Tehát pl. $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$.

Bizonyítás. Legyen $B = B_1 \cup \cdots \cup B_k$. Mivel feltevés szerint $\mathrm{Span}(B_k) = U_k$, fennáll $U_k \subset \mathrm{Span}(B)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Így

$$U_1 \cup \cdots \cup U_n \subset \mathrm{Span}(B) \ ,$$
$$V = \mathrm{Span}(U_1 \cup \cdots \cup U_n) \subset \mathrm{Span}\big(\mathrm{Span}(B)\big) = \mathrm{Span}(B) \subset V \ .$$

Belátandó még: B lin.fgtlen $\subset V$.
Tegyük fel, hogy ellenkezőleg, valamelyik $b \in B$ vektorra $b \in \mathrm{Span}(B \setminus \{b\})$. Vehető (az általánosság megszorítása nélkül), hogy $b \in B_1$. Ekkor

$$b \in \mathrm{Span}\big((B_1 \setminus \{b\}) \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n\big) =$$
$$= \underbrace{\mathrm{Span}(B_1 \setminus \{b\})}_{\subset U_1} + \underbrace{\mathrm{Span}(B_2)}_{U_2} + \cdots + \underbrace{\mathrm{Span}(B_n)}_{U_n} \ .$$

Tehát $b = b_1 + \cdots + b_n$ valamilyen $b_1 \in \mathrm{Span}(B_1 \setminus \{b\}) \subset U_1$, $b_2 \in U_2, \ldots, b_n \in U_n$ vektorokkal. Azaz

$$0 = \underbrace{(b - b_1)}_{U_1} + \underbrace{b_2}_{U_2} + \cdots + \underbrace{b_n}_{U_n}$$
$$0 = b - b_1 = b_2 = \cdots = b_n \ ,$$

mivel az $U_1, \ldots, U_n$ alterek összege direkt. Ez azonban a $b = b_1 \in \mathrm{Span}(B \setminus \{b\})$ ellentmondás.

Koordinátázás bázis szerint

Propozíció. *A V vektortér B részhalmaza akkor és csak akkor bázis, ha minden vektor pontosan egyféleképpen adható meg benne lineáris kombinációként, azaz ha*

$$\forall\, v \in V \ \exists!\, \lambda \in \mathcal{F}_0(B) \qquad \sum_{b \in B} \lambda(b) b = v \ .$$

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Legyen B bázis $\subset V$. Ekkor definíció szerint $\mathrm{Span}(B) = V$. Így $\forall\ v \in V\ \exists\ \lambda \in \mathcal{F}_0(B)\quad \sum_{b\in B} \lambda(b)b = v$. Ha $v = \sum_{b\in B} \lambda(b)b = \sum_{b\in B} \mu(b)b$, akkor $0 = \sum_{b\in B}(\lambda(b) - \mu(b))b$. Mivel B lineárisan független, innen $\lambda(b) - \mu(b) = 0$ $(b \in B)$, azaz $\lambda = \mu$, a v vektor B-beli lineáris kombinációként való előállításának egyértelműsége következik.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy minden V-beli vektor pontosan egyféleképpen adható meg B-beli lineáris kombinációként. Mivel $\mathrm{Span}(B)$ a B-beli lineáris kombinációk halmaza, eszerint $V = \mathrm{Span}(B)$. Másrészt $0 = \sum_{b\in B} 0 \cdot b$, ahonnan az előállítás egyértelműsége miatt

$$\sum_{b\in B} \lambda(b) = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = 0 \qquad \big(\lambda \in \mathcal{F}(B)\big) \ .$$

Ez azonban egy régebbi lemmánk szerint a B halmaz lineárisan függetlenségét jelenti.

Következmény. *Minden vektortér izomorf egy valamilyen halmazon véges tartójú függvények terével. Nevezetesen, ha B bázis a V vektortérben, akkor a $\lambda \mapsto \sum_{b\in B} \lambda(b)b$ leképezés lineáris $\mathcal{F}_0(B) \leftrightarrow V$.*

Bizonyítás. Csak a $\lambda \mapsto \sum_{b\in B} \lambda(b)b$ leképezés linearitását kell még belátnunk. Ez azonban rögtön adódik:

$$\alpha \sum_{b\in B} \lambda(b)b + \beta \sum_{b\in B} \mu(b)b = \sum_{b\in B} \big(\alpha[\lambda(b)] + \beta[\mu(b)b]\big) =$$
$$= \sum_{b\in B} [\alpha\lambda(b) + \beta\mu(b)]b \ .$$

Következmény. *Ha V-ben van $n(<\infty)$ elemű bázis, $V \simeq \mathbb{K}^n$.**

Definíció. Legyen V egy vektortér, B bázis $\subset V$ és $e \in B$. A $v \in V$ vektor **e-koordinátája a B bázisban** a v-t előállító B-beli lineáris kombinációban az $e \in B$ báziselem

$$e'_B(v) := \Big[\lambda(e) : \ v = \sum_{b\in B} \lambda(b)b \, , \ \lambda \in \mathcal{F}_0(B)\Big]$$

együtthatója. Tehát mindig

$$v = \sum_{b\in B} b'_B(v)b \qquad (v \in V) \ .$$

Példa. 1) $\mathbb{R}^3$ kanonikus $E := \{e, f, g\}$ (ahol $e := (1,0,0)$, $f := (0,1,0)$, $g := (0,0,1)$) bázisa szerint az (x,y,z) vektor koordinátái éppen

$$x = e'_E(x,y,z) \ , \quad y = f'_E(x,y,z) \ , \quad z = g'_E(x,y,z) \ .$$

Ez motiválja a "koordináta" elnevezést.

2) Pol($\mathbb{R}$)-ben az alapfüggvények $Z := \{z^0, z^1, z^2, \ldots\}$ bázisában nyilván $[z^k]'_Z\big(\sum_{j=1}^n a_j z^j\big) = a_k$. Sokkal érdekesebb, hogy a Taylor formula szerint

$$[z^k]'_Z(P) = \frac{1}{k!} P^{(n)}(0) \qquad (P \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \, , \ k = 0, 1, \ldots) \ .$$

3) **Trigonometrikus polinomok** a $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos 2\pi kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin 2\pi kx$ (itt $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\xi \mapsto \xi$ geometriai koordinátafüggvény) alakú függvények. Ezek $\mathcal{T}$ terében a $\mathcal{B} := \{\cos 2\pi kx :\ k = 0, 1, \ldots\} \cup \{\sin 2\pi kx :\ k = 1, 2, \ldots\}$ bázist alkotnak. Megint pl. $[\cos 2\pi \ell x]'_{\mathcal{B}}\big(\sum_{k=0}^{n} a_k \cos 2\pi kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin 2\pi kx\big) = a_k$. Figyelemre méltó, hogy Fourier formulája szerint

$$\varphi'_{\mathcal{B}}(T) = \int_0^1 T(x)\varphi(x)\, dx \qquad (\varphi \subset \mathcal{B}\,,\ T \in \mathcal{T})\ .$$

Dimenzió

Definíció. A V vektortér **véges dimenziós**, ha valamely Z véges $\subset V$ halmazra $V = \mathrm{Span}(Z)$. A V tér **dimenzió**ja (dimenziószáma)

$$\dim(V) := \min\big\{\#Z :\ V = \mathrm{Span}(Z)\big\}\ .$$

Definició szerint $\dim(\{0\}) := 0$. *

> **Lemma.** (Báziscsere). *Legyen V egy vektortér, E, F* bázis $\subset V$ *és $e \in E$. Ekkor található olyan $f \in F$ vektor a másik bázisban, amellyel az e vektort kicserélve*
>
> $$(E \setminus \{e\}) \cup \{f\} \text{ bázis} \subset V\ .$$

Bizonyítás. Az E bázis lineárisan független vektorhalmaz. Így $E \setminus \{e\}$ is lineárisan független e-től. Tehát az $U := \mathrm{Span}(E \setminus \{e\})$ altérre

$$V = U + \mathbb{K}e\ , \qquad e \notin U\ .$$

Állítás: Van olyan $f \in F$ vektor, amely az U altéren kívül esik.

Bizonyítás. Az $F \subset U$ feltevés a $V = \mathrm{Span}(F) \subset \mathrm{Span}(U) = U$ ellentmondáshoz vezet.

Rögzítsünk egy olyan $f \in F$ vektort, amelyre $f \notin U$. Az előző alfejezetbeli második Következmény szerint az $(E \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ vektorhalmaz lineárisan független. Mivel $V = U + \mathbb{K}e$,

$$f = u_0 + \lambda_0 e \quad u_0 \in U\,,\ \lambda_0 \in K \setminus \{0\}$$

---

* A $\#Z$ szimbólum jelentése: a Z halmaz **számosság**a (elemeinek a száma).

írható. Azt kell még megmutatnunk, hogy $V = \mathrm{Span}\big((E \setminus \{e\}) \cup \{f\}\big)$.

Legyen $v \in V$ tetszőleges. Erre

$$\begin{aligned}
&v = u + \lambda e \qquad \exists\, u \in U\,,\ \lambda \in K\\
&v - \frac{\lambda}{\lambda_0} f = u + \lambda e - \frac{\lambda}{\lambda_0} u_0 - \lambda e = u - \frac{\lambda}{\lambda_0} u_0 \in U\\
&v \in U + \frac{\lambda}{\lambda_0} f \subset \mathrm{Span}(U \cup \{f\}) = \mathrm{Span}\big((E \setminus \{e\}) \cup \{f\}\big)\ .
\end{aligned}$$

A bizonyításból kiderül az alábbi.

Következmény. *Ha E bázis a V vektortérben, $e \in E$ és $f \in V \setminus \mathrm{Span}(E \setminus \{e\})$, akkor $(E \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ is bázis V-ben.*

Tétel. *Ha* $\dim(V) = n(< \infty)$ *és* H lin.fgtlen $\subset V$, *akkor*

$$1)\ \#H \le n\ , \quad 2)\ \#H = n\ \Leftrightarrow\ H \text{ bázis } \subset V\ .$$

Bizonyítás. A dimenzió definíciója alapján választható olyan n-elemű $Z \subset V$ halmaz, amelyre $\mathrm{Span}(Z) = V$. Ez szükségképpen bázisa a V térnek. (Ugyanis Hamel tétele szerint $\exists\, F \subset Z$ F bázis $\subset V$. Ezzel $\mathrm{Span}(F) = V$. Tehát, $\#F \ge n$, mivel $\dim(V) = n$. De $\#F \le \#Z = n$, és így Z egybeesik az F bázissal.)

Tegyük fel ezután, hogy található n különböző $h_1, \dots, h_n$ vektor H-ban. Legyen ezekkel

$$H_0 := \{h_1, \dots, h_n\}$$

Állítás: $\mathrm{Span}(H_0) = V$. $\big($Innen 1)2) azonnal adódik!$\big)$

Bizonyítás. Mivel H_0 lineárisan független, és mivel $\mathrm{Span}(H_0 \cup Z) \supset \mathrm{Span}(Z) = V$, Hamel tétele szerint

$$\exists\, Z_0 \subset Z \qquad H_0 \cup Z_0 \text{ bázis } \subset V\ .$$

Legyen $m := \#(Z \setminus Z_0)$. Megmutatjuk, hogy a Báziscsere lemma segítségével az $E_0 := Z_0 \cup H_0$ bázisból a $h_1, \dots, h_m$ elemeket egymás után kicserélhetjük a Z bázisból $Z \setminus Z_0$ elemeivel.

A Báziscsere lemma szerint (azt E_0, Z és $h_1 \in E_0$-ra alkalmazva)

$$\exists\, z_1 \in Z \qquad Z_0 \cup \{z_1, h_2, \dots, h_n\} \text{ bázis}\ .$$

Szükségképpen z_1 lineárisan független $Z_0 \cup \{h_2, \dots, h_n\}$-tól. Tehát $z_1 \notin Z_0$. A Báziscsere lemmát az

$$E_1 := Z_0 \cup \{z_1, h_2, \dots, h_n\}$$

ill. Z bázisokra a $h_3 \in E_1$ vektor cseréjéhez alkalmazva

$$\exists\, z_{\in} F_0 \qquad Z_0 \cup \{z_1, z_2, h_3, \ldots, h_n\} \text{ bázis} .$$

Szükségképpen a z_2 vektor lineárisan független $Z_0 \cup \{z_1, h_2, \ldots, h_n\}$-től. Tehát $z_2 \notin Z_0 \cup \{z_1\}$.

A gondolatmenet $k(\leq m)$-edik lépésében az

$$E_{k-1} := Z_0 \cup \{z_1, \ldots, z_{k-1}, h_k, \ldots, h_n\}$$

bázis h_k elemét cseréljük ki a Z egy z_k elemére. Itt $z_k \notin Z_0 \cup \{z_1, \ldots, z_{k-1}\}$, mivel lineárisan független $Z_0 \cup \{z_1, \ldots, z_{k-1}, h_{k-1}, \ldots, h_n\}$-től.

Az m-edik lépés konklúziója:

$$Z_0 \cup \{z_1, \ldots, z_m, h_{m+1}, \ldots, h_n\} \text{ bázis } \subset V ,$$
$$z_1 \notin Z_0 , \; z_2 \notin Z_0 \cup \{z_1\} , \ldots \; , z_m \notin Z_0 \cup \{z_1, \ldots, z_{m-1}\} .$$

Mivel a Z halmaz n elemből áll, $Z \setminus Z_0$ pedig m-ből, innen

$$Z = Z_0 \cup \{z_1, \ldots, z_m\} , \quad Z \cup \{h_k : \; m < k \leq n\} \text{ bázis } \subset V .$$

Csakhogy Z már maga is bázis V-ben. Így

$$\{h_k : \; m < k \leq n\} = \emptyset, \implies m = n, \; Z_0 = \emptyset \text{ és } H_0 \text{ bázis } \subset V ,$$

ami bizonyítja a tételt.

Példa. 1) $\mathbb{K}^n$ n-dimenziós.

Általában is, egy n-elemű X halmaz feletti ($\mathbb{K}$-beli értékű) függvények $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}_0(X)$ tere n-dimenziós. Innen következik, hogy

$$\dim(V) = n(< \infty) \quad \text{esetén} \quad V \simeq \mathbb{K}^n .$$

2) A komplex számok testét felfoghatjuk mint $\mathbb{R}$ fölötti vektorteret, ha csak a valós számokkal szabad szoroznunk: ez a

$$\mathbb{C}_{\mathbb{R}} := \big(\mathbb{C}, +, \alpha \cdot \; (\alpha \in \mathbb{R}), 0\big)$$

struktúra. Mivel

$$\mathbb{C} = \{\alpha + \beta i : \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} , \quad \alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0 \; (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) ,$$

Az $\{1, i\}$ pár bázis a $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ vektortérben. Tehát $\dim(\mathbb{C}_{\mathbb{R}}) = 2$.

Bár precíz, de nehézkes a $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ jelölés. Gyakran előfordul hasonlóan, hogy ugyanazt az összeadással ellátott teret több különböző test fölötti vektortérnek foghatjuk fel. Ekkor szokásos a dim-szimbólum indexében utalni az alaptestre és a tér alapjelölésére. Tehát pl. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$, sőt általában

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n \ .$$

A $\dim_{\mathbb{R}}$ szimbólumot **valós dimenzió**nak, a $\dim_{\mathbb{C}}$ szimbólumot **komplex dimenzió**nak, általában a $\dim_{\mathbb{T}}$ szimbólumot a $\mathbb{T}$ **test szerinti dimenzió**nak mondjuk.

3) $\mathbb{R}$-et felfoghatjuk mint a racionális számok $\mathbb{Q}$ teste fölötti vektorteret (ha csak a racionális számokkal szorozhatunk). Az $\mathbb{R}_{\mathbf{Q}} := \big(\mathbb{R}, +, q\cdot \ (q \in \mathbb{Q}\ )\big)$ vektortér fontos szerepet játszik a függvényegyenletek elméletében. Míg $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$ triviálisan, *az $\mathbb{R}_{\mathbf{Q}}$ tér végtelen dimenziós*, és rendkívül érdekes szerkezetű. Megmutatható (a végtelen számosságok aritmetikájával), hogy

$$\dim_{\mathbf{Q}}(\mathbb{R}) = \#\mathbb{R} \ .$$

Egyenletrendszer megoldása báziscserével

Térjünk vissza a $(*)$ egyenletrendszerhez.

A 2) átfogalmazás szerint keresnünk kell azokat az $x_1, \ldots, x_n$ együtthatókat, amelyekkel

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b \ ,$$

ahol $a_1, \ldots, a_n, b$ adott $\mathbb{K}^m$-beli vektorok.

Tekintsük először csak azt az esetet, amelynél $m = n$ (a rendszernek ugyanannyi sora van mint oszlopa), és

$$\mathcal{A} := \{a_1, \ldots, a_n\} \text{ bázis } \subset \mathbb{K}^n \ .$$

Vegyük észre, hogy $x_1, \ldots, x_n$ most éppen az $\mathcal{A}$ bázisra vonatkozó koordinátái a $b \in \mathbb{K}^n$ vektornak. Tehát a feladatunk az, hogy *számítsuk ki egy adott vektor koordinátáit egy adott bázis szerint.*

Kiindulási ismeretünk: a b vektor $b_1, \ldots, b_n$ adatai. Ezek nem mások mint b koordinátái a **kanonikus**

$$\mathcal{E} := \{e_i : \ i = 1, \ldots, n\} \ , \quad e_i := (\delta_{ij} : \ j = 1, \ldots, n)$$

bázisban:

$$b_i = [e_i]'_{\mathcal{E}}(b) \qquad (i = 1, \ldots, n) \ .$$

A döntő észrevétel az, hogy egyenként a Báziscsere lemma szerint kicserélve az $\mathcal{E}$ bázis elemeit az $\mathcal{A}$-éival, minden lépésben könnyen ki tudjuk számítani az új bázis szerinti koordinátákat az előzők alapján.

Tekintsük a Báziscsere lemmabeli szituációt. Azaz legyen H egy bázis a V vektortérben, $z \in V$ pedig egy vektor. Kérdés: Hogyan lehet megállapítani a z vektor H-beli koordinátáiból, hogy mikor marad egy $h \in H$ vektor v-vel való cseréje után a $G := (H \setminus \{h\}) \cup \{z\}$ halmaz bázis V-ben, és mik ilyenkor egy vektor G-beli koordinátái a H-beliekkel kifejezve?

Ha $h'_H(z) = 0$, akkor $z = \sum_{g \in H} g'_H(z)g = \sum_{g \in H\setminus\{h\}} g'_H(z)g$. Ilyenkor tehát z lineárisan függ már a $H \setminus \{h\}$-beli vektoroktól, azaz G nem lehet bázis.

Ha $h'_H(z) \neq 0$, akkor

$$z = \sum_{g\in H} g'_H(z)g = h'_H(z)h + \sum_{g\in H\setminus\{h\}} g'_H(z)g \ ,$$

$$h = \frac{1}{h'_H(z)}\big[z - \sum_{g\in H\setminus\{h\}} g'_H(z)g\big] \ .$$

Ha tehát $v \in V$ egy tetszőleges vektor, akkor

$$\begin{aligned} v &= \sum_{g\in H} g'_H(v)g = h'_H(v)h + \sum_{g\in H\setminus\{h\}} g'_H(v)g = \\ &= \frac{h'_H(v)}{h'_H(z)}\big[z - \sum_{g\in H\setminus\{h\}} g'_H(z)g\big] + \sum_{g\in H\setminus\{h\}} g'_H(v)g = \\ &= \frac{h'_H(v)}{h'_H(z)} z + \sum_{g\in H\setminus\{h\}} \big[g'_H(v) - \frac{h'_H(v)}{h'_H(z)} g'_H(z)\big] g \ . \end{aligned}$$

Speciálisan, a $0(=: v)$ vektor csak a csupa $0 = \frac{h'_H(0)}{h'_H(z)} = g'_H(0) - \frac{h'_H(0)}{h'_H(z)} g'_H(z)$ együtthatókkal állhat elő G-beli lineáris kombinációként. Vagyis a G vektorhalmaz most lineárisan független, amelyből lineáris kombinációként a V tér minden eleme előáll.

Tehát a következőket kaptuk:

Lemma. *Ha $h \in H$* bázis $\subset V$*, és $z \in V$ olyan vektor, amelyre $h'_H(z) \neq 0$, akkor H-ban a h vektort z-vel kicserélve, a $G := (H \setminus \{h\}) \cup \{z\}$ vektorhalmaz szintén bázis V-ben, és*

$$\left.\begin{aligned} z'_G(v) &= \frac{h'_H(v)}{h'_H(z)} \ , \\ g'_G(v) &= g'_H(v) - \frac{h'_H(v)}{h'_H(z)} g'_H(z) \end{aligned}\right. \qquad (h \neq g \in G\,,\ v \in V) \ .$$

Elnevezés. Egy H bázisról egy (egyetlen elemmel megváltoztatott) $(H \setminus \{h\}) \cup \{z\}$ alakú bázisra való áttérés szokásos elnevezése: **elemi bázistranszformáció**, amelyet a z vektor **bevitel**ével és a h vektor **elhagyás**ával hajtottunk végre.

Megjegyzés. A Dimenzó c. alfejezet tételének bizonyítása mutatja, hogy n elemi bázistranszformációval áttérhetünk az $\mathcal{E}$ bázisról a $\mathcal{A}$ bázisra. Nevezetesen, az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorokat egymás után (ebben a sorrendben) bevihetjük alkalmas $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}$-eket lépésenként elhagyva. Ha a k-adik lépésben kapott bázisunk

$$\mathcal{E}_k = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \mathcal{E} \setminus \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\} ,$$

(ahol $0 \le k < n$ és $\mathcal{E}_0 := \mathcal{E}$), akkor az i_{k+1} indexet tetszőlegesen választhatjuk az

$$\emptyset \neq I_k := \big\{i : \ 1 \le i \le n \, , \ i \neq i_1, \ldots, i_k \, , \ [e_i]'_{\mathcal{E}_k}(a_k) \neq 0\big\}$$

családból.

Példa. Oldjuk meg a

$$\begin{array}{llll} & 3x_2+ & 2x_3 & = 37 \\ 6x_1+ & 8x_2 & & = 86 \\ 5x_1+ & & 3x_3 & = 49 \end{array}$$

egyenletrendszert. Az

$$a_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} , \ a_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} , \ a_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} , \ b := \begin{pmatrix} 37 \\ 86 \\ 49 \end{pmatrix}$$

vektorokkal ez

$$b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 \ .$$

Kiindulás:

$$b = 37e_1 + 86e_2 + 49e_3 \ .$$

1. lépés: a_1 bevitele a bázisba.
Mivel $a_1 = 6e_2 + 5e_3$, csak e_2-vel vagy e_3-mal cserélhetjük ki a_1-et. Cseréljünk e_2-vel.

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{1}{6}a_1 - \frac{5}{6}e_3 \ , \\ b &= 37e_1 + 86e_2 + 49e_3 = 37e_1 + 86\big[\frac{1}{6}a_1 - \frac{5}{6}e_3\big] + 49e_3 = \\ &= \frac{43}{3}a_1 + 37e_1 - \frac{68}{3}e_3 \ , \\ a_2 &= 3e_1 + 8e_2 = 3e_1 + 8(\frac{1}{6}a_1 - \frac{5}{6}e_3) = \\ &= \frac{4}{3}a_1 + 3e_1 - \frac{20}{3}e_3 \ , \\ a_3 &= 2e_1 + 3e_3 \ . \end{aligned}$$

2. lépés: a_2 bevitele.

Mivel $a_2 = \frac{4}{3}a_1 + 3e_1 - \frac{20}{3}e_3$, kicserélhetjük a_2-t e_1-gyel vagy e_3-mal (hiszen $3 \neq 0$ ill. $\frac{20}{3} \neq 0$). Cseréljünk e_1-gyel.

$$\begin{aligned}
e_1 &= -\frac{4}{9}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{20}{9}e_3 \ , \\
b &= \frac{43}{3}a_1 + 37e_1 - \frac{68}{3}e_3 = \\
&= \frac{43}{3}a_1 + 37\big[-\frac{4}{9}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{20}{9}e_3\big] - \frac{68}{3}e_3 = \\
&= -\frac{19}{9}a_1 + \frac{37}{3}a_2 + \frac{536}{9}e_3 \ , \\
a_3 &= 2e_1 + 3e_3 = 2\big[-\frac{4}{9}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{20}{9}e_3\big] + 3e_3 = \\
&= -\frac{8}{9}a_1 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{67}{9}e_3 \ .
\end{aligned}$$

Utolsó lépés: a_3 cseréje e_3-mal.
Az a_3-ra kapott utolsó formulából kifejezve e_3-at,

$$\begin{aligned}
e_3 &= \frac{1}{67}\big(8a_1 - 6a_2 + 9a_3\big) \ , \\
b &= -\frac{19}{9}a_1 + \frac{37}{3}a_2 + \frac{536}{9}e_3 = \\
&= -\frac{19}{9}a_1 + \frac{37}{3}a_2 + \underbrace{\frac{536}{9 \cdot 67}}_{8/9}\big[8a_1 - 6a_2 + 9a_3\big] = \\
&= 5a_1 + 7a_2 + 8a_3 \ .
\end{aligned}$$

Tehát $x_1 = 5$, $x_2 = 7$, $x_3 = 8$.

Megjegyzés. 1) A kézi számítások meggyorsítására a fenti eljárásnak ügyes táblázatos elrendezései léteznek.

2) Az eljárás numerikus stabilitása nem jobb az eliminációs módszerekénél.

3) A báziscsere szerinti koordinátákra való áttérést főleg nem egyenletrendszer megoldására, hanem sok más algoritmus (pl. a lineáris optimalizálás **szimplex módszer**e) részeként használják.

Általános eset. Tekintsünk el most az $\{a_1, \dots, a_n\}$ bázis $\subset V$, $m = n$ feltevésektől. *Kiindulva a* $b \in \mathbb{K}^m$ *vektor kanonikus*

$$b = b_1e_1 + \cdots + b_me_m$$

$\mathcal{E}$*-beli felírásából, hajtsunk végre egymástól különböző* $\mathcal{E}$*-beli vektorok elhagyásával és* $\mathcal{A}(:= \{a_1, \dots, a_n\})$*-beli vektorok bevitelével elemi bázistranszformációkat mindaddig, amíg az lehetséges.*

Ekkor valamilyen $I \subset \{1, \dots, n\}$ és $J \subset \{1, \dots, m\}$ indexhalmazokkal egy

$$\mathcal{B} := \{a_i : \ i \in I\} \cup \{e_j : \ j \in J\}$$

alakú bázisához jutunk a $\mathbb{K}^m$ térnek (tehát $\#I + \#J = m$). Az a tény, hogy további $a_k \in \mathcal{A} \setminus \{a_i : \ i \in I\}$ oszlopvektorok már nem vihetők be úgy, hogy $\{e_j : \ j \in J\}$-beli egységvektort hagyunk el, azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned}
[e_j]'_{\mathcal{B}}(a_k) &= 0 \qquad (j \in J) \ , \\
a_k &= \sum_{u \in \mathcal{B}} u'_{\mathcal{B}}(a_k) u = \sum_{i \in I} [a_i]'_{\mathcal{B}}(a_k) a_i \in \\
&\in \mathrm{Span}\{a_i : \ i \in I\} \qquad (k = 1, \dots, n) \ .
\end{aligned}$$

Vagyis az egyenletrendszer oszlopvektorai által kifeszített

$$U := \mathrm{Span}(\mathcal{A})$$

altérre már

$$U = \mathrm{Span}\{a_i : \ i \in I\} \ .$$

Csak U-beli elemek lehetnek $\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n$ alakú lineáris kombinációk. Ezek felismerhetők a $\mathcal{B}$ szerinti koordinátákból:

$$v \in U \iff [e_j]'_{\mathcal{B}}(v) = 0 \quad (j \in J) \ .$$

Tehát, *ha* $\exists\, j \in J \ \ [e_j]'_{\mathcal{B}}(b) \neq 0$, *akkor nincs megoldása a* $(*)$ *rendszernek, ha pedig* $[e_j]'_{\mathcal{B}}(b) = 0 \ \ (j \in J)$, *akkor*

$$x_i := [a_i]'_{\mathcal{B}}(b) \qquad (i \in I) \ , \quad x_k := 0 \qquad (k \in \{1, \dots, n\} \setminus J)$$

egy megoldása $(*)$*-nak.*

Megjegyzés. Ha van megoldás, az összes megoldásokat úgy kaphatjuk, hogy a maradék $\mathcal{K} := \{1, \dots, n\} \setminus I$-beli indexekre tetszőleges x_k $(k \in \mathcal{K})$ értékeket veszünk, és a

$$b(x_k : \ k \in \mathcal{K}) := b - \sum_{k \in \mathcal{K}} x_k a_k$$

vektorral

$$x_i = [a_i]'_{\mathcal{B}}\big(b(x_k : \ k \in \mathcal{K})\big) \qquad (i \in I) \ .$$

(V.ö. a Gauss elimináció 2) esete.)

LINEÁRIS FUNKCIONÁLOK

Definíció. Legyen V egy vektortér (a $\mathbb{K}$ test fölött). A lineáris $V \to \mathbb{K}$ függvényeket V-fölötti **lineáris funkcionáloknak** hívjuk. A

$$\begin{aligned} V' &:= \{V \to \mathbb{K} \text{ lin. funkcionálok}\} \\ &= \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) \end{aligned}$$

vektortér a V tér **duális**a (**duális tere**).

Megjegyzés. A duális tér kategórialméleti szempontból kiemelkedően fontos: A $\mathbb{K}$ fölötti V vektortér alapján tisztán a linearitás fogalmával egy lépésben csak két új vektorteret definiálhatunk: a $V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ ill. az $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$ tereket.

A lineáris funkcionálok geometriai jelentőségét mutatja a következő.

> Lemma. *Egy vektortér bázis szerinti koordinátái lineáris funkcionálok. Azaz, ha E* bázis *$\subset V$ és $e \in E$, akkor $e'_E \in V'$.*

Bizonyítás. Az e'_E függvény linearitása adódik a szummáció linearitásából:

$$\sum_{h \in E} h'_E(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2) h = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 \ ,$$

$$\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 = \xi_1 \sum_{h \in E} h'_E(v_1) h + \xi_2 \sum_{h \in E} h'_E(v_2) h =$$

$$\sum_{h \in E} \big(\xi_1 h'_E(v_1) + \xi_2 h'_E(v_2)\big) h \ ,$$

ahonnan speciálisan e komponensére is $e'_E(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2) = \xi_1 e'_E(v_1) + \xi_2 e'_E(v_2)$.

A lineáris funkcionálok jól leírhatók geometriailag a 0-terük segítségével.

Példa. A $\big\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \big\rangle := \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \beta_k$ skalárszorzattal $\mathbb{R}^3$ lineáris funkcionáljai éppen a

$$\phi_a : x \mapsto \langle a, x \rangle \qquad (a \in \mathbb{R}^3)$$

függvények. (Ezt elemileg is könnyű bizonyítani, és következik pl. az alfejezet utolsó tételéből). Vegyük észre, hogy a ϕ_a funkcionál 0-tere, azaz a $\{x \in \mathbb{R}^3 : \phi_a(x) = 0\}$ alakzat egy *origón átmenő sík*, amely merőleges az a vektorra. Mivel egy síkra merőleges vektorok $\mathbb{R}^3$-ban egy az origón átmenő egyenest alkotnak, ha a ϕ_a és ϕ_b funkcionálok 0-tere ugyanaz a sík, akkor az $a, b(\neq 0)$ vektorok egymás konstansszorosai, azaz $\phi_b = \lambda\phi_a$ $(\exists\, \lambda \neq 0)$.

Definíció. Használni szokás (az előző példától motiválva) a

$$\langle \phi, v\rangle := \langle v, \phi\rangle := \phi(v) \qquad (v \in V\,,\ \phi \in V')$$

jelölési konvenciót.

A V vektortér **hipersík**jai a maximális valódi alterei. Azaz

$$U \text{ hipersík} \subset V \ \Leftrightarrow\ V \neq U \text{ altér} \subset V \text{ és } \mathrm{Span}(U \cup \{v\}) = V \ (0 \neq v \in V)\ .$$

Propozíció. *Legyen U altér a V vektortérben. Ekkor ekvivalensek*

(i) U *hipersík* $\subset V$,

(ii) $\exists\, E$ *bázis* $\subset V$ $\ \exists\, e \in E \qquad U = \mathrm{Span}(E \setminus \{e\})$,

(iii) $\exists\, \phi \in V' \setminus \{0\} \qquad U = \ker(\phi)$,

(iv) *a* V/U *faktortér* 1*-dimenziós.*

Bizonyítás. (i) $\Rightarrow$ (ii): Legyen

$$F \text{ bázis} \subset U\ ,\quad e \in V \setminus U\ ,\quad E := F \cup \{e\}\ .$$

Mivel $e \notin U = \mathrm{Span}(F)$, az e vektor lineárisan független F-től, és így az E vektorhalmaz lineárisan független. Feltevés szerint $\mathrm{Span}(U \cup \{e\}) = V$. Vagyis $\mathrm{Span}(E) = \mathrm{Span}(F \cup \{e\}) = \mathrm{Span}(\mathrm{Span}(F) \cup \{e\}) = \mathrm{Span}(U \cup \{e\}) = V$. Azaz E bázis $\subset V$ és $U = \mathrm{Span}(F) = \mathrm{Span}(E \setminus \{e\})$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Tegyük fel, hogy E bázis $\subset V$ és $U = \mathrm{Span}(E \setminus \{e\}) \neq V$. Ekkor szükségképpen $e \in E$ (másképp $V = U$ volna). Most a

$$\phi := e'_E$$

választás megfelel:

$$\langle \phi, v\rangle = e'_E(v) = 0\,,\ \Longrightarrow\ v = \sum_{h \in E} h'_E(v)h = \sum_{h \in E \setminus \{e\}} h'_E(v)h \in \mathrm{Span}(E \setminus \{e\}) = U\ ,$$

$$v \in U = \mathrm{Span}(E \setminus \{e\})\,,\ \Longrightarrow\ \exists\, \lambda \in \mathcal{F}_0(E \setminus \{e\}) \qquad v = \sum_{h \in E \setminus \{e\}} \lambda(h)h$$

$$\langle \phi, v\rangle = \sum_{h \in E \setminus \{e\}} \lambda(h)\ \underbrace{\langle \phi, h\rangle}_{e'_E(h) = \delta_{e,h} = 0} = 0\ .$$

(iii)$\Rightarrow$(iv): Legyen $U = \ker(\phi)$, $\phi \neq 0$. Vegyünk egy e vektort, amelyre $\langle \phi, e\rangle \neq 0$. Állítás: $V = U + \mathbb{K}e$. Bizonyítás: Ha $v \in V$, akkor

$$\langle \phi, v - \frac{\phi(v)}{\phi(e)}e\rangle = \langle \phi, v\rangle - \frac{\phi(v)}{\phi(e)}\langle \phi, e\rangle = \phi(v) - \frac{\phi(v)}{\phi(e)}\phi(e) = 0 \ ,$$
$$v - \frac{\phi(v)}{\phi(e)}e \in \ker(\phi) = U \ , \ \Rightarrow v \in U + \frac{\phi(v)}{\phi(e)}e \subset U + \mathbb{K}e \ .$$

Az állításból (iv) azonnal jön, hiszen most a $\xi \mapsto U + \xi e$ leképezés lineáris $\mathbb{K} \leftrightarrow V/U$, és $\dim(\mathbb{K}) = 1$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Tegyük fel, $\dim(V/U) = 1$, és legyen $e \notin U$. Ekkor $e \not\equiv 0$ (mod$U$), vagyis az $\widetilde{e} := e + U (\in V/U)$ mellékosztály különbözik $\widetilde{0} := U$-tól. Mivel $\dim(V/U) = 1$, ez azt jelenti, hogy

$$V/U = \mathbb{K}\widetilde{e} = \{\xi\widetilde{e} : \ \xi \in \mathbb{K}\} = \{\xi e + U : \ \xi \in \mathbb{K}\} \ ,$$
$$V = \bigcup_{M \in V/U} M = \bigcup_{\xi \in \mathbb{K}} (\xi e + U) = \mathbb{K}e + U = \mathrm{Span}(U \cup \{e\}) \ .$$

Következmény. *Altér metszete hipersíkkal hipersík az altérben vagy maga az altér.*

BIZONYÍTÁS. Legyen U hipersík $\subset V$ és M altér $\subset V$. Most (iii) szerint $U = \ker(\phi)$ valamilyen $0 \neq \phi \in V'$ lineáris funkcionállal. Legyen $\psi := \phi|M$ (a ϕ funkcionál megszorítottja M-re, azaz $\psi : M \ni v \mapsto \phi(v)$). Vegyük észre, hogy $\psi \in M'$. Így

$$M \cap U = \{v \in M : \ v \in U\} = \{v \in M : \ \phi(v) = 0\} =$$
$$= \{v \in M : \ \psi(v) = 0\} = \ker(\psi) \ .$$

Ha tehát $M \cap U \neq M$, akkor (iii) szerint $M \cap U = \ker(\psi)$ hipersík $\subset M$.

Megjegyzés. A (ii) $\Rightarrow$ (iii) implikáció bizonyításából kiderül az is, hogy $\ker(\phi) = \ker(\psi)$ esetén a ϕ, ψ lineáris funkcionálok egymás nem-0 többszörösei. Ennél azonban messze több is mondható. A következő geometriai jellemzése a lineáris funkcionálok lineáris függőségének az analízis egyik fontos lineáris algebrai segédeszköze (pl. a Lagrange-multiplikátorok hátterében ez áll).

Tétel. *Legyenek $\psi, \phi_1, \ldots, \phi_n \in V'$. Ekkor*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\phi_i) \subset \ker(\psi) \implies \exists \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \qquad \psi = \lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_n\phi_n \ .$$

Bizonyítás. Kiválasztva a ϕ_j funkcionálok közül minimális számút, amelyek magjának metszete már kiadja az

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\phi_i)$$

alteret, (és a többieket elhagyva), feltehető, hogy

$$U_k := \bigcap_{i:\ i\neq k} \ker(\phi_i) \neq U \qquad (k = 1, \ldots, n)\ .$$

Mindegyik k indexhez vegyünk egy $h_k \in U_k \setminus U$ vektort. Az U_k és az U alterek definíciója szerint $\phi_i(h_k) = 0 \neq \phi_k(h_k)$ $(i \neq k)$. Így az $e_k := \frac{1}{\phi_k(h_k)} h_k$ vektorok jól-definiáltak, és

$$\phi_i(e_k) = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, \ldots, n)\ .$$

Megmutatjuk, hogy

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i \qquad \text{ahol} \qquad \lambda_i := \psi(e_i) \quad (i = 1, \ldots, n)\ .$$

Bizonyítás: Legyen $v \in V$ egy tetszőlegesen rögzített vektor. Most

$$\begin{aligned} u := v - \sum_{k=1}^{n} \phi_k(v) e_k \ \ \text{mellett} \\ \langle \phi_i, u \rangle = \langle \phi_i, v \rangle - \sum_{k=1}^{n} \phi_k(v) \langle \phi_i, e_k \rangle = \\ = \phi_i(v) - \sum_{k=1}^{n} \phi_k(v) \delta_{ik} = \phi_i(v) - \phi_i(v) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)\ . \end{aligned}$$

Ezért $u \in U$, és így $\psi(u) = 0$. Innen

$$\begin{aligned} \langle \psi, v \rangle = \langle \psi, u + \sum_{k=1}^{n} \phi_k(v) e_k \rangle = \underbrace{\psi(u)}_{0} + \sum_{k=1}^{n} \phi_k(v) \underbrace{\langle \psi, e_k \rangle}_{\lambda_k} = \\ = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_k(v) = \langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_k, v \rangle\ . \end{aligned}$$

A duális tér függvény-reprezentációja

Emlékeztető. Véve egy tetszőleges E bázist a V vektortérben, $V \simeq \mathcal{F}_0(E)$. Azaz a V vektortér *reprezentálható* az E-n véges tartójú függvényekkel.

Nevezetesen, a $v \mapsto \big[E \ni e \mapsto e'_E(v)\big]$ leképezés egy $V \leftrightarrow \mathcal{F}_0(E)$ izomorfizmus. Ebben a reprezentációban az $f \in \mathcal{F}_0(E)$ véges tartójú függvénynek a $\sum_{e\in E} f(e)e$ vektor felel meg.

> Lemma. *Egy lineáris funkcionált egyértelműen meghatároznak egy bázison felvett értékei. Nevezetesen, ha $\phi \in V'$ és E bázis $\subset V$, akkor*
> $$\big\langle \phi, v\big\rangle = \sum_{e\in E} e'_E(v)\langle \phi, e\rangle \qquad (v \in V)\ .$$

Bizonyítás. Azonnal adódik ϕ linearitásából és a $v = \sum_{e\in E} e'_E(v)e$ előállításból.

> Tétel. *Legyen E bázis $\subset V$. Ekkor tetszőleges $f : E \to \mathbb{K}$ függvényhez létezik pontosan egy $\phi_f \in V'$ funkcionál, amelyre*
> $$\big\langle \phi_f, e\big\rangle = f(e) \qquad (e \in E)\ ,$$
> *és az $f \mapsto \phi_f$ leképezés egy $\mathcal{F}(E) \leftrightarrow V'$ izomorfizmus.*

Bizonyítás. A lemma szerint a ϕ_f funkcionál egyértelműen meghatározott, ha létezik, és

$$\big\langle \phi_f, v\big\rangle = \sum_{e\in E} e'_E(v)f(e) \qquad (v \in V)\ .$$

Tetszőlegesen adott $v \in V$ vektor mellett az $e \mapsto f(e)e'_E(v)$ függvény véges tartójú (mivel a v-t reprezentáló $e \mapsto e'_E(v)$ véges tartójú). Így a $\sum_{e\in E} e'_E(v)f(e)$ $(v \in V)$ összegek mind jól-definiáltak. Az összegzés linearitása miatt pedig $\big[v \mapsto \sum_{e\in E} e'_E(v)f(e)\big] \in V'$, és azonnal következik az $R : f \mapsto \phi_f$ leképezés linearitása is. Triviálisan $f \neq g \Rightarrow \phi_f \neq \phi_g$. Végül, mivel a lemma szerint

$$\psi = \phi_{\big[e\mapsto\psi(e)\big]} \qquad (\psi \in V')\ ,$$

fennáll $R : \mathcal{F}_0(E) \leftrightarrow V'$.

> Következmény. 1) *Ha* $\dim(V) = n < \infty$, *akkor* $\dim(V') = n$.
>
> 2) *Az $\mathcal{F}_0(X)'$ duális tér azonosítható $\mathcal{F}(X)$-szel. Nevezetesen, az $\mathcal{E} := \{1_{\{x\}} :\ x \in X\}$ függvényrendszer* bázis $\mathcal{F}_0(X)$-ben, és az $f \in \mathcal{F}(X)$ függvényt azonosítva az $\mathcal{E}$ bázis szerinti ϕ_f függvénnyel,*
> $$\big\langle f, g\big\rangle = \sum_{x\in X} f(x)g(x) \qquad (f \in \mathcal{F}(X)\,,\ g \in \mathcal{F}_0(X))\ .$$

Példa. Sokáig híres probléma volt az a kérdés, hogy az

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\ ,\quad f(1) = 1 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

Cauchy-féle függvényegyenletnek van-e más $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldása, mint a triviális $f(x) \equiv x$. A válasz, amit először **Hamel** adott meg, épp az iménti tételen alapszik.

Vegyük a valós egyenest mint a racinális számok fölötti $\mathbb{R}_{\mathbf{Q}}$ vektorteret. Ekkor *bármely* $f \in (\mathbb{R}_{\mathbf{Q}})'$ *funkcionál megoldása a Cauchy-egyenletnek, amelyre* $f(1)=1$, hiszen ekkor mindig $f(x+y) = f(1 \cdot x + 1 \cdot y) = 1 \cdot f(x) + 1 \cdot f(y)$. (Az $\mathbb{R}_{\mathbf{Q}}$ térről ld. a "Dimenzió" alfejezet 3) példája). Az egy-elemű $\{1\}$ hamazt kiegészíthetjük (rendkívül sokféleképpen) egy $\mathcal{H}$ bázisává $\mathbb{R}_{\mathbf{Q}}$-nak. A tétel szerint van pl. olyan $f_{\mathcal{H}} \in (\mathbb{R}_{\mathbf{Q}})'$ funkcionál, amely a $\mathcal{H} \setminus \{1\}$ halmazon azonosan 0, és $f_g(1) = 1$. Az ilyen $f_{\mathcal{H}}$ funkcionálok mindegyike olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ függvény, amely megoldása a Cauchy egyenletnek. Ezek egyike sem lehet a triviális $x \mapsto x$ megoldás, mivel az irracionális helyen irracionális értéket vesz föl.

Megjegyzés. Bebizonyítható a tételből a végtelen számosságok aritmetikájával, hogy

$$\dim(V') > \dim(V) \quad \text{ha } V \text{ nem véges dimenziós .}$$

Példa. A 2-elemű $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$ test mellett jól szemléltethető az előbbi megjegyzés. Legyen X egy végtelen halmaz, $V := \mathcal{F}_0(X, \mathbb{Z}_2)$. Most a 2) következménybeli azonosítást elvégezve,

$$V' \simeq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z}_2) = \{1_S :\ S \subset X\}\ .$$

Ha $\mathcal{B}$ bázis $\subset \{1_S :\ S \subset X\}$, akkor

$$\begin{aligned}\dim(V') &= \#\mathcal{B} = \#\mathcal{B} \cdot \#\mathbb{N} = \#\{1_S :\ S \subset X\} = \#\{X \text{ részhalmazai}\} > \\ &> \#X = \#\mathcal{E} = \dim(V)\ .\end{aligned}$$

Megjegyzés. A lineáris funkcionálok függvény-reprezentációja alapján könnyen meg lehet mutatni, hogy az előző alfejezet tétele $n(< \infty)$ helyett végtelen sok funkcionállal általában nem állhat.

Példa. Legyenek a $V := \mathcal{F}_0(\mathbb{N})$ tér duálisában ψ az $1_{\mathbb{N}}$-nek megfelelő, $\phi_1, \phi_2, \ldots$ pedig az $1_{\{1\}}, 1_{\{2\}}, \ldots$ függvényeknek megfelelő lineáris funkcionálok. Azaz

$$\psi : g \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} g(k)\quad ,\qquad \phi_i : g \mapsto g(i) \qquad (i = 1, 2, \ldots)\ .$$

Ekkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\phi_i) = \{0\} \subset \ker(\psi)$, de $\psi \notin \mathrm{Span}\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$. Ugyanis, $\psi \in \mathrm{Span}\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ esetén valamilyen $n < \infty$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mellett $\psi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_k$ volna, ahonnan az

$$1 = \left\langle \psi, 1_{\{n+1\}} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\left\langle \phi_k, 1_{\{n+1\}} \right\rangle}_{0} = 0$$

ellentmondás következne.

Duális bázis

Definíció. Legyen V egy vektortér és E bázis $\subset V$. Az E-szerinti koordinátafunkcionálok családját a továbbiakban E'-vel jelöljük, és **az E bázis duálisá**nak nevezzük. Tehát

$$E' := \{e'_E : \ e \in E\} ,$$
$$\text{ahol } \ e'_E : v \mapsto \big[\lambda \in \mathbb{K} : \ v - \lambda e \in \operatorname{Span}(E \setminus \{e\})\big] \qquad (e \in E) .$$

(Az e'_E funkcionálnak ez a direkt leírása kiolvasható a "Lineáris funkcionálok" alfejezetbeli Propozició (ii) $\Rightarrow$ (iii) implikációjának a bizonyításából.)

Propozíció. *Legyen E bázis a V vektortérben. Ekkor E' lin.fgtlen $\subset V'$. Ha $\dim(V) < \infty$, akkor $\{e'_E : \ e \in E\}$ bázis V'-ben.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy $e_1, \ldots, e_n \in E$. Ha $e'_i := [e_i]'_E$ $(i = 1, \ldots, n)$-et írva $\lambda_1 e'_1 + \cdots + \lambda_n e'_n = 0$, akkor

$$0 = \lambda_1 e'_1(e_j) + \ldots + \lambda_n e'_n(e_j) = \lambda_j \ (j = 1, \ldots, n) .$$

Tehát $\{e'_E : \ e \in E\}$ lin.fgtlen $\subset V'$.

Tudjuk: $n = \dim(V) < \infty$ esetén $n = \dim(V')$, és így bázisa minden n-elemű lineárisan független részhalmaza V'-nek. Vagyis ha $\{e_1, \ldots, e_n\}$ bázis $\subset V$, akkor $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ bázis $\subset V'$.

Megjegyzés. A V' duális tér E bázis szerinti

$$\phi_f := \big[\psi \in V' : \ \langle \psi, e \rangle = f(e) \ \ (e \in E)\big] \qquad (f \in \mathcal{F}(E))$$

függvényreprezentációjával

$$e'_E = \phi_{1_{\{e\}}} \qquad (e \in E) ,$$
$$\operatorname{Span}(E') = \big\{\phi_f : \ f \in \operatorname{Span}\{1_{\{e\}}\}\big\} = \big\{\phi_f : \ f \in \operatorname{Span}\big(\mathcal{F}_0(E)\big)\big\} .$$

Ha tehát a V vektortér végtelen dimenziós, akkor $\operatorname{Span}(E') \neq V' = \{\phi_f : \ f \in \mathcal{F}(E)\}$. Vagyis *végtelen dimenziós vektortér bázisának a duálisa nem bázis a duális térben.*

Definíció. Ha a V vektortér véges dimenziós és E bázis $\subset V$, akkor az

$$E' := \{e'_E : \ e \in E\}$$

funkcionálcsaládot az E bázis **duális bázis**ának nevezzük.

Megjegyzés. Mivel a lineáris funkcionálokat meghatározzák egy bázison felvett értékeik, egy n-dimenziós téren az $\{e_1, \ldots, e_n\}$ bázis duálisa az az $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ funkcionálcsalád, amelyre

$$\langle e'_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)\ .$$

Véges dimenziós tér reflexivitása

Lemma. *Legyen V egy vektortér és $a \in V$. A V' téren értemezett $\delta_a : \phi \mapsto \langle \phi, a \rangle$ leképezés lineáris funkcionál V'-n, azaz V''-be tartozik. A $v \mapsto \delta_v$ leképezés a V vektortér injektív lineáris leképezése a V'' biduális egy alterére.*

Bizonyítás. Egy δ_a alakú funkcionál linearitása, azonnal adódik a

$$\begin{aligned}\delta_a(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) &= \big\langle \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2, a \big\rangle = \lambda_1\langle \phi_1, a\rangle + \lambda_2\langle \phi_2, a\rangle = \\ &= \lambda_1\delta_a(\phi_1) + \lambda_2\delta_a(\phi_2) \qquad (\phi_1, \phi_2 \in V'\ ,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K})\end{aligned}$$

levezetésből. Azaz $\delta_a \in (V')' = V''$ $(a \in V)$. Hasonlóképpen

$$\begin{aligned}\delta_{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}(\phi) &= \big\langle \phi, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \big\rangle = \lambda_1\langle \phi, a_1\rangle + \lambda_2\langle \phi, a_2\rangle = \\ &= \lambda_1\delta_{a_1}(\phi) + \lambda_2\delta_{a_2}(\phi) \qquad (\phi \in V'\ ,\ a_1, a_2 \in V\ ,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K})\ ,\end{aligned}$$

ahonnan $\big[a \mapsto \delta_a\big] \in \mathcal{L}(V, V'')$.

Végül, ha $a, b \in V$ és $a \neq b$, akkor az $e := a - b$ vektorra $e \neq 0$ és $\delta_a - \delta_b = \delta_e$. Tehát, ahhoz hogy belássuk a $v \mapsto \delta_v$ leképezés injektivitását, azt kell megmutatnunk, hogy most $\delta_e \neq 0$, azaz hogy $\delta_e(\phi) = \langle \phi, e\rangle \neq 0$ valamilyen $\phi \in V'$ funkcionál mellett. Mivel $e \neq 0$ az 1-elemű $\{e\}$ vektorhalmaz lineárisan független. Így Hamel tétele szerint kiegészíthető egy E bázisává V-nek. Most $\delta_e(e'_E) = \langle e'_E, e\rangle = 1 \neq 0$.

Megjegyzés. A bizonyítás közben beláttunk egy önmagában is érdekes (bár nem meglepő) tényt: *Minden nem-0 vektorhoz található olyan lineáris funkcionál, amely annál a vektornál nem-0 értéket vesz fel.*

Definíció. Legyen V egy vektortér és $v \in V$. A

$$\delta_v := \big[V' \ni \phi \mapsto \langle \phi, v \rangle\big]$$

funkcionált a v vektor **biduális beágyazottjá**nak nevezzük. Szokásos még a v'' jelölés is a *Dirac*tól származó δ_v helyett. A $v \mapsto \delta_v$ leképezés a V tér **kanonikus beágyazásá**a V''-be. Jelölésére gyakran használják $V \hookrightarrow V''$ szimbólumot.

Tétel. *Legyen V egy vektortér és $E := \{e_1, \ldots, e_n\}$ bázis $\subset V$. Ekkor*

1) $\dim(V') = \dim(V'') = \dim(V^{(3)}) = \cdots = n$,
2) $E^{(k)}$ bázis $\subset V^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$,
3) $V'' = \{\delta_v : \ v \in V\}$.
4) $E'' = \{\delta_{e_i} : \ i = 1, \ldots, n\}$.

Bizonyítás. 1)2) indukcióval következik az előző alfejezet Propozíciójából.

3) A $v \mapsto \delta_v$ izomorfia (lineáris $1-1$-leképezés) V és a V'' biduális $U := \{\delta_v : \ v \in V\}$ altere között. Ezért $\dim(V) = \dim(U)$, és így $\dim(U) = \dim(V'') = n$. Egy $n(< \infty)$ dimenziós térnek azonban csak önmaga lehet n-dimenziós altere.

4) Legyen

$$e'_j := [e_j]'_E \ , \quad e''_j := [e'_j]'_{E'} \qquad (j = 1, \ldots, n) \ .$$

Tudjuk: E'' mint az E' duális bázisa egyértelműen jellemezhető a

$$\langle e''_i, e'_j \rangle = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

relációkkal. Csakhogy

$$\langle \delta_{e_i}, e'_j \rangle = \langle e_i, e'_j \rangle = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

is áll. Tehát $e''_i = \delta_{e_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Megjegyzés. A V tér (algebrai értelemben vett) **reflexivitás**a alatt azt a tényt értjük, hogy a biduális beágyazottja (a $\{\delta_v : \ v \in V\}$ altere V''-nek) kiadja a teljes V''-t.

Szokás ezért *azonosítani* a V'' teret a kiindulási V-vel úgy, hogy a δ_v beágyazottat mindig azonosnak tekintjük $v \in V$-vel. Ezzel az azonosítással

$$\begin{array}{ll} V^{(3)} = (V'')' = V' & V^{(4)} = (V^{(3)})' = V'' \\ V^{(5)} = (V^{(4)})' = V' & V^{(6)} = (V^{(3)})' = V'' \\ \vdots & \vdots \end{array} .$$

Így értelmet kapnak a

$$\langle \Phi, \Psi \rangle \qquad (\Phi \in V^{(2k-1)} \ , \ \Phi \in V^{(2m)})$$

alakú kifejezések is. Az $I_p : V^{(p)} \ni \theta\delta_\theta$ $(p = 0, 1, \ldots)$ azonosító leképezésekkel

$$\left\langle \Phi, \Psi \right\rangle := \left\langle I_1^{-1} \cdots I_{2k-3}^{-1} \Phi, I_0^{-1} \cdots I_{2m-2}^{-1} \Psi \right\rangle .$$

Megjegyzés. Ha a V tér végtelen dimenziós, $\dim(V) < \dim(V')$, mint már megjegyeztük. Tehát *algebrai értelemben csak a véges dimenziós terek reflexívek.*

Azt a tényt, hogy egy véges dimenziós vektortér duálisa is ugyanannyi dimenziós, mint az eredeti tér, bázisfüggetlen módon nem lehet kihasználni.

MÁTRIXOK

Lineáris leképezés vektor reprezentációja

Tétel. *Egy lineáris leképezést egyértelműen meghatározzák egy bázison felvett értékei. Sőt, ha V_1, V_2 vektorterek és E bázis $\subset V_1$, akkor*

$$\forall\, A_0 : E \to V_2 \;\; \exists!\, A \in \mathcal{L}(V_1, V_2) \qquad A|E = A_0\ .$$

Nevezetesen, ez a $A : \sum_{e\in E} \xi_e \cdot e \mapsto \sum_{e\in E} \xi_e A_0(e)$ leképezés.

Bizonyítás. A "Lineáris funkcionálok függvény-reprezentációja" alfejezet tétele ennek a $V_2 := \mathbb{K}$ speciális esete. A bizonyítás szó szerint átvihető (az ottani $f : E \to \mathbb{K}$ függvénynek itt $A_0 : E \to V_2$ felel meg).

Példa. A Cauchy-féle függvényegyenlet összes megoldásait le tudjuk írni $\mathbb{R}_{\mathbf{Q}}$ egy bázisa segítségével a tétel alapján:

Ha f megoldása a Cauchy-egyenletnek, akkor

$$\begin{aligned}
&f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2\cdot f(0)\,, \Rightarrow f(0) = 0\ ,\\
&f(x) + f(-x) = f(x-x) = 0\,, \Rightarrow f(-x) = -f(x)\ ,\\
&f(nx) = f(\underbrace{x+\cdots+x}_{n}) = \underbrace{f(x)+\cdots+f(x)}_{n} = n\cdot f(x)\ ,\\
&n\cdot f\Big(\frac{m}{n}x\Big) = f(mx) = m\cdot f(x)\,, \Rightarrow f\Big(\frac{m}{n}x\Big) = \frac{m}{n}f(x) \qquad (n,m = 1,2,\ldots)\ ,\\
&f(\rho\cdot x) = \rho\cdot f(x) \qquad (\rho\in\mathbb{Q}\ ,\ x\in\mathbb{R})\ .
\end{aligned}$$

Következésképpen ilyenkor az f függvény $\mathbb{R}_{\mathbf{Q}} \to \mathbb{R}_{\mathbf{Q}}$ lineáris. Másrészt bármely $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{\mathbf{Q}})$-re triviálisan $f(x+y) \equiv f(x) + f(y)$. Így

$$\big\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) :\ f(x+y) = f(x) + f(y)\ \ (x,y\in\mathbb{R})\big\} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_{\mathbf{Q}})\ .$$

Vagyis véve egy tetszőleges $\mathcal{H}$ Hamel-bázist $\mathbb{R}_{\mathbf{Q}}$-ban, továbbá egy tetszőleges $f_0 : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ függvényt, f_0-nak a $\mathbb{Q}$ -lineáris kiterjesztésével $\mathbb{R}$-re megkapjuk az $f(x+y) \equiv f(x) + f(y)$ egyenlet egy általános megoldását.

Megjegyzés. Ettől kezdve elsősorban VÉGES DIMENZIÓS terekre mondjuk ki az eredményeket. Az általánosításuk tetszőleges vektortérre nagyrészt egyszerű formalitás. A legtöbb végtelen dimenziós Hamel-bázis algoritmikusan áttekinthetelen szerkezete miatt azonban ezek az általánosítások ritkán találnak olyan érdekes alkalmazásra, mint az előbbi példa.

Definíció. Legyen V egy n-dimenziós vektortér. Az $E := (e_1, \dots, e_n) \in V^n$ vektor-n-es **rendezett bázis** V-ben, ha $\{e_1, \dots, e_n\}$ bázis $\subset V$. Formulákban ezt relációt az E rend.bázis $\subset E$ kifejezéssel rövidítjük.

A tételből azonnal adódik az alábbi.

Következmény. *Ha* $\dim(V_1) = n$ *és* $E := (e_1, \dots, e_n)$ rend.bázis $\subset V_1$, *akkor*

$$\forall\ (a_1, \dots, a_n) \in V_2^n \quad \exists!\ A \in \mathcal{L}(V_1, V_2) \qquad Ae_j = a_j \quad (j = 1, \dots, n)\ .$$

Definíció. A továbbiakban $A(E)$-vel (vagy AE-vel) jelöljük az

$$A(E) := (Ae_1, \dots, Ae_n)$$

vektorrendszert valahányszor A egy $V_1 \to V_2$ függvény és $E := (e_1, \dots, e_n) \in V_1^n$.
Láttuk: $\forall\ F \in V_2^n \quad \exists!\ A : V_1 \to V_2$ lineáris $\qquad A(E) = F$.
Ennek alapján bevezetjük a következő jelölést:

$$F : E := \big[A \in \mathcal{L}(V_1, V_2) :\ AE = F\big] \qquad (E \text{ rend.bázis} \subset V_1\,,\ F \in V_2^n)\ .$$

Az $F : E$ alak helyett a formulák szuggesztívabb kifejezése céljából F/E-t ill. $\dfrac{F}{E}$-t is írunk (pl. áll az $\dfrac{F}{E}E = F$ azonosság).

Példa. 1) A $\mathbb{K}$ testet ($\mathbb{K}$-fölötti) 1-dimenziós vektortérnek felfogva, akármelyik $a \neq 0$ számra $\{a\}$ bázis $\subset \mathbb{K}$, és így (a) rend.bázis $\subset \mathbb{K}$. Bármely $b \in \mathbb{K}$ mellett $\{(b)\}/\{(a)\}$ a

$$\{(b)\}/\{(a)\}\ :\ x \mapsto (b/a) \cdot x$$

lineáris $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ leképezés.

2) Általában is,

$$\left\{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right\}/\{(a)\} \;:\; \mathbb{K} \ni x \mapsto x \cdot \begin{pmatrix} b_1/a \\ \vdots \\ b_n/a \end{pmatrix} .$$

3) E-vel jelölve $\mathbb{K}^m$ kanonikus bázisát (azaz $e_i := (\delta_{ij} \;:\; j = 1, \ldots, m)$ az $i = 1, \ldots, m$ indexekre), ha $F := (c_1, \ldots, c_m)$, ahol $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{K}$, akkor $F/E \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}) = (\mathbb{K}^m)'$ az

$$F/E \;:\; (\xi_j \;:\; j = 1, \ldots, m) \mapsto c_1 x_1 + \cdots + c_m x_m$$

lineáris funkcionál.

4) $\mathbb{K}^m$-ben véve tetszőleges E rendezett bázist, ha $F \in (\mathbb{K}^n)^m$ a $0 \in \mathbb{K}^n$ vektor m példányából álló m-es, akkor triviálisan $F/E : x \mapsto 0$.

5) $\mathbb{R}^2$-ben rendezett bázis az

$$E := (e_1, e_2) := \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

pár. Az $F := (e_1, -e_2)$ párba E-t az

$$F/E \;: \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 \mapsto \xi_1 e_1 - \xi_2 e_2$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

lineáris $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés viszi át. Ez geometriailag tükrözés az $\mathbb{R}e_1$ egyenesre.

Propozíció. *Legyenek V, W, Z vektorterek. Tegyük fel, hogy $\dim(W) = \dim(Z) = n$, továbbá $E \in V^n$ egy tetszőleges vektor-n-es Z-ből és F, G rendezett bázisok W-ben ill. Z-ben. Ekkor*

1) $\dfrac{G}{G} = \mathrm{id}_Z = \big[z \mapsto z\big]$

2) $\dfrac{E}{F}\dfrac{F}{G} = \dfrac{E}{F} \circ \dfrac{F}{G} = \dfrac{E}{G}$.

Bizonyítás. Legyen $E := (e_1, \ldots, e_n)$, $F := (f_1, \ldots, f_n)$, $G := (g_1, \ldots, g_n)$. Ekkor

1) $\dfrac{G}{G} : g_j \mapsto g_j \quad (j = 1, \ldots n), \;\Rightarrow\; \dfrac{G}{G} : \;\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \zeta_j g_j \mapsto \sum_{j=1}^{n} \zeta_j g_j$,

2) $\dfrac{E}{F} \circ \dfrac{F}{G} : \; g_j \overset{\frac{F}{G}}{\mapsto} f_j \overset{\frac{E}{F}}{\mapsto} e_j \quad (j = 1, \ldots, n)$,

$\quad\;\dfrac{E}{G} : \; g_j \mapsto e_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$, vagyis az $\dfrac{E}{F}\dfrac{F}{G}$ leképezés egybeesik $\dfrac{E}{G}$-vel a G bázison, így mindenütt is.

Megjegyzés. A propozíció 2) pontja mutatja, miért célszerű a lineáris leképezések összetételét a számok szorzásához hasonlóan $A \circ B$ helyett AB-vel jelölni.

Bár "vektort vektorral osztani" nem lehet, formálisan beszélhetünk rendezett vektor-n-esek osztásáról, ha a "nevező" bázis egy n-dimenziós vektortérben (a "hányados" egy lineáris leképezés). Tehát a nem-zéró számokkal analóg szerepet a bázisok játsszák. Később a determinánsok definíciójának ez az észrevétel lesz a heurisztikus alapja.

Lineáris leképezés mátrix-reprezentációja

Direkt számítások céljára egy lineáris leképezés vektor-reprezentációja még kevéssé alkalmas, ahhoz csupa számokból álló objektumokat célszerű használni. Ilyet a vektor-reprezentácó alapján már könnyű konstruálni: Egy n-dimenziós térben a vektorokat azonban bármelyik bázis segítségével szám-n-esekké kódolhatjuk. Mivel egy m-dimenziós térből n-dimenziósba vivő lineáris leképezést tökéletesen leírhatunk m db. n-dimenziós vektorral, így azt tökéletesen reprezentáhatjuk $n \times m$ számmal a következőképpen.

Definíció. Az $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ leképezés **mátrix**a a V_1-beli $E := (e_1, \ldots, e_n)$, ill. V_2-beli $F := (f_1, \ldots, f_m)$ rendezett bázisok szerint az

$$\Big[(i,j) \mapsto \big\langle f_i', Ae_j \big\rangle : \; i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n\Big]$$

függvény, ahol $(f_1', \ldots, f_m') =: F'$ az F rendezett bázis duálisa. A fizikusok terminológiájához közelebb álló szóhasználattal ez az A **operátor mátrixa az** E, F **koordinátarendszerekben**, amelynek jelölése

$$F'AE \; .$$

Tétel. *Ha V_1, V_2 vektorterek, $E := (e_1, \ldots, e_n)$ és $F := (f_1, \ldots, f_n)$ rendezett bázisok V_1-ben ill. V_2-ben, akkor*

$$\forall \, \alpha : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K} \;\; \exists ! \, A \in \mathcal{L}(V_1, V_2) \qquad F'AE = \alpha \; .$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha := \big[(i,j) \mapsto \alpha_{ij} : \; i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n\big]$ tetszőlegesen adott. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ operátor mátrixa az E, F koordinátarendszerekben α. Ekkor

$$\begin{aligned} Ae_j &= \sum_{i=1}^{m} \langle f_i', Ae_j \rangle f_i = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i \qquad (j = 1, \ldots, n) , \\ Av &= A \sum_{j=1}^{n} \langle e_j', v \rangle e_j = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j', v \rangle Ae_j = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \langle e_j', v \rangle f_i \qquad (v \in V_1) \end{aligned}$$

lehet csak. (Emlékeztető: a szummázásokat tetszőleges sorrendben tehetjük.) Tehát α egyértelműen meghatározza az A operátort. Másrészt, a legutóbbi formula bármely $\alpha : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$ mellett értelmes, és olyan lineáris $A : V_1 \to V_2$ leképezést definiál, amelynek mátrixa a fenti számítások megfordíthatósága alapján éppen α.

Definíció. A $\mathbb{K}$ test fölötti $m \times n$-es **mátrix**nak nevezzük az

$$\begin{aligned} \alpha : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} &\to \mathbb{K} \\ (i, j) &\mapsto \alpha_{ij} \end{aligned} \tag{M}$$

alakú függvényeket. A családjukat $\mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K})$ szokta jelölni (ha a $\mathbb{K}$ test nyilvánvaló a kontextusból, írhatunk $\mathrm{Mat}(m, n)$-et egyszerűen).

A mátrixokkal való számoláshoz a lineáris algebra kifejlesztette a következő nagyon hatásos és természetes írásmódot: Az

$$\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

táblázatos formát használjuk az (M) elméleti alak helyett. Ezt az

$$\alpha := \left(\alpha_{ij} \right)_{i=1,\, j=1}^{m \quad n}$$

kifejezéssel rövidítjük.

Megjegyzés. Ha az A operátor mátrixa $\alpha := \left(\alpha_{ij}\right)_{i=1,\,j=1}^{m\quad n}$, az $(e_1, \ldots, n)$, $(f_1, \ldots, f_m)$ koordinátarendszerek szerint, akkor a hatását a következőképpen írhatjuk le:

$$
\begin{array}{rcccc}
A: & e_1 & e_2 & \ldots & e_n \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & \alpha_{11} f_1 & \alpha_{12} f_1 & & \alpha_{1n} f_1 \\
 & + & + & & + \\
 & \alpha_{21} f_2 & \alpha_{22} f_2 & & \alpha_{2n} f_2 \\
 & + & + & & + \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & + & + & & + \\
 & \alpha_{m1} f_m & \alpha_{m2} f_m & & \alpha_{mn} f_m
\end{array} \quad .
$$

Különösen fontos ennek a következő alapesete.

Definíció. $\mathbb{K}^n$ **rendezett kanonikus bázis**a az

$$
\mathbf{1}_n := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)
$$

egységvektor-n-es.

Ha az $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ mátrixa $\left(\alpha_{ij}\right)_{i=1,\,j=1}^{m\quad n}$, a a kanonikus $\mathbf{1}_n$, $\mathbf{1}_m$ koordinátarendszerek szerint, akkor a hatása

$$
\begin{array}{cccc}
\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & & \mathbf{e}_n \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \\ \cdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}
\end{array},
$$

ahol $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ rendre az $\mathbf{1}_n$-beli egységvektorok.

Definíció. Az előbbi észrevétel alapján szokásos (főleg az alkalmazott matematikában), hogy az $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lineáris leképezéseket *azonosítjuk* az $\mathbf{1}_n$, $\mathbf{1}_m$ rendszerbeli mátrixukkal.

Példa. A $m \times n$-es mátrixokat azonosítva a lineáris $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ leképezésekkel, egy $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ operátor mátrixa az E, F koordinátarendszerben nem más, mint

$$
F'AE \;\equiv\; (\mathbf{1}_m : F) A (E : \mathbf{1}_n) \quad (: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m) \; .
$$

Bizonyítás. Legyen $Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i \quad (j = 1, \dots, n)$. Az $(E : \mathbf{1}_n)$ operátor $\mathbb{K}^n$ j-edik egységvektorát, $\mathbf{e}_j^{(n)}$-et e_j-be, $(\mathbf{1}_m : F)$ pedig f_i-t $\mathbf{e}_i^{(m)}$-be viszi. Vagyis

$$(\mathbf{1}_m : F)A(E : \mathbf{1}_n) : \ \mathbf{e}_j^{(n)} \overset{E:\mathbf{1}_n}{\mapsto} e_j \overset{A}{\mapsto} Ae_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i \overset{\mathbf{1}_m:F}{\mapsto} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \mathbf{e}_i^{(m)} .$$

Megjegyzés. Az $m \times n$-es mátrixoknak mint $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{K}$ függvényeknek van természetes összege és $\mathbb{K}$-keli skalárokkal való szorzata. Azaz a $\mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K})$ tér vektortér a $\mathbb{K}$ test fölött az

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11}+\mu\beta_{11} & \dots & \lambda\alpha_{1n}+\mu\beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda\alpha_{m1}+\mu\beta_{m1} & \dots & \lambda\alpha_{mn}+\mu\beta_{mn} \end{pmatrix}$$

műveletekkel $(\alpha, \beta \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K}),\ \lambda, \mu \in \mathbb{K})$. Ez kompatibilis az előbbi azonosítással: Triviálisan teljesül általában is a következő.

Lemma. *Ha az $A, B \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ operátorok mátrixa az E, F koordinátarendszerek szerint rendre $\alpha, \beta \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K})$, akkor tetszőleges λ, μ konstansok mellett $\lambda A + \mu B$ mátrixa E, F szerint $\lambda\alpha + \mu\beta$.*

Definíció. Legyenek V_1, V_2 vektorterek. A $\phi \in V_1'$ funkcionál **szorzat**a az $f \in V_2$ vektorral az

$$f \otimes \phi : \ V_1 \ni v \mapsto \phi(v) \cdot f$$

lineáris leképezés.

Tétel. *Legyenek $E := (e_1, \dots, e_n)$ ill. $F := (f_1, \dots f_m)$ rendezett bázisok a V_1 ill. V_2 vektorterekben, $(e_1', \dots, e_n')$ ill. $(f_1', \dots f_m')$ pedig ezek duálisai. Ekkor*

1) $\alpha \mapsto \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i \otimes e_j'$ *egy* $\mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K}) \leftrightarrow \mathcal{L}(V_1, V_2)$ *izomorfizmus,*

2) $\alpha = F'AE \quad \Leftrightarrow \quad A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_i \otimes e_j' \quad \big(\alpha \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K}),\ A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)\big)$.

Bizonyítás. 2) $\Rightarrow$ 1) automatikusan adódik.

2) $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy $\alpha = F'AE$ és $v \in V_1$. Ekkor

$$v = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \quad \text{ahol} \quad \xi_j := e'_j(v) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$A(v) = A\Big(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j A(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j f_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_i \otimes e'_j(v) \ .$$

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_i \otimes e'_j$. Ekkor

$$A(e_k) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_i \otimes \underbrace{e'_j(e_k)}_{\delta_{jk}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_k \qquad , \Rightarrow \qquad \alpha = F'AE \ .$$

Mátrix szorzás

Kérdés. Hogyan lehet két lineáris leképezés összetettjének a mátrixát kifejezni a két leképezés mátrixai segítségével?

Azaz, ha az A, B lineáris operátorok összetételére

$$AB: \ V_1 \xleftarrow{A} V_2 \xleftarrow{B} V_3 \ ,$$

és E_k rend.bázis $\subset V_k$ $(k = 1, 2, 3)$, akkor az

$$\alpha := E'_1 A E_2 = \big[A \text{ mátrixa } E_2{,}E_1\text{-ben}\big] \ , \quad \beta := E'_2 B E_3 = \big[B \text{ mátrixa } E_3{,}E_2\text{-ben}\big]$$

mátrixok α_{ij} ill. β_{jk} együtthatóval

$$\gamma := E'_1(AB)E_3 = \big[A \circ B \text{ mátrixa } E_3, E_1\text{-ben}\big] \ = \ ?$$

Megjegyzés. Az α ill. β mátrixokkal azonosított

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{e}_1^{(n_2)} & \mathbf{e}_2^{(n_2)} & & \mathbf{e}_{n_2}^{(n_2)} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \vdots\\ \alpha_{m1}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\\ \vdots\\ \alpha_{m2}\end{pmatrix} & \begin{matrix}\cdots\\ \cdots\\ \\ \cdots\end{matrix} & \begin{pmatrix}\alpha_{1n}\\ \alpha_{2n}\\ \vdots\\ \alpha_{mn}\end{pmatrix} \end{array}, \qquad \begin{array}{cccc} \mathbf{e}_1^{(n_3)} & \mathbf{e}_2^{(n_3)} & & \mathbf{e}_{n_3}^{(n_3)} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \vdots\\ \alpha_{m1}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\\ \vdots\\ \alpha_{m2}\end{pmatrix} & \begin{matrix}\cdots\\ \cdots\\ \\ \cdots\end{matrix} & \begin{pmatrix}\alpha_{1n}\\ \alpha_{2n}\\ \vdots\\ \alpha_{mn}\end{pmatrix} \end{array}$$

által meghatározott lineáris $\mathbb{K}^{n_2} \to \mathbb{K}^{n_1}$ ill. $\mathbb{K}^{n_3} \to \mathbb{K}^{n_2}$ leképezések $\alpha\beta$ összetétele éppen a γ mátrixszal van azonosítva!

BIZONYÍTÁS. Tudjuk:

$$\alpha = E_1' A E_2 \equiv \frac{\mathbf{1}_{n_1}}{E_1} A \frac{E_2}{\mathbf{1}_{n_2}}, \quad \beta = E_2' B E_3 \equiv \frac{\mathbf{1}_{n_2}}{E_2} B \frac{E_3}{\mathbf{1}_{n_3}}, \quad \gamma = E_1' A B E_3 \equiv \frac{\mathbf{1}_{n_1}}{E_1} AB \frac{E_3}{\mathbf{1}_{n_3}}.$$

Innen az egyszerűsítési szabályok szerint

$$\gamma \equiv \underbrace{\frac{\mathbf{1}_{n_1}}{E_1} A \frac{E_2}{\mathbf{1}_{n_2}}}_{\equiv \alpha} \underbrace{\frac{\mathbf{1}_{n_2}}{E_2} B \frac{E_3}{\mathbf{1}_{n_3}}}_{\equiv \beta} .$$

Tétel. *Az előbbi jelölésekkel*

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{ij}\beta_{jk} \qquad (i = 1, \ldots, n_1\,,\ k = 1, \ldots, n_3)\,.$$

BIZONYÍTÁS. Az E_m rendezett bázisokat

$$E_m := \left(e_1^{(m)}, \ldots, e_{n_m}^{(m)}\right) \qquad (m = 1, 2, 3)$$

alakban véve,

$$A = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{ij} e_i^{(1)} \otimes e_j^{(2)\prime}\,, \quad B = \sum_{j=1}^{n_2}\sum_{k=1}^{n_3} \beta_{jk} e_j^{(2)} \otimes e_k^{(3)\prime}\,.$$

Mivel lineáris leképezések összetétele az összeadásra nézve disztributív,

$$A \circ B = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{j^*=1}^{n_2}\sum_{k=1}^{n_3} \alpha_{ij}\beta_{j^*k} \left[e_i^{(1)} \otimes e_j^{(2)\prime}\right] \circ \left[e_{j^*}^{(2)} \otimes e_k^{(3)\prime}\right]\,.$$

Észrevétel: $\big[e \otimes \phi\big] \circ \big[f \otimes \psi\big] = \phi(f) \cdot e \otimes \psi$.

Bizonyítás: Minden x vektorra (ψ értemezési tartományából)

$$\begin{aligned}\big[e \otimes \phi\big] \circ \big[f \otimes \psi\big](x) = \big[e \otimes \phi\big]\,\big[\psi(x) f\big] = \\ = \psi(x)\, e \otimes \phi(f) = \psi(x)\phi(f)\, e = \\ = \phi(f)\psi(x)\, e = \phi(f)\, e \otimes \psi\,(x)\ .\end{aligned}$$

Az észrevétel alapján

$$\big[e_i^{(1)} \otimes e_j^{(2)\prime}\big] \circ \big[e_{j^*}^{(2)} \otimes e_k^{(3)\prime}\big] = \begin{cases} 0 & \text{ha } \ j \neq j^* \\ e_i^{(1)} \otimes e_k^{(3)\prime} & \text{ha } \ j = j^*\ . \end{cases}$$

Innen

$$A \circ B = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_3} \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{ij}\beta_{jk} e_i^{(1)} \otimes e_k^{(3)\prime}\ .$$

Következmény. *Általában is,* $\big[e \otimes \phi\big]\,\big[f \otimes \psi\big] = \phi(f)\, e \otimes \psi$.

Definíció. Az $\alpha \in \mathrm{Mat}(\ell, m, \mathbb{K})$ mátrix **összeszorozható** a $\beta \in \mathrm{Mat}(m^*, n, \mathbb{K})$ mátrixszal, ha $m = m^*$, azaz ha α-nak ugyannyi oszlopa van, mint ahány sora β-nak. Ebben az esetben

$$\alpha\beta := \Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\beta_{jk} :\ i = 1, \ldots, \ell\,,\ k = 1, \ldots, n\Big) \quad \in \mathrm{Mat}(\ell, n)$$

az α és β mátrixok **szorzatmátrix**a.

Láttuk, hogy az egységvektorokat α ill. β oszlopvektoraiba átvivő lineáris leképezések Összetétele éppen az egységvektorokat $\alpha\beta$ oszlopaiba vivő lineáris leképezés.

Ettől kezdve a lineáris leképezések összetételét általában is a **szorzat**uknak nevezzük.

Megjegyzés. Az α mátrix szorzása β-val a táblázatos elrendezésben a következőképpen szemléltethető: Helyezzük α jobb fölső sarka fölé β-t (${}_{\alpha}{}^{\beta}$). A két mátrix akkor szorozható össze (ebben a sorrendben), ha α fölött közöttük négyzet alakú hely van ($\begin{smallmatrix} \square & \beta \\ \alpha & \end{smallmatrix}$). Ekkor a $\gamma := \alpha\beta$ mátrix minden elemét a nála kereszteződő

α-beli sor és β-beli oszlop skalárszorzata adja kívülről befelé haladva:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} & \beta_{1j} & \\ & \beta_{2j} & \\ & \beta_{3j} & \\ & \vdots & \\ & \beta_{mj} & \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} & \dots & \alpha_{im} \\ & & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & \downarrow & \\ \rightarrow & \gamma_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}
\end{array}
$$

ahol $\gamma_{ij} = \alpha_{i_1}\beta_{1j} + \alpha_{i_2}\beta_{2j} + \alpha_{i_3}\beta_{3j} + \cdots + \alpha_{i_m}\beta_{mj}$.

Tétel. *A mátrix szorzás asszociatív.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy α, β, γ egymás után összeszorozható mátrixok. Azonosítsuk őket az egységvektorokat az oszlopaikba vivő

$$\alpha : \mathbb{K}^{n_1} \leftarrow \mathbb{K}^{n_2} \ , \quad \beta : \mathbb{K}^{n_2} \leftarrow \mathbb{K}^{n_3} \ , \quad \gamma : \mathbb{K}^{n_3} \leftarrow \mathbb{K}^{n_4}$$

lineáris leképezésekkel. Ekkor

$$
\begin{array}{ll}
\alpha\beta = \alpha \circ \beta & \quad (\alpha\beta)\gamma = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma \\
\beta\gamma = \beta \circ \gamma & \quad \alpha(\beta\gamma) = \alpha \circ (\beta \circ \gamma) \ .
\end{array}
$$

De általában is, *leképezések összetetétele asszociatív.*

Példa. 1) $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)(3\ 4) = \left(\begin{smallmatrix}3 & 4\\6 & 8\end{smallmatrix}\right)$, míg $(3\ 4)\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right) = (\,11\,)$. A típusok különbsége miatt szóba sem jöhet a kommutativitás.

2) A mátrix szorzás még azonos típusú négyzetes mátrixoknál sem kommutatív: $\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, míg $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{smallmatrix}\right)$.

3) Ha az A mátrix i-edik sora csupa 0, akkor bármely B mellett AB i-edik sora 0. Ugyanígy, ha B j-edik oszlopa 0, akkor bármely A-ra 0 az AB j-edik oszlopa.

4) Ha egy négyzetes mátrix főátlóján kívül csupa 0-k vannak, akkor azzal a balról szorzás hatása az, hogy a szorzott mátrix sorai az átlóbeli elemekkel megtöbbszöröződnek. Jobbról szorozva a hatás analóg az oszlopokra:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}\lambda_1 x_{1\bullet} \\ \cdots \\ \lambda_1 x_{n\bullet}\end{pmatrix} \ , \quad X \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 x_{\bullet 1} \cdots \lambda_1 x_{\bullet n}\end{pmatrix}$$

ahol $x_{i\bullet}$ ill. $x_{\bullet j}$ az X mátrix i-edik sorának ill. j-edik oszlopának egy szokásos jelölése.

5) Valós a, b értékek mellett az

$$I : a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

kölcsönösen egyértelmű lineáris $\mathbb{C} \to \mathrm{Mat}(2, 2, \mathbb{R})$ (de nem ráképezés). Az

$$I(z_1)I(z_2) = I(z_1 z_2) \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})$$

reláció is áll a mátrix-szorzás szabályai szerint. Szokásos a komplex számokat éppen a 2×2-es valós $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ alakú mátrixok szorzási tulajdonságaival bevezetni. Maga $I(z)$ nem más, mint $\mathbb{C}_{\mathbf{R}}$ tér $(1, i)$ rendezett bázisa szerinti mátrixa a $\zeta \mapsto z\zeta$ leképezésnek.

Vektorok és funkcionálok mátrixa

Propozíció. *Legyenek V, W vektorterek, $A \in \mathcal{L}(V, W)$ egy operátor és $E := (e_1, \ldots, e_n)$ rendezett bázis V-ben ill. $F := (f_1, \ldots, f_m)$rend.bázis $\subset W$. Ha a $v \in V$ vektor E-szerinti koordinátái rendre $v_1, \ldots, v_n (\in \mathbb{K})$, akkor az Av vektor F-szerinti $w_1, \ldots, w_m$ koordinátáira*

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

ahol $(a_{ij})_{i=1}^{m}\,{}_{j=1}^{n}$ az A operátor mátrixa E, F szerint.

Bizonyítás. $w_i = \langle f_i', Av \rangle = \left\langle f_i', A \sum_{j=1}^n v_j e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \underbrace{\langle f_i', Ae_j \rangle}_{a_{ij}} v_j$.

Bemutatunk egy másik bizonyítást is, amelyik az összetett leképezés mátrixának szorzatmátrix tulajdonságán alapul.

A $\xi \mapsto \xi v$ leképezés $\mathbb{K} \to V$, amelynek mátrixa $(1), E$-szerint $\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{smallmatrix}\right)$. Ezt összetéve $A(: V \to W)$-vel, a $\xi \mapsto Av$ leképezést kapjuk, amely $\mathbb{K} \to W$ és amelynek $\left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{smallmatrix}\right)$ az $(1), F$-szerinti mátrixa. Így $\left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{smallmatrix}\right) = \left[A \text{ mátrixa}\right] \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{smallmatrix}\right)$.

Definíció. Legyen $E := (e_1, \ldots, e_n)$ egy rendezett bázis a V vektortérben. Ekkor a $v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j \in V$ **vektor mátrixa** az E rendszer szerint az

$$E'v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

oszlopmátrix ($n \times 1$ típusú, eredeti függvényformában $\big[(1, j) \mapsto v_j\big]$).

Következmény. *$F'(Av) = (F'AE)(E'v)$ a propozícióbeli esetben.*

Megjegyzés. 1) Az $E'v$ jelölés eredete: ha $v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j$ az $E := (e_1, \ldots, e_n)$ rendezett bázisban, akkor az együtthatókra $v_j = \langle e_j', v\rangle$ $(j = 1, \ldots, n)$.

2) Ki lehet alakítani egy formális kalkulust a következő jelölési konvenció alapján: Ha $F := (f_1, \ldots, f_m)$ a W vektortér egy rendezett bázisa és $Z := (z_1, \ldots, z_n) \in W^n$ egy vektor-n-es (lehet $n \neq m$ is), akkor $F'Z$ jelentse az $F'Z := \big(\langle f_i', z_j\rangle\big)_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ mátrixot. Ez összhangban van az eddigi $F'AE$ jelöléssel, hiszen ezzel is $F'AE = F'(AE) = F'(Ae_1, \ldots, Ae_n)$ ha E, F rendezett bázisok. Másrészt szinte tetszőleges zárójelezéseknek helyes interpretációt adhatunk, ha azonos tagszámú E, F rendezett bázisokra az FE' szimbólumot az $F : E$ lineáris leképezésnek feleltetjük meg. Pl. így $(F'AE)E'v = F'A(EE')v = F'A(E : E)v = F'Av$.

Lemma. *Legyenek V, W vektorterek, $E := (e_1, \ldots, e_n)$* rend.bázis $\subset$ *V ill. $F := (f_1, \ldots, f_m)$* rend.bázis $\subset W$.

1) A $\big(\beta_1 \ldots \beta_n\big)$ sormátrix a $\phi := \beta_1 e_1' + \cdots + \beta_n e_n'\big) : V \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál mátrixa az $E', (1)$ koordinátarendszerekben.

2) Az $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\beta_1 \ldots \beta_n) = \big(\alpha_i \beta_j\big)_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ mátrix a $v \otimes \phi$ operátor mátrixa az E, F koordinátarendszerekben, ahol $v := \sum_i \alpha_i f_i$ és $\phi := \sum_j \beta_j e_j'$.

3) $\mathbb{R}^n$-ben az $\big\langle (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n)\big\rangle := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_j$ skalárszorzat az $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ 1×1-es szorzatmátrix egyetlen együtthatója.

Bizonyítás. 1) Definíció szerint $\phi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ mátrixa $E, (1)$ szerint $(1)'\phi E = \big(\phi(e_1) \ldots \phi(e_n)\big)$. Itt $\phi(e_j) = \beta_j$ $(j = 1, \ldots, n)$.

2) $F'(v \otimes \phi)E = \big(\langle f_i', v \otimes \phi(e_j)\rangle\big)_{i=1, j=1}^{m \quad n}$. Itt

$$\langle f_i', v \otimes \phi(e_j)\rangle = \langle f_i', \phi(e_j)v\rangle = \underbrace{\phi(e_j)}_{\beta_j} \underbrace{\langle f_i', v\rangle}_{\alpha_i} .$$

3) triviális.

Példa. A $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} (3\ \ 4)$ mátrix az $e := \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ egységvektor $\mathbb{R}e$ egyenesére való merőleges vetítés $25 = (5 \cdot 5)$-szörösére nagyítottja.

Ugyanis a $\phi : x \to \langle x, e \rangle$ funkcionállal $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} (3\,4)$ nem más mint az $(5e) \otimes (5\phi) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operátor mátrixa a kanonikus koordináták szerint. Tudjuk: mivel e egységnyi hosszú ($\langle e, e \rangle^{1/2} = 1$), az $x \mapsto \langle x, e \rangle e$ leképezés az $\mathbb{R}e$ egyenesre való merőleges vetítés.

Inverz mátrix, GL(V)

Tudjuk: nem akármelyik két mátrix szorozható össze. Ahhoz, hogy az α, β mátrixoknak mind az $\alpha\beta$ mind a $\beta\alpha$ szorzata értelmezhető legyen, szükséges és elegendő, hogy ugyanannyi sorral rendelkezzenek mint oszloppal.

Tekintsük tehát $\mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K})$-t a mátrix-szorzás műveletével. Ennek megfelelően vegyünk egy n-dimenziós V vektorteret és egy $E := (e_1, \ldots, e_n)$ rendezett bázist benne.

Kérdés. Mi egy $n \times n$-es mátrix szorzás szerinti inverze? Egyáltalán, mi a mátrix-szorzás egységeleme, és invertálható-e ebbe minden mátrix?

Észrevétel. A $T : A \mapsto \big(\langle e_i', Ae_j \rangle\big)_{i,j=1}^n$ leképezés **szorzástartó** kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az $n \times n$-es mátrixok és a lineáris $V \to V$ operátorok között (azaz $T(\alpha\beta) = T(\alpha) \circ T(\beta)$ mindig). Ez a tény az előző alfejezet tételének egyik direkt, de igen fontos következménye.

Emlékeztető. Általában is, ha S egy halmaz, az $\mathrm{id} : S \ni x \mapsto x$ identitás-leképezés az összetétel egységeleme: $\mathrm{id} \circ \varphi = \varphi \circ \mathrm{id} = \varphi$ minden $\varphi : S \to S$ leképezés mellett. Pontosan az $S \leftrightarrow S$ leképezések invertálhatók jobbról és balról egyszerre az összetételre nézve, és ezek (az összetétel műveletével) csoportot alkotnak. Maga a $\varphi : S \leftrightarrow S$ leképezés inverze a fordított $\varphi(x) \mapsto x$ leképezés.

Definíció. Az lineáris $V \leftrightarrow V$ leképezéseket **invertálható**nak nevezzük. A

$$\mathrm{GL}(V) := \big\{\mathcal{L}(V) \text{ invertálható elemei}\big\}$$

csoportot (az összetétel műveletével) a V vektortér **általános lineáris csoport**jának nevezzük*. A GL(V) egységelemét jelentő $\mathrm{id} : v \mapsto v$ **identitás**t a továbbiakban egyszerűen az 1 jeggyel jelöljük, ami arra utal, hogy ez a leképezés nem más,

* Az angol **general linear group** terminus a GL jelölés eredete.

mint a $v \mapsto 1 \cdot v$ szorzás az 1 konstanssal. Általában is szokás csak λ-val jelölni a $v \mapsto \lambda \cdot v$ leképezést tetszőleges $\lambda \in \mathbb{K}$ mellett.

Propozíció. *Véges dimenziós V vektortér esetén egy $A \in \mathcal{L}(V)$ leképezésre ekvivalensek*

(i) $A \in \mathrm{GL}(V)$,

(ii) AE bázis $\subset V$ *valahányszor* E bázis $\subset V$,

(iii) $\exists\ E$ bázis $\subset V \qquad AE$ bázis $\subset V$,

(iv) A *injektív, azaz* $Av \neq 0 \quad (v \neq 0)$.

Bizonyítás. (i) $\Rightarrow$ (ii): Tudjuk, hogy a kölcsönösen egyértelmű lineáris leképezések művelettartók (vektortér-izomorfizmusok), így minden véges algebrai tulajdonságot átvisznek a képükre. Speciálisan bázisokat képtérbeli bázisokba visznek. (Elemi bizonyítás: Legyen $A \in \mathrm{GL}(V)$ és E bázis $\subset V$. Ha $\sum_{i=1}^n \lambda_i A e_i = 0$, akkor $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = A^{-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i A e_i = 0$, ahonnan $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Vagyis az AE vektorrendszer lineárisan független. Másrészt $\mathrm{Span}(AE) = A\mathrm{Span}(E) = AV = V$, és ezzel AE bázis $\subset V$.)

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Triviális.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Ha E, AE bázis $\subset V$, akkor $V = \mathrm{Span}(AE) \subset \mathrm{Span}(AV) = AV$, azaz $\mathrm{ran}(A) = V$. Ilyenkor az $Av = A \sum_{e \in E} e'_E(v) e = \sum_{e \in E} e'_E(v) Ae$ felbontás szerint az AE bázisban

$$[Ae]'_{AE}(Av) = e'_E(v) \qquad (v \in V) \ .$$

Ha tehát $u \neq v$, akkor valamilyen $e \in E$ bázisvektor mellett $e'_E(u) \neq e'_E(v)$, és ezzel $[Ae]'_{AE}(Au) \neq [Ae]'_{AE}(Av)$, azaz $Au \neq Av$, ami mutatja az A leképezés injektivitását.

(i) $\Rightarrow$ (iv): Triviális.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Mivel a kölcsönösen egyértelmű lineáris leképezések vektortér-izomorfizmusok az értelmezési tartományuk és a képterük között, $\dim(AV) = \dim(V)$. Ha ez a dimenziószám véges, $AV \subset V$ miatt csak $AV = V$ lehet (mint láttuk korábban), azaz $A : V \leftrightarrow V$ ilyenkor.

Megjegyzés. Végtelen dimenzióban nem igaz, hogy egy injektív lineáris $V \to V$ leképezés mindig $V \leftrightarrow V$.

Példa. A $V := \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ esetben az $A : p \mapsto z \cdot p$ (ahol $z : \mathbb{R} \ni x \mapsto x$) operátor injektív $V \to V$, de nincs olyan $p \in V$, amelyre $Ap = z^0 \equiv 1$ volna (hiszen ez csak a $p \equiv 1/z$ függvény lehetne, ami nem polinom).

Megjegyzés. Az (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ekvivalenciát végtelen dimenzióra is beláttuk. Ha E, AE rend.bázis $\subset V$, akkor $A = (AE) : E$ és $A^{-1} = E : (AE)$.

Tétel. 1) $\mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{K})$ *egységeleme a szorzásra nézve a főátlóban csupa 1-eket és azon kívül csupa 0-kat tartalmazó* $\varepsilon := \left(\delta_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ *mátrix.* 2) *Ha* $\alpha \in \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{K})$, *akkor ekvivalensek:*

(i) α *invertálható* $(\exists\, \beta \quad \alpha\beta = \beta\alpha = \varepsilon)$,

(ii) α *oszlopai lineárisan függetlenek,*

(iii) α *balról invertálható.* $(\exists\, \beta \quad \beta\alpha = \varepsilon)$.

(iv) α *jobbról invertálható* $(\exists\, \beta \quad \alpha\beta = \varepsilon)$,

Bizonyítás. 1) Az identitás $\mathrm{GL}(V)$ egységeleme a leképezés-szorzásra (összetételre) nézve. Ennek mátrixa egy koordinátarendszeren belül mindig az ε mátrix. Ugyanis ha $E = (e_1, \ldots, e_n)$ rend.bázis $\subset V$, akkor

$$\mathrm{id} : e_i \mapsto e_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} e_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

miatt $E'\mathrm{id}E = \varepsilon$. (Másik bizonyítás: a "Mátrix-szorzás" alfejezet 5) példája alapján $\alpha = \varepsilon\alpha = \alpha\varepsilon$ minden $n \times n$-es mátrixra.)

2) Láttuk: az α mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$-be tartozik az az A lineáris operátor, amely a j-edik kanonikus egységvektort az $(\alpha_{ij} : \ i = 1, \ldots, n)$ vektorba (az α mátrix j-edik oszlopába) viszi.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Az α mátrix oszlopainak lineárisan függetlensége azt jelenti, hogy az A operátor a kanonikus $\mathbf{1}_n$ bázist egy bázisába viszi $\mathbb{K}^n$-nek. Az előző propzíció szerint ilyenkor $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Pontosan akkor invertálható balról α, ha $BA = \mathrm{id}$ valamilyen $B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ operátorral. Ha $0 \neq x \in \mathbb{K}^n$, akkor $x = B(Ax)$ miatt $Ax \neq 0$ lehet csak. Vagyis ekkor az A operátor injektív, ami a propozíció szerint a $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$-beliségét jelenti.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv): Pontosan akkor invertálható jobbról α, ha $AB = \mathrm{id}$ valamilyen $B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ operátorral. Mivel ilyenkor $AB\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$, az $E := B\mathbf{1}_n$ rendezett vektor-n-est A az $\mathbf{1}_n$ bázisba viszi. Vegyük észre, hogy most a B operátor balról invertáható. Az (i)$\Leftrightarrow$(ii) ekvivalencia szerint $B \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$, és így E rendezett bázis. Tehát A egy bázist egy bázisba (E-t $\mathbf{1}_n$-be) visz, következésképpen invertálható.

Reguláris egyenletrendszer és mátrix-inverzió

Definíció. Egy mátrix **négyzetes**, ha ugyanannyi sora van mint oszlopa. Egy lineáris egyenletrendszer **reguláris**, ha ugyanannyi egyenletből áll, mint amennyi ismeretlene van.

> **Tétel.** *Az $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_i = b_i$ $(i = 1,\dots,n)$ reguláris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen minden $(b_i : i = 1,\dots,n) \in \mathbb{K}^n$ mellett, ha az $\alpha := \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n$ mátrixa invertálható, és ilyenkor a megoldás $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.*

Bizonyítás. Az $A : x = (x_j : \ j = 1,\dots,n) \mapsto \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_i : \ i = 1,\dots,n\right)$ leképezés egy lineáris $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ operátor. Ha az $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_i = b_i$ $(i = 1,\dots,n)$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van bármely $(b_i : \ i = 1,\dots,n) \in \mathbb{K}^n$ mellett, akkor speciálisan $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, azaz ilyenkor az $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ operátor injektív, tehát invertálható. Mivel az A-nak a $\mathbf{1}_n$ koordinátarendszer szerinti mátrixa éppen α, ilyenkor α invertálható.

Tegyük fel, hogy az α mátrix invertálható. Ekkor

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_i = b_i \quad (i = 1,\dots,n) \iff \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha^{-1}\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

> **Következmény.** *Ha az $\alpha := \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n$ mátrix invertálható, akkor az α^{-1} inverz mátrix k-adik oszlopa a $\sum_{j=1}^n a_{ij}z_j = \delta_{ik}$ $(i = 1,\dots,n)$ egyenletrendszer megoldása.*

Megjegyzés. A tétel direkte nem alkalmazható még egy reguláris egyenletrendszer megoldására sem. Sőt, inkább az inverz mátrixot lehet a következménye szerint n egyenletrendszer megoldásán keresztül kiszámítani. Azonban van a tételnek egy érdekes üzenete: Az eddig megismert Gauss-elimináció ill. báziscserés módszer numerikusan instabilok. *Keressünk stabil mátrix inverziós módszert.* Mint később látni fogjuk, ez az utóbbi cél többféleképpen is elérhető.

Példa. Invertáljuk az $\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ mátrixot Gauss-eliminációval. Itt

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} ,$$

ahol

$$\begin{array}{llll} x_1 & +\,x_2 & +\,x_3 & = 1 \\ x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = 0 \\ x_1 & +3x_2 & +9x_3 & = 0\ , \end{array} \quad \begin{array}{llll} y_1 & +\,y_2 & +\,y_3 & = 0 \\ y_1 & +2y_2 & +4y_3 & = 1 \\ y_1 & +3y_2 & +9y_3 & = 0\ , \end{array} \quad \begin{array}{llll} z_1 & +\,x_2 & +\,z_3 & = 0 \\ z_1 & +2z_2 & +4z_3 & = 0 \\ z_1 & +3z_2 & +9z_3 & = 1\ . \end{array}$$

A bal oldalon mindhárom egyenletrendszernél elvégezhetjük ugyanazokat a lépéseket, függetlenül attól, hogy mi áll a jobb oldalon:

$$\begin{array}{llll} x_1 & +\,x_2 & +\,x_3 & = 1 \\ & x_2 & +3x_3 & = -1 \\ & 2x_2 & +8x_3 & = -1\ , \end{array} \quad \begin{array}{llll} y_1 & +\,y_2 & +\,y_3 & = 0 \\ & y_2 & +3y_3 & = 1 \\ & 2y_2 & +8y_3 & = 0\ , \end{array} \quad \begin{array}{llll} z_1 & +\,x_2 & +\,z_3 & = 0 \\ & z_2 & +3z_3 & = 0 \\ & 2z_2 & +8z_3 & = 1\ , \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} x_1 & +\,x_2 & +\,x_3 & = 1 \\ & x_2 & +3x_3 & = -1 \\ & & 2x_3 & = 1\ , \end{array} \quad \begin{array}{llll} y_1 & +\,y_2 & +\,y_3 & = 0 \\ & y_2 & +3y_3 & = 1 \\ & & 2y_3 & = -2\ , \end{array} \quad \begin{array}{llll} z_1 & +\,x_2 & +\,z_3 & = 0 \\ & z_2 & +3z_3 & = 0 \\ & & 2z_3 & = 1\ . \end{array}$$

Innen $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{5}{2}$, $x_1 = 3$, $y_3 = -1$, $y_2 = 4$, $y_1 = -3$, $z_3 = \frac{1}{2}$, $z_2 = -\frac{3}{2}$, $z_1 = 1$. Természetesen ki lehet a kézi számításnál használni azt a tényt, hogy a bal oldalak együtthatói azonosak. Erre különösen alkalmas a mátrix-algebra. Az elimináció egyes lépései ezzel ugyanis a következőt jelentik:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 3 \\ & 2 & 8 \end{pmatrix} \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 3 \\ & & 2 \end{pmatrix} \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Gyakorlat. Végezzük el báziscserével az előbbi inverziót.

Trianguláris felbontás Gauss eliminációval

A következőkben áttekintjük a Gauss-elimináció lépéseit mátrixalgebrai alapon. A módszert tárgyaló alfejezet jelöléseit fogjuk használni egy reguláris $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ egyenletrendszer esetére. Feltesszük, mint ott, hogy az ismeretleneket és az egyenleteket úgy indexeztük át, hogy a főátlóban helyezkednek el a pivotok. Az k-adik lépésben kapott együtthatók mátrixát jelöljük $\alpha^{(k)}$-val. Azaz

$$\alpha^{(i)} := \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=1}^{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n^*) ,$$

ahol $n^*(\leq n)$ az eljárás során megtehető lépések száma. Tehát az $\alpha^{(n^*)}$ mátrix sorai az $n^* + 1$-től kezdve eltűnnek.

Vegyük észre, hogy

$$\alpha^{(k)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & c_{k+1}^{(k)} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & c_n^{(k)} & & & 1 \end{pmatrix}}_{\tau^{(k)}} \alpha^{(k-1)} \qquad (k = 1, \ldots, n^*) ,$$

ahol a $c_{k+1}^{(k)} := -a_{k+1}^{(k-1)}/a_k^{(k-1)}, \ldots, c_n^{(k)} := -a_n^{(k-1)}/a_k^{(k-1)}$ együtthatók a főátló alatt a k-adik oszlopban helyezkednek el, míg a főátló csupa 1-esekből áll (mindenütt másutt 0 van).

Definíció. Az $\alpha \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K})$ négyzetes mátrix alsó trianguláris, ha nem-zéró együtthatói csak a főátlóban és alatta vannak, azaz ha $\left(\begin{smallmatrix} * & \\ * & * \end{smallmatrix}\right)$ alakú $\big(\Leftrightarrow \alpha_{ij} = 0 \ \ (i < j)\big)$. Analóg módon, $\alpha \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K})$ **felső trianguláris**, ha $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ & * \end{smallmatrix}\right)$ alakú, azaz ha $\alpha_{ij} = 0 \ \ (i > j)$.

Megjegyzés. Tudjuk: A Gauss-elimináció utolsó lépésekor kapott $\alpha^{(n^*)}$ mátrix felső trianguláris, amelynek az n^*-adik utáni sorai és oszlopai 0-k.

> **Lemma.** *Egy $A \in \mathcal{L}(V)$ operátor mátrixa az $E := (e_1, \ldots, e_n)$ koordinátarendszer szerint pontosan akkor felső trianguláris, ha a $V_k := \mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ altereket A önmagába viszi; alsó trianguláris, ha az $U_k := \mathrm{Span}\{e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ viszi önmagába.*

Bizonyítás. Csak az alsó trianguláris esetet tárgyaljuk, a bizonyítás a felső trianguláris esetre analóg (az $(1, 2, \ldots, n) \leftrightarrow (n, n-1, \ldots, 1)$ indexcserével).

Ha A mátrixa E-ben alsó trianguláris, akkor

$$\begin{aligned} Ae_k &= \sum_{i=k}^{n} \alpha_{ik} e_i \in \mathrm{Span}\{e_k, \ldots, e_n\} = U_k \ , \\ AU_k &= A\mathrm{Span}\{e_k, \ldots, e_n\} = \mathrm{Span}\{\underbrace{Ae_k}_{\in U_k}, \ldots, \underbrace{Ae_n}_{\in U_k}\} \subset U_k \qquad (k = 1, \ldots, n) \ . \end{aligned}$$

Ha pedig $AU_k \subset U_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i = Ae_k \in AU_k \subset U_k = \mathrm{Span}\{e_k, \ldots, e_n\} \ ,$$

$$Ae_k = \alpha_{kk} e_k + \cdots + \alpha_{nk} e_n \ , \Rightarrow \alpha_{1k} = \cdots = \alpha_{k-1\,k} = 0 \ ,$$

azaz α alsó trianguláris.

Következmény. *Alsó trianguláris mátrixok szorzata alsó trianguláris, felső triangulárisoké felső trianguláris.*

BIZONYÍTÁS. Ez az operátoros átfogalmazásból jól látszik: Ha pl. $A, B : U_k \to U_k$, akkor $AB : U_k \to U_k$ is áll ($k = 1, \ldots, n$).

Megjegyzés. A bizonyításokból kiolvasható:

1) Ha $A \in \mathcal{L}(V)$ mátrixa alsó trianguláris $(e_1, \ldots, e_n)$ szerint, akkor felső trianguláris $(e_n, \ldots, e_1)$ szerint (és viszont).

2) $A \in \mathcal{L}(V)$ $(e_1, \ldots, e_n)$ szerinti mátrixában pontosan akkor vannak nem-zéró elemek csak a főátló alatt (a főátlóban nem), ha $A : U_1 \to U_2 \to \cdots \to U_n \to 0$. Hasonlóan, pontosan akkor vannak nem-zéró elemek csak a főátló fölött, ha $A : V_n \to V_{n-1} \to \cdots \to V_1 \to 0$.

Lemma. *Egy trianguláris mátrix pontosan akkor invertálható, ha a főátlójában csupa nem-0 elemek vannak.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\tau := (\tau_{ij})_{i,j=1}^n$ pl. egy alsó trianguláris mátrix. Ez pontosan akkor invertálható, ha az $\sum_{j=1}^n \tau_{ij} x_j = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ egyenletrendszer minden $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ mellett egyértelműen megoldható. Ez most

$$\begin{array}{llllll}
\tau_{11}x_1 & & & & = b_1 \\
\tau_{21}x_1 & +\tau_{22}x_2 & & & = b_2 \\
\vdots & & \ddots & & \vdots \\
\tau_{n1}x_1 & +\tau_{n2}x_2 & +\cdots & +\tau_{nn}x_n & = b_n
\end{array}$$

alakú, amelyet egymás utáni behelyettesítésekkel megoldhatunk egyértelműen, ha $\tau_{11}, \tau_{22}, \ldots, \tau_{nn} \neq 0$. Ha az első 0 együttható a főátlóban a k-adik, akkor az $x_1, \ldots, x_{k-1}$ ismeretlenek egyértelműen meghatározottak. A k-adik egyenlet most

$$0 = \tau_{kk} x_k = b_k - \tau_{k1} x_1 - \cdots - \tau_{k\,k-1} x_{k-1} ,$$

ami $b_k \neq \tau_{k1} x_1 + \cdots + \tau_{k\,k-1} x_{k-1}$ esetén nem megoldható. A felső trianguláris eset kezelése analóg.

Hogy az átindexezés hatását is bemutathassuk, bevezetjük a következő mátrixfajtát.

Definíció. A négyzetes $\alpha \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K})$ mátrix **permutáló mátrix**, ha minden sorában pontosan egy 1-es áll, a többi helyeken 0.

Megjegyzés. Egy $(n \times n)$-es π mátrix pontosan akkor permutáló, ha valamilyen $\sigma : \{1, \ldots, n\} \leftrightarrow \{1, \ldots, n\}$ permutációra $\pi = \left(\delta_{i\,\sigma(j)}\right)_{i,j=1}^n$ alakú. Ezzel egyben $\pi = \left(\delta_{\sigma^{-1}(i)\,j}\right)_{i,j=1}^n$.

A permutáló mátrixszal balról való szorzás hatása a szorzott mátrix sorainak, a jobbról szorzásé az oszlopok felcserélése:

$$\left(\delta_{i\,\sigma(j)}\right)_{i,j=1}^{n}\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{\sigma(1)\bullet} \\ \vdots \\ \alpha_{\sigma(n)\bullet} \end{pmatrix}, \qquad \alpha\left(\delta_{\sigma(i)\,j}\right)_{i,j=1}^{n} = \left(\alpha_{\bullet\sigma(1)} \cdots \alpha_{\bullet\sigma(n)}\right).$$

Ha $E := (e_1, \dots, e_n)$ rend.bázis $\subset V$, az $e_k \mapsto e_{\sigma(k)}$ hatású $A := (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) : E$ operátor mátrixa E-ben a $\left(\delta_{\sigma(i)\,j}\right)_{i,j=1}^{n}$ permutáló mátrix. Az $e_j \mapsto e_{\sigma^{-1}(j)}$ hatású B operátorral $B : e_{\sigma(k)} \mapsto e_k$, és így $BA : e_k \mapsto e_{\sigma(k)} \mapsto e_k = \mathrm{id}(e_k)$ mindig. Tehát $B = A^{-1}$, ahonnan

$$\left[\left(\delta_{\sigma(i)\,j}\right)_{i,j=1}^{n}\right]^{-1} = \left(\delta_{\sigma^{-1}(i)\,j}\right)_{i,j=1}^{n} = \left(\delta_{i\,\sigma(j)}\right)_{i,j=1}^{n}.$$

Megjegyzés. Ha az α mátrixú egyenletrendszerre alkalmazott Gauss-elimináció pivotjai rendre az $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_{n^*}, j_{n^*})$ indexűek, akkor véve egy-egy olyan σ', σ'' permutációját az $\{1, \dots, n\}$ indexhalmaznak, amelyre $\sigma'(k) = i_k$, $\sigma''(k) = j_k$ $(k = 1, \dots, n^*)$, akkor a $\left[\left(\delta_{i\,\sigma'(j)}\right)_{i,j=1}^{n}\right]\alpha\left[\delta_{\sigma''(i)\,j}\right)_{i,j=1}^{n}\right]$ mátrixúra az eliminációt alkalmazhatjuk az $(1,1), (2,2), \dots, (n^*, n^*)$ főátlóbeli pivotokkal.

Példa. Vegyük a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ mátrixot. Ennél a Gauss-eliminációt nem is kezdhetjük az első sorban. Legyen az első pivot a $(3,3)$ indexű (a 4 szám), utána pedig a $(2,1)$ indexű (az első sor és a második oszlop mindig 0 marad, így további pivot nem vehető).

Kivonva tehát a 3-adik sor $\frac{1}{2}$-ét a 2-odikból, az $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ mátrixot kapjuk. A második lépés nem hoz újat (csak a második sor 0-szorosát kell az elsőből kivonni). A $\sigma' : 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 1$ ill. $\sigma'' : 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 2$ permutációknak megfelelő mátrixokkal szorozva balról ill. jobbról, ez a felső trianguláris $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alakhoz jutunk.

Tétel. *Egy négyzetes $\alpha \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K})$ mátrix felbontható*

$$\alpha = \pi\tau\upsilon\rho$$

alakú szorzatra, ahol π, ρ permutáló mátrixok, τ invertálható alsó trianguláris, υ pedig felső trianguláris mátrix, amely főátlójának első $r := \dim(\mathrm{ran}(\alpha))$ tagja* $\neq 0$, míg az $r+1, \dots, n$-ik sorai 0-k. A Gauss eliminációt az α mátrixon tetszőleges pivotokkal kezdve mindig pontosan r lépésig folytathatjuk.

Bizonyítás. Az alfejezet elején mondottakat csak annyival kell kiegészíteni, hogy az általános esetben az α mátrix helyett egy

$$\overline{\alpha} := \big[\big(\delta_{i\,\sigma'(j)}\big)_{i,j=1}^{n}\big]\alpha\big[\delta_{\sigma''(i)\,j}\big)_{i,j=1}^{n}\big]$$

alakú mátrixra alkalmazzuk az ottani egyszerű eliminációt. Itt σ', σ'' permutációk, az eredeti α-n végzett elimináció pivotjai a $(\sigma'(1), \sigma''(1)), \dots, (\sigma'(n^*), \sigma''(n^*))$ helyeken szerepelnek.) Ekkor (az ottani jelölésekkel)

$$\tau^{(n^*)}\tau^{(n^*-1)}\cdots\tau^{(1)}\overline{\alpha} = \overline{\alpha}^{(n^*)} .$$

Tudjuk: a $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(n^*)}$ mátrixok alsó triangulárisak, és a főátlójuk csupa 1-esekből áll. Így ezek és ezzel együtt a szorzatuk is invertálhatók. Másrészt $\overline{\alpha}^{(n^*)}$ főátlójának első n^* tagja $\neq 0$, míg az $n^*+1, \dots, n$-ik sorai 0-k. Tehát

$$\alpha = \underbrace{\big[\big(\delta_{i\,\sigma'(j)}\big)_{i,j=1}^{n}\big]^{-1}}_{\pi}\underbrace{\big[\tau^{(1)}\big]^{-1}\cdots\big[\tau^{(n^*)}\big]^{-1}}_{\tau}\underbrace{\overline{\alpha}^{(n^*)}}_{\upsilon}\underbrace{\big[\delta_{\sigma''(i)\,j}\big)_{i,j=1}^{n}\big]^{-1}}_{\rho}$$

megfelelő szorzatfelbontás.

Vegyük észre, hogy a tetszőlegesen rögzített $x_{n^*+1}, \dots, x_n$ együtthatók mellett egyértelműen megoldható $x_1, \dots, x_{n^*}$-ra az

$$\sum_{j=1}^{n^*} x_j \upsilon_{\bullet j} = \sum_{k>n^*} x_k \upsilon_{\bullet k} \iff \begin{array}{rcl} \overline{\alpha}_{11}^{(n^*)}x_1 + \overline{\alpha}_{12}^{(n^*)}x_2 + \cdots + \overline{\alpha}_{1n^*}^{(n^*)}x_{n^*} &=& \sum_{k>n^*}\overline{\alpha}_{1k}^{(n^*)}x_k \\ \overline{\alpha}_{22}^{(n^*)}x_2 + \cdots + \overline{\alpha}_{2n^*}^{(n^*)}x_{n^*} &=& \sum_{k>n^*}\overline{\alpha}_{2k}^{(n^*)}x_k \\ \ddots \qquad &&\vdots \\ \overline{\alpha}_{n^*n^*}^{(n^*)}x_{n^*} &=& \sum_{k>n^*}\overline{\alpha}_{n^*k}^{(n^*)}x_k \end{array}$$

egyenletrendszer. Ez azt jelenti, hogy υ-nak az első n^* oszlopa lineárisan független, és

$$n^* = \dim\big(\mathrm{Span}\{\upsilon_{\bullet 1}, \dots, \upsilon_{\bullet n^*}\}\big) = \dim\big(\mathrm{Span}\{\upsilon_{\bullet 1}, \dots, \upsilon_{\bullet n}\}\big) = \dim(\mathrm{ran}(\upsilon)) .$$

Ugyanakkor, mivel a τ, π, ρ mátrixok invertálhatók,

$$n^* = \dim(\mathrm{ran}(\upsilon)) = \dim(\mathrm{ran}(\upsilon\rho)) = \dim(\mathrm{ran}(\tau\upsilon\rho)) = \dim(\mathrm{ran}(\pi\tau\upsilon\rho)) = r .$$

Példa. $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\3&0&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\1/2&1&\\0&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&\\&-3/2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}$ az előző példa alapján.

Koordinátacsere

Kérdés. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ operátor mátrixa α az E, F koordinátarendszerekben. Vegyünk fel új $\overline{E}, \overline{F}$ koordinátarendszereket (rendezett bázisokat V_1-ben ill. V_2-ben). Hogyan számítható ki α-ból az A operátor $\overline{E}, \overline{F}$-beli $\overline{\alpha}(:= \overline{F}'A\overline{E})$ mátrixa?

Tétel. *Az előbbi jelölésekkel*

$$\overline{\alpha} = (F'\overline{F})^{-1}\alpha(E'\overline{E}) \ ,$$

ahol $E'\overline{E} := \big(\langle e_i', \overline{e}\rangle\big)_{i,j=1}^n$ *ill.* $F'\overline{F} := \big(\langle f_i', \overline{f}\rangle\big)_{i,j=1}^m$, *ha* $E := (e_1, \ldots, e_n)$, $\overline{E} := (\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n)$ *ill.* $F := (f_1, \ldots, f_n)$, $\overline{F} := (\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n)$.

Bizonyítás. A "Mátrix szorzás" alfejezetben láttuk, hogy általában is

$$(E_1'BE_2)(E_2'CE_3) = E_1'(BC)E_3$$

valahányszor $C : W_3 \to W_2$, $B : W_1 \to W_1$ lineáris operátorok és E_k bázis$\subset W_k$ $(k = 1, 2, 3)$. Ennek alapján az $\mathrm{id}_{V_\ell} : V_k \ni v \mapsto v$ identitás-leképezésekkel $(\ell = 1, 2)$,

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} &= \overline{F}'A\overline{E} = \overline{F}'(\mathrm{id}_{V_2}A\mathrm{id}_{V_1})\overline{E} = \\ &= (\overline{F}'\mathrm{id}_{V_2}F)(F'AE)(E'\mathrm{id}_{V_1}\overline{E}) = (\overline{F}'F)\alpha(E'\overline{E}) \ .\end{aligned}$$

Emellett azonban

$$\begin{aligned}(\overline{F}'F)(F'\overline{F}) &= (\overline{F}'\mathrm{id}_{V_2}F)(F'\mathrm{id}_{V_2}\overline{F}) = \overline{F}'(\mathrm{id}_{V_2}\mathrm{id}_{V_2})\overline{F} = \\ &= \overline{F}'\mathrm{id}_{V_2}\overline{F} = \overline{F}'\overline{F} = \big(\delta_{ij}\big)_{i,j=1}^m \ ,\end{aligned}$$

azaz $\overline{F}'F = (F'\overline{F})^{-1}$.

Következmény. *A következő bővítési szabályokat kapjuk:*

$$\begin{aligned}\overline{F}'A\overline{E} &= (\overline{F}'F)(F'A\overline{E}) = & \overline{F}'F = (F'\overline{F})^{-1} \ , \\ &= (\overline{F}'AE)(E'A\overline{E}) \ , & \overline{E}'E = (E'\overline{E})^{-1} \ .\end{aligned}$$

Megjegyzés. Az $F'\overline{F}$ mátrix oszlopai rendre az $\overline{F}$ bázis $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_m$ vektorainak az F bázis szerinti koordinátái.

Következmény. *A* $V_1 = V_2$, $E = F$, $\overline{E} = \overline{F}$ *fontos speciális esetben*

$$\overline{\alpha} = \sigma^{-1}\alpha\sigma \ ,$$

ahol $\sigma := E'\overline{E}$.

Példa. A
$$\begin{matrix} d/dt\, x(t) = 20x(t) + 60y(t) \\ d/dt\, y(t) = 60x(t) + 55y(t) \end{matrix} \ , \qquad x(0) = y(0) = 1$$

differenciálegyenletrendszer megoldása

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 34 & 12 \\ 12 & 41 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}) \ .$$

Itt a végtelen összegzés a véges részletösszegek együtthatónkénti limesze. Ezt direkte kiszámítani igen nehéz. Ezzel szemben, ha áttérünk az $E := \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ koordinátarendszerre, akkor a helyzet egyből áttekinthető lesz. (Azt majd később tudjuk meg, hogyan lehet ilyen rendszert találni). Ugyanis

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \ , \quad \begin{pmatrix} 20 & 60 \\ 60 & 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & \\ & -25 \end{pmatrix} \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \ ,$$

ami mutatja, hogy a $\begin{pmatrix} 20 & 60 \\ 60 & 55 \end{pmatrix}$ mátrixszal azonosított leképezés mátrixa az E rendszerben egyszerűen $\begin{pmatrix} 100 & \\ & -25 \end{pmatrix}$. Ennek a hatványait könnyű kiszámolni:

$$\begin{pmatrix} 100 & \\ & -25 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 100^n & \\ & (-25)^n \end{pmatrix} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \ .$$

Vagyis az $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ megoldás-vektor koordinátái az E rendszerben

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 100^n & \\ & (-25)^n \end{pmatrix} E' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{100t} & \\ & \mathrm{e}^{-25t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/25 \\ -1/25 \end{pmatrix} \ .$$

Visszatérve az eredeti kanonikus koordinátarendszerre,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{100t} & \\ & \mathrm{e}^{-25t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}) \ .$$

Tehát $x(t) = 21\mathrm{e}^{100t}/25 + 4\mathrm{e}^{-25t}/25$ és $y(t) = 28\mathrm{e}^{100t}/25 - 3\mathrm{e}^{-25t}/25$.

Duális leképezés, transzponált mátrix

Definíció. Az $\alpha := \left(\alpha_{ij}\right)_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ mátrix **transzponált**ja az

$$\alpha' := \left(\alpha'_{ij}\right)_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m}$$

mátrix, ahol $\alpha'_{ij} := \alpha_{ji} \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$.

Megjegyzés. Tehát a transzponált mátrixot az eredetiből a főátló egyenesére való tükrözéssel nyerjük. Az $\alpha := \left(\alpha_{ij}\right)_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ mátrix transzponáltja $\alpha' = \left(\alpha_{ji}\right)_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$.

Példa. $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{4} & 5 & 6 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 \\ 2 & \mathbf{5} \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Lemma. *Ha* $\alpha \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K})$, *akkor* $\alpha' \in \mathrm{Mat}(n, m, \mathbb{K})$ *és* $\alpha'' = \alpha$.

Bizonyítás. Azonnal adódik az előző megjegyzésből.

Kérdés. Milyen leképezés-operációnak felel meg a mátrix transzponálás?

Definíció. Legyenek V_1, V_2 vektorterek. Ekkor az $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés **duális**a az

$$\begin{aligned} A' : V_2' &\to V_1' \\ \psi &\mapsto \psi \circ A \end{aligned}$$

leképezés (amely szintén lineáris).

Tétel. *Legyenek* V_1, V_2 *véges dimenziós vektorterek,* Erend.bázis $\subset V_1$ *és* Erend.bázis $\subset V_2$. *Ekkor, ha az* $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ *operátor mátrixa* E, F *szerint* α, *akkor* A' *mátrixa a duális* F', E' *rendezett bázisok szerint* α'.

Bizonyítás. Definíció szerint

$$\alpha_{ij} = f_i'(Ae_j) \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)\ .$$

Ezzel

$$\alpha_{ij} = (f_i' \circ A)(e_j) = \left[A'(f_i')\right](e_j) = e"_j\big(A'(f_i')\big)\ ,$$

ami nem más, mint az A' operátor F', E' szerinti mátrixának a (j, i) indexű eleme.

Megjegyzés. Ha a $(\mathbb{K}^n)'$ duális terét azonosítjuk $\mathbb{K}^n$-nel úgy, hogy a $\mathbb{K}^n$-beli $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$-nek mindig

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \equiv \left[(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i\right]$$

feleljen meg, akkor $\mathbf{1}_n' \equiv \mathbf{1}_n$, és α' mint duális lineáris leképezés is azonosítódik az α' transzponált mátrixszal. (Emlékeztető: A $\beta \in \mathrm{Mat}(n, m, \mathbb{K})$ mátrixot kanonikusan azonosítottuk az $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \beta \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ lineáris $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ leképezéssel.)

Megjegyzés. A $\langle \phi, v \rangle := \phi(v)$ $(v \in V,\ \phi \in V')$ jelölési konvencióval

$$\langle A'\phi, v \rangle = (\phi \circ A)(v) = \phi(Av) = \langle \phi, Av \rangle \qquad (A \in \mathcal{L}(V_2, V_1),\ v \in V_2,\ \phi \in V_1')\ .$$

Ha $V_1 = \mathbb{K}^m$ és $V_2 = \mathbb{K}^n$, és az előző megjegyzésbeli azonosításokkal ϕ koordinátái $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ ill. v koordinátái $(v_1, \ldots, v_n)$, az A leképezés mátrixa pedig α (mind a kanonikus bázisok szerint), akkor

$$\langle \phi, Av \rangle = (\varphi_1 \ldots \varphi_m)\alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \ .$$

Propozíció. *A $A : V_3 \leftarrow V_2$, $B : V_2 \leftarrow V_1$ lineáris leképezések összetételének duálisa*

$$(AB)' = B'A' \ .$$

BIZONYÍTÁS. Legyenek $\phi \in V_3'$ és $v \in V_1$ tetszőlegesen rögzítve. Ekkor

$$\langle (AB)'\phi, v \rangle = \langle \phi, ABv \rangle = \langle A'\phi, Bv \rangle = \langle B'A'\phi, v \rangle \ .$$

Következmény. *Ha $\alpha \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K})$ és $\beta \in \mathrm{Mat}(n, p, \mathbb{K})$, akkor*

$$(\alpha\beta)' = \beta'\alpha' \ .$$

Operátor és mátrix rangja

Definíció. Az $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ lineáris operátor **rang**ja

$$\operatorname{rank}(A) := \dim\operatorname{ran}(A) \bigl(= \dim(AV_1)\bigr) .$$

Az $\alpha \in \operatorname{Mat}(m, n, \mathbb{K})$ mátrixot azonosítva az $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ operátorral definiáljuk az α mátrix rangját:

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(\alpha) : &= \dim\alpha(\mathbb{K}^n) = \dim\operatorname{Span}\bigl\{\alpha \text{ oszlopvektorai}\bigr\} = \\ &= \bigl[\alpha \text{ oszlopai közti lineárisan függetlenek max. száma}\bigr] . \end{aligned}$$

Megjegyzés. Láttuk: Egy α mátrixú egyenletrendszeren a Gauss-eliminációnak maximálisan éppen $\dim\bigl(\operatorname{ran}(\alpha)\bigr)$ azaz $\operatorname{rank}(\alpha)$ lépését lehet végrehajtani.

Propozíció. *Legyen $A : V_1 \to V_2$ egy lineáris operátor, E_0 bázis $\subset \ker(A)\,(= \{v \in V_1 :\ Av = 0\})$ és $E_1 \subset V_1$. Ekkor*

$$E_0 \cup E_1 \text{ lin.fgtlen} \subset V_1 \ \Leftrightarrow\ AE_1 \text{ lin.fgtlen} \subset V_2 \ .$$

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy $e_1, \dots, e_n \in E_1$. Most

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A e_j = 0 \ &\Leftrightarrow\ \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in \ker(A) \\ &\Leftrightarrow\ \exists\, e_{n+1}, \dots, e_m \in E_0 \quad \exists\, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K} \\ &\qquad\quad \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \lambda_{n+1} e_{n+1} + \ldots + \lambda_m e_m \\ &\Leftrightarrow\ \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_m \quad \exists\, e_{n+1}, e_m \in E_1 \qquad \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m = 0 \\ &\Leftrightarrow\ \forall\, F \text{ véges} \subset E_1 \qquad \{e_1, \dots, e_n\} \cup F \ \text{lin.fgtlen} \\ &\Leftrightarrow\ E_0 \cup E_1 \ \text{lin.fgtlen} . \end{aligned}$$

Következmény. *Ha $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, akkor*

1) $\dim(V_1) = \dim\ker(A) + \operatorname{rank}(A)$,

2) AE lin.fgtlen $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Span}(E) \cap \ker(A) = \{0\}$ $\qquad (E \text{ lin.fgtlen} \subset V_1)$.

Bizonyítás. 1) Legyen F bázis $\subset \ker(A)$ tetszőleges.

Tudjuk: $\exists\ E \subset V_1 \qquad E \stackrel{\bullet}{\cup} F$ bázis $\subset V_1$. Ezzel

$$\dim(V_1) = \#(E \stackrel{\bullet}{\cup} F) = \#E + \#F = \#E + \dim\ker(A)\ .$$

A propozíció szerint most az AE vektorcsalád lineárisan független. Innen

$$\begin{aligned}\#E = \#A(E) = \dim\operatorname{Span} A(E) = \dim A(\operatorname{Span}(E)) = \\ = \dim A(\operatorname{Span}(E) + \ker(A)) = \dim A(V_1) = \operatorname{rank}(A)\ .\end{aligned}$$

2) A propozíció bizonyításából közvetlen.

Megjegyzés. Az alfejezet eredményei végtelen dimenziós V_1, V_2 vektorterekben is érvényesek.

Rangszám tétel

Propozíció. *Legyen $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ és $r := \operatorname{rank}(A)$, $n := \dim V_1 < \infty$, $m := \dim V_2 < \infty$. Ekkor léteznek olyan*

$$(e_1, \ldots, e_n)\text{rend.bázis} \subset V_1 \quad \textit{ill.} \quad (f_1, \ldots, f_m)\text{rend.bázis} \subset V_2\ ,$$

amelyekben az $(e'_1, \ldots, e'_n)$ bázis $(e_1, \ldots, e_n)$ duálisával

$$A = \sum_{j=1}^{r} f_j \otimes e'_j\ .$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $\dim\ker(A) = n - r$. Választhatunk tehát olyan $e_{r+1}, \ldots, e_n \in V_1$ vektorokat, amelyekre

$$\{e_{r+1}, \ldots e_n\}\ \text{bázis} \subset \ker(A)\ .$$

Ezt kiegészíthetjük olyan $e_1, \ldots, e_r \in V_1$ vektorokkal, amelyekkel

$$\{e_1, \ldots, e_n\}\ \text{bázis} \subset V_1\ .$$

Tekintsük ekkor az

$$f_j := Ae_j \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

vektorokat V_2-ben. A propozíció alapján

$$\{Ae_j :\ j = 1, \ldots, r\}\ \text{bázis} \subset \operatorname{ran}(A)\ .$$

Ezt szintén kiegészíthetjük $f_{r+1}, \dots, f_m$ vektorokkal úgy, hogy

$$\{f_1, \dots, f_m\} \text{ bázis} \subset V_2 \ .$$

Ezzel

$$Ae_1 = f_1, \dots, Ae_r = f_r, \ Ae_{r+1} = 0 \ (\Leftarrow e_{r+1} \in \ker(A)), \dots, Ae_n = 0 \ ,$$

$$A = (f_1, \dots, f_r, 0, \dots, 0) : (e_1, \dots, e_n) = \sum_{j=1}^{r} f_j \otimes e'_j \ .$$

Következmény. *Léteznek olyan E, F rendezett bázisok V_1-ben ill. V_2-ben, amelyekre*

$$F'AE = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Következmény. $\operatorname{rank}(A) = r \Leftrightarrow \exists\, (e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_n)$ rend.bázis V_1, V_2*-ben, amelyre* $A = \sum_{j=1}^{r} f_j \otimes e'_j$.

Megjegyzés. 1) A propozíció áll végtelen dimenzióban is. (Csak jelöléstechnikai okokból végeztük a bizonyítást a véges dimenziós esetre.)

2) Sokkal érdekesebb, hogy a propozíció mátrix verziója szoros kapcsolatban van a báziscsere módszerrel ill a Gauss-eliminációval.

Legyen $\alpha \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K})$. Tekintsük az oszlopait α-nak mint $\mathbb{K}^m$-beli vektorokat. Legyen ezek között $\alpha_{\bullet j_1}, \dots, \alpha_{\bullet j_r}$ egy maximális lineárisan független részrendszer(tehát $r = \operatorname{rank}\alpha$). Egészítsük ki ezt kanonikus $e_{i_{r+1}}, \dots, e_{i_m}$ egységvektorokkal a $\mathbb{K}^m$ tér bázisává, és legyenek $e_{i_1}, \dots, e_{i_r}$ a maradék kanonikus egységvektorok (itt tehát $e_i := (\delta_{ik} : \ k = 1, \dots, m)$).

Az α mátrix maga nem más, mint az $f_1 := \alpha_{\bullet 1}, \dots, f_n := \alpha_{\bullet n}$ vektorok koordinátái az $(e_1, \dots, e_m)$ rendezett bázis szerint, egymás mellett függőlegesen lefelé írva. Elemi bázistranszformációkkal cseréljük ki egymás után e_{i_1}-et $\alpha_{\bullet j_1}$-gyel, ..., e_{i_r}-et $\alpha_{\bullet j_r}$-rel. Legyen E_ℓ az ℓ-edik lépésben így kapott bázis és $\alpha^{(\ell)}$ az a mátrix, amely az $f_1, \dots, f_n$ oszlopvektorok $E^{(\ell)}$ szerinti koordinátáit tartalmazza függőlegesen lefelé írva. A döntő észrevétel az, hogy az $\alpha^{(\ell+1)}$ mátrix egy invertálható $\sigma^{(\ell)}$ négyzetes mátrixszal való szorzással jön létre. Így az utolsó lépésben kapott $\alpha^{(r)}$ mátrixra

$$\alpha^{(r)} = \sigma\alpha \qquad \exists\, \sigma \text{ invertálható} \in \mathrm{Mat}(m, m, \mathbb{K}) \ .$$

Tudjuk, hogy alkalmas átindexezéssel az utolsó lépésben kapott mátrix alakja

$$\alpha^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & * & \cdots & * \\ & 1 & & & * & \cdots & * \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} .$$

Tehát itt az első r sor lineárisan független, a többi sorok eltűnnek. A báziscserét alkalmazzuk most a sorokra. Ennek a hatása leírható egy $\tau \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K})$ invertálható mátrixszal jobbról való szorzással. Az eredmény egy olyan mátrix, amelynek a főátlója r 1-essel kezdődik, minden egyéb helyén 0 áll.

3) Hasonlóan az oszlopokra majd a sorokra alkalmazott Gauss-eliminációkkal is előállíthatunk rank(α) 1-est (mind különböző sorokban és oszlopokban) és a többi helyeken csupa 0-kat tartalmazó mátrixot. Innen is adódik, hogy

$$\alpha = \sigma \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{pmatrix}}_{\varepsilon} \tau \qquad \begin{array}{l} \exists\, \sigma \text{ invertálható} \in \mathrm{Mat}(m, m, \mathbb{K}), \\ \exists\, \tau \text{ invertálható} \in \mathrm{Mat}(m, m, \mathbb{K}) \ . \end{array}$$

4) Látható, hogy a báziscsere módszer ill. a Gauss-elimináció 2) ill. 3)-ban leírt alkalmazása általában más σ, τ mátrixokhoz vezet.

Felvetődik a kérdés: Lehet-e az α mátrixból egyetlen szorzással rank(α) 1-est és a többi helyeken csupa 0-kat tartalmazó mátrixot előállítani?

A később ismertetendő Gauss-Jordan-elimináció alkalmas erre, ha a mátrix maximális rangú. Ha α-nak pl. több oszlopa van, mint sora, a sorokra alkamazott Gauss-Jordan-elimináció egy

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & \end{pmatrix}$$

alakú mátrixhoz vezet. A sorokra alkalmazott Gauss-Jordan-elimináció hatását le lehet írni egy invertálható mátrixszal balról való szorzással. Ha tehát $\alpha \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K})$, akkor

$$\begin{array}{lll} \exists\, \sigma \text{ invertálható} \in \mathrm{Mat}(m, m, \mathbb{K}) & \alpha = \sigma\varepsilon \ , & \text{ha } m \geq n \ , \\ \exists\, \tau \text{ invertálható} \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K}) & \alpha = \varepsilon\tau \ , & \text{ha } m \leq n \ . \end{array}$$

Tétel. (Rangszámtétel). *Egy lineáris leképezés rangja ugyanannyi, mint a duálisáé. Azaz, ha* $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, *akkor* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A')$.

Bizonyítás. Láttuk: $A = \sum_{j=1}^{r} f_j \otimes e'_j$ alkalmas V_1-beli $(e_1, \ldots, e_n)$ ill. V_2-beli $(f_1, \ldots, f_m)$ rendezett bázisok mellett, ahol $r = \operatorname{rank}(A)$. Most

$$A' = \Big(\sum_{j=1}^{r} f_j \otimes e'_j\Big)' = \Big(\sum_{i=1}^{m}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_i \otimes e'_j}_{\uparrow\ \alpha_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{ha } i=j\le r \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}}\Big)' =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_i \otimes f'_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} e_i \otimes f'_i \ , \ \Rightarrow \operatorname{rank}(A') = r \ .$$

Következmény. (A mátrixok rangszámtétele). *Mátrix rangja ugyanannyi, mint a transzponáltjáé. Azaz, ha* $\alpha \in \operatorname{Mat}(m, n, \mathbb{K})$, *akkor* $\operatorname{rank}(\alpha) = \operatorname{rank}(\alpha')$.

Tétel. *Egy operátor rangja megegyezik a mátrixáéval tetszőleges bázisok szerint. Azaz legyen* $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, *és tegyük fel, hogy* E, F *rendezett bázisok* V_1*-ben ill.* V_2*-ben. Ekkor* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(F'AE)$.

Bizonyítás. Legyen $r := \operatorname{rank}(A)$. Most találhatók olyan $(u_1, \ldots, u_n)$ ill. $(v_1, \ldots, v_n)$ rendezett bázisok V_1 ill. V_2-ben, amelyekkel

$$A = \sum_{j=1}^{r} v_j \otimes u'_j \ .$$

Ekkor az

$$S := (\mathbf{1}_m : F) \quad , \qquad T := (E : \mathbf{1}_n)$$

koordinátázó leképezésekkel

$$F'AE = SAT = \sum_{j=1}^{r} S(v_j \otimes u'_j)T \ .$$

Észrevétel: $S(v \otimes \phi)T = (Sv) \otimes (T'\phi) \quad (v \in V_2,\ \phi \in V'_1)$.
Bizonyítás: $S(v \otimes \phi)Tx = \phi(Tx) \cdot Sv = (T'\phi)(x) \cdot (Sv) = (Sv) \otimes (T'\phi)x$. Az

észrevétel alapján

$$F'AE = \sum_{j=1}^{r} (Sv_j) \otimes (T'u'_j) \ .$$

Mivel $m = \dim V_2 = \operatorname{rank}(S)$, $\{Sv_j \ : \ j, \ldots, n\}$ bázis $\subset \mathbb{K}^n$. Mivel pedig $n = \dim V_1 = \operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(T')$, $\{T'u'_j \ : \ j = 1, \ldots, n\}$ bázis $\subset (\mathbb{K}^n)' (\equiv \mathbb{K}^n)$. Legyen

$$(w_1, \ldots, w_n) := \Big[(T'u'_1, \ldots, T'u'_n) \ \text{ duális bázisa} \Big] \quad \mathbb{K}^n\text{-ben} \ .$$

Ezzel

$$F'AE = \sum_{j=1}^{r} (Sv_j) \otimes w'_j \ ,$$

ahonnan $\operatorname{rank}(F'AE) = r$.

Megjegyzés. Belátandó: $(T'u'_1, \ldots, T'u'_n)$ duális bázisa $(T^{-1}u_1, \ldots, T^{-1}u_n)'$. Bizonyítás:

$$(T'u',)(T^{-1}u_j) = u'_1(T(T^{-1}u_j)) = u'_i(u_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \ . \end{cases}$$

Kronecker-Capelli tétel

Kérdés. Hogyan vezethető vissza az

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \cdots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + & a_{mn}x_n = & b_m \end{array}\right\} \quad x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b$$

általános egyenletrendszer megoldása reguláris egyenletrendszer megoldására? Mikor van megoldás?

Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\operatorname{rank}\{a_1,\dots,a_n\}=r$, *és az egyenletrendszer első* r *oszlopa, azaz az* $a_1,\dots,a_r$ *oszlopvektorok ill. első* r *sora, azaz az* $\widetilde{a}_1,\dots,\widetilde{a}_r$ *sorvektorok* lineárisan függetlenek. Ekkor*

1) $\exists\,(x_1,\dots,x_n)\quad x_1a_1+\dots+x_na_n=b \iff \operatorname{rank}\{a_1,\dots,a_n,b\}=r$.

Az $\begin{pmatrix} u_1\\ \vdots\\ u_m\end{pmatrix}^o := \begin{pmatrix} u_1\\ \vdots\\ u_r\end{pmatrix}$ *jelöléssel*

2) *az* $\{a_1^o,\dots,a_r^o\}$ *részvektorok lineárisan függetlenek,*

3) *ha az egyenletrendszermegoldható,*

$$\{\text{MEGOLDÁSOK}\}=$$
$$=\left\{\begin{pmatrix} x_1(c_1,\dots,c_{n-r})\\ \vdots\\ x_n(c_1,\dots,c_{n-r})\end{pmatrix} :\ (c_1,\dots,c_{n-r}\in \mathbb{K}^{n-r}\right\},$$

ahol $i=1,\dots,r$ *mellett*

$$\begin{pmatrix} x_1(c_1,\dots,c_{n-r})\\ \vdots\\ x_r(c_1,\dots,c_{n-r})\end{pmatrix} :=$$
$$:=\left[\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix} :\ \sum_{j=1}^r a_{ij}x_j = b_i-\sum_{j=r+1}^n a_{ij}c_{j-r}\quad (i=1,\dots,r)\right].$$

Bizonyítás. 1) Definíció szerint

$$\begin{aligned}\{\text{MEGOLDÁSOK}\}\neq 0 &\iff b\in \operatorname{Span}\{a_1,\dots,a_n\}=\operatorname{Span}\{a_1,\dots,a_r\}\iff\\ &\iff \operatorname{Span}\{a_1,\dots,a_n,b\}=\operatorname{Span}\{a_1,\dots,a_r\}\iff\\ &\iff \operatorname{rank}\{a_1,\dots,a_n,b\}=r\ .\end{aligned}$$

2) Tegyük fel, hogy az ellenkezőjét. Eszerint

$$\begin{aligned}&\exists\, J\subset\{1,\dots,r\}\quad \operatorname{Span}\{a_j^o:\ j\in J\}=\operatorname{Span}\{a_j^o:\ j=1,\dots,r\}\ ,\\ &\operatorname{Span}\{a_1,\dots,a_r\}=\operatorname{Span}\{a_1,\dots,a_n\}\ ,\quad (\Leftarrow \operatorname{rank}\{a_1,\dots,a_n\}=r)\\ &\operatorname{Span}\{a_j^o:\ j\in J\}=\operatorname{Span}\{a_1^o,\dots,a_n^o\}\ .\end{aligned}$$

Most tehát ha $t\in\{1,\dots,n\}$ egy tetszőlegesen rögzített index, akkor alkalmas együtthatókkal $a_t^o=\sum_{j\in J}\lambda_j a_j^o$.

Állítás: Ekkor $a_t = \sum_{j\in J} \lambda_j a_j$ is teljesül. Innen Span$\{a_1, \dots, a_n\}$= Span$\{a_j : j \in J\}$, és így a rank$\{a_1, \dots, a_n\} = \#J < r$ ellentmondás következik, ami bizonyítja 2)-t.

Bizonyítás: A mátrixok rangszám-tétele szerint

$$\mathrm{rank}\{\widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_m\} = r \ .$$

Innen

$$\forall\ s\ \ \exists\ \mu_1^{(s)}, \dots, \mu_r^{(s)} \qquad \widetilde{a} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{(s)} \widetilde{a}_i$$

$$\begin{aligned} a_{st} &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{(s)} a_{it} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{(s)} a_{it}^o = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{(s)} \sum_{j\in J} \lambda_j a_{ij}^o = \\ &= \sum_{j\in K} \lambda_j \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{(s)} a_{ij} = \sum_{j\in J} \lambda_j a_{sj} = \\ &= \Big(\sum_{j\in J} \lambda_j a_j\Big)_{s\text{-edik sorbeli eleme}} \ . \end{aligned}$$

3) Tegyük fel, hogy van megoldás. Rögzítsünk ezután tetszőleges $c_1, \dots, c_{n-r} \in \mathbb{K}$ értékeket. Az már bizonyított 1) állítás szerint

$$\begin{aligned} &\mathrm{Span}\{a_1, \dots, a_r\} = \mathrm{Span}\{a_1, \dots, a_n, b\}\ , \Rightarrow \\ &\exists\ x_1, \dots, x_r \in \mathbb{K}\ \ x_1 a_1 + \dots + x_r a_r = b - c_1 a_{r+1} + \dots + c_{n-r} a_n \ . \end{aligned}$$

A szintén belátott 2) állítás mutatja, hogy

$$\{a_1^o, \dots, a_r^o\} \text{ bázis} \subset \mathbb{K}^r \ .$$

Tehát egyértelmű $\big(x_i(c_1, \dots, c_{n-r}) :\ i = 1, ldots, r\big)$ megoldása van a reguláris

$$x_1 a_1^o + \dots + x_r a_r^o + c_1 a_{r+1}^o + \dots + c_{n-r} a_n^o = b^o$$

egyenletrendszernek.

Következmény. *Egy mátrix rangja a benne levő legnagyobb nemeltűnő determinánsú (nem feltétlenül szomszédos sororkból ill. oszlopokból álló) négyzetes mátrix mérete. Azaz*

$$\mathrm{rank}\big(a_{ij}\big)_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} = \max\big\{r :\ \exists\ I, J \quad \#I = \#J = r,\ \det\big(a_{ij}\big)_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \neq 0\big\} \ .$$

Ha a mátrix rangja r, akkor bármely r lineárisan független sora és oszlopa találkozásánál levő $r \times r$-es részmátrix determinánsa $\neq 0$.

Megjegyzés. Sor ill. oszlopcserékkel mindig elérhető, hogy az első r(=rangszám) sor ill. oszlop lineárisan független legyen egy egyenletben.

A tétel 3)-beli formulájából kiolvasható az alábbi is.

Következmény. *Ha találunk egy megoldását a* $\sum_{j=1}^{n} aijx_j = b_i$ $(1 \leq i \leq n)$ *egyenletrendszernek, akkor az összes megoldást úgy kapjuk meg, hogy ehhez hozzádjuk a* $\sum_{j=1}^{n} aijx_j = 0$ $(1 \leq i \leq n)$ *homogén egyenletrendszer megoldásait, amelyek a* $\mathbb{K}^n$ *tér egy* $[n - \mathrm{rank}(a_{ij})]$*-dimenziós alterét alkotják.*

Példa. Keressük meg az

$$\begin{array}{rrrrrl} & 2x_2 & +\ 2x_3 & +\ x_4 & +\ x_5 & = 13 \\ 6x_1 & +\ 6x_2 & +12x_3 & +2x_4 & +3x_5 & = 70 \\ 6x_1 & +\ 8x_2 & +14x_3 & +3x_4 & +5x_5 & = 89 \\ 4x_1 & +10x_2 & +14x_3 & +4x_4 & +7x_5 & = 102 \end{array}$$

egyenletrendszer összes racinális megoldását.
Gauss eliminációt végrehajtva az $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$ pozíciójú pivotokkal, az

$$\begin{array}{rrrrrl} & \underline{2x_2} & +\quad 2x_3 & +x_4 & +x_5 & = \ 13 \\ 6x_1 & & +\quad 6x_3 & -\underline{x_4} & & = \ 13 \\ 12x_1 & & +\ \ 12x_3 & & +\underline{x_5} & = \ 26 \\ -14x_1 & & + - 14x_3 & & & = -32 \end{array}$$

egyenletrendszert kapjuk. Tehát most $x_1 := c_1 \in \mathbb{Q}$ és $x_3 := c_3 \in \mathbb{Q}$ tetszőlegesen választható, és

$$\begin{array}{rrrl} \underline{2x_2} & +x_4 & +x_5 & = 19 - c_3 \\ & \underline{-x_4} & & = 13 - 6c_1 - 6c_3 \\ & & \underline{x_5} & = 26 - 12c_1 - 12c_3 \end{array}$$

ahonnan a megoldások halmaza

$$\Big\{ \big(\underbrace{c_1}_{x_1}, \underbrace{19 - 8c_1 - 12c_3}_{x_2}, \underbrace{c_3}_{x_3}, \underbrace{-13 + cc_1 + 6c_3}_{x_4}, \underbrace{26 + 12c_1 + 12c_3}_{x_5} \big) : \ c_1, c_3 \in \mathbb{Q} \Big\} .$$

Gauss-Jordan elimináció

Kérdés. Milyen esetben lehet egyetlen mátrixszal való szorzással egy α mátrixot olyan mátrixba átvinni, amely $\mathrm{rank}(\alpha)$ nem-zéró elemet tartalmaz?

Geometriai szinten ez a következő problémát jelenti. Ha adott egy $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés és egy E_1, E_2 rendezett bázispár V_1-ben ill V_2-ben, mikor elég csak az egyiket közülük (mondjuk E_1-et) megváltoztatni ahhoz, hogy az új bázisok szerinti mátrixa A-nak $\mathrm{rank}(\alpha)$ nem-zéró elemet tartalmazon?

Példa. 1) Ha egy $n \times n$-es α mátrix invertálható, akkor az inverzével akár balról akár jobbról szorozva az egységmátrixot kapjuk, ami a főátlóban $n(= \mathrm{rank}(\alpha))$ 1-est, azon kívül csupa 0 elemeket tartalmaz.

2) Az $\alpha := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mátrix rangja=1. Ugyanakkor akármilyen $\sigma \in \mathrm{Mat}(2, 2, \mathbb{K})$ mellett a $\sigma\alpha$ szorzat két azonos oszlopból, $\alpha\sigma$ pedig két azonos sorból áll (tehát nem tartalmazhat egyetlen 1-et és három 0-t).

Megjegyzés. Ha $\sigma \in \mathrm{Mat}(m, m, \mathbb{K})$ és $\alpha \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K})$, akkor a $\sigma\alpha$ mátrix i-edik sora $\sigma_{i1}\alpha_{1\bullet} + \cdots + \sigma_{im}\alpha_{m\bullet}$. Vagyis egy mátrix soraival való eliminációs műveletek egy négyzetes mátrixszal balról való szorzással adhatók meg. Hasonlóan, az oszlopokkal való eliminációs műveletek jobb-szorzásnak felelnek meg.

Definíció. Legyen $\alpha \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K})$ és (i, j) egy olyan indexpár, amelyre $\alpha_{ij} \neq 0$. Az α mátrix sorain végzett (i, j)**-pivotú Gauss-Jordan eliminációs lépés**nek nevezzük az i-ediken kívüli sorokból az i-edik sor annyiszorosának kivonását, amellyel a j-edik oszlopbeli tagok (α_{ij} kivételével) kinullázódnak. Ez nem más, mint az

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{1\bullet} \\ \vdots \\ \alpha_{i-1\bullet} \\ \alpha_{i\bullet} \\ \alpha_{i+1\bullet} \\ \vdots \alpha_{m\bullet} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{1\bullet} - (\alpha_{1j}/\alpha_{ij})\alpha_{i\bullet} \\ \vdots \\ \alpha_{i-1\bullet} - (\alpha_{i-1j}/\alpha_{ij})\alpha_{i\bullet} \\ \alpha_{i\bullet} \\ \alpha_{i+1\bullet} - (\alpha_{i+1j}/\alpha_{ij})\alpha_{i\bullet} \\ \vdots \alpha_{n\bullet} - (\alpha_{mj}/\alpha_{ij})\alpha_{i\bullet} \end{pmatrix}$$

mátrix-művelet.

Hasonlóan, az oszlopokon való (i, j)-pivotú Gauss-Jordan elimináció az

$$\alpha \mapsto \left(\alpha_{\bullet 1} - \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{ij}}\alpha_{\bullet j} \cdots \alpha_{\bullet j-1} - \frac{\alpha_{ij-1}}{\alpha_{ij}}\alpha_{\bullet j} \;\; \alpha_{\bullet j} \;\; \alpha_{\bullet j+1} - \frac{\alpha_{ij+1}}{\alpha_{ij}}\alpha_{\bullet j} \cdots \alpha_{\bullet n} - \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{ij}}\alpha_{\bullet j} \right)$$

operáció.

Megjegyzés. Ha pl. a sorokon az $(i_1, j_1), \ldots, (i_s, j_s)$ indexű pivotokkal Gauss eliminációt lehet végrehajtani, akkor ugyanilyen indexű pivotokkal Gauss-Jordan elimináció is megtehető. Ugyanis az $\ell(\leq s)$-edik lépésben az $i_1, \ldots, i_\ell$-edik sorokon kívül mindkét eliminációnál ugyanazokat a műveleteket végezzük, a Gauss-Jordan módszernél még ezen túl változtatjuk az $i_1, \ldots, i_{\ell-1}$-ik sorok $j_1, \ldots, j_{\ell-1}$-en kívüli indexű elemeit. Speciálisan *ugyanaz a pivotok értéke a Gauss ill. Gauss-Jordan eliminációnál.*

Példa. Oldjuk meg Gauss-Jordan eliminációval a a "Gauss-elimináció" alfejezet példájaként vett

$$\begin{array}{rrrcr} & 2x_2 & + \; x_3 & = & 19 \\ 3x_1 & + \; 3x_2 & + \; x_3 & = & 35 \\ 4x_1 & +10x_2 & +4x_3 & = & 102 \end{array}$$

egyenletrendszert az ott használt $(1,3),(2,2),(3,1)$ indexű pivotokkal.

Az első lépés azonos a Gauss-eliminációéval:

$$\begin{array}{rrrcr} & 2x_2 & +\underline{x_3} & = & 19 \\ 3x_1 & +\ x_2 & & = & 16 \\ 4x_1 & +2x_2 & & = & 26 \end{array}$$

(az 1. sort kivonva a 2.-ból, és az 1. sor 4-szeresét kivonva a 3.-ikból). A második lépésben

$$\begin{array}{rrrcr} -6x_1 & & +\underline{x_3} & = & -13 \\ 3x_1 & +\underline{x_2} & & = & 16 \\ \underline{-2x_1} & & & = & -6 \end{array}$$

(az 1. és 3. sorból kivonjuk a 2. sor 2-szeresét). A harmadik lépésben

$$\begin{array}{rrrcr} & & +\underline{x_3} & = & 5 \\ & +\underline{x_2} & & = & 7 \\ \underline{-2x_1} & & & = & -6 \end{array}$$

(kivonva a 3. sor 3-szorosát az 1.-ből ill. a $\frac{3}{2}$-szeresét hozzádva a 2.-hoz).

Megjegyzés. Az (i,j) pivotú Gauss-Jordan sor-eliminációs lépés eredménye az α mátrixra a $\sigma\alpha$ mátrix, ahol a σ négyzetes mátrix i-edik sora

$$\sigma_{ij} := 1\ , \qquad \sigma_{i\ell} := -\frac{\alpha_{\ell j}}{\alpha ij} \quad (\ell \neq j)\ ,$$

a többi sorokban a megfelelő indexű egységvektorok állnak, azaz

$$\sigma_{kk} := 1\ , \quad \sigma_{k\ell} := 0 \qquad (i \neq k \neq \ell)\ .$$

A σ mátrix sorai lineárisan függetlenek. Következésképpen a kapott $\sigma\alpha$ mátrix rangja azonos a kiindulási α-éval. Analóg állítás áll jobb-szorzással az oszlopokkal végzett Gauss-Jordan elimin\'cióra.

Tétel. *Tegyük fel, hogy $\alpha \in \mathrm{Mat}(m,n,\mathbb{K})$ és $\mathrm{rank}(\alpha) = n$ (az oszlopok száma). Ekkor találhatók olyan, az első ill. második komponensükben páronként különböző $(i_1,j_1),\ldots,(i_r,j_r)$ indexpárok, amelyekkel az $(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)$ pivotú Gauss-Jordan eliminációs lépéseket a sorokon egymás után elvégezve olyan mátrixhoz jutunk, amelynek nem-zéró tagjai pontosan az $(i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)$ indexűek.*

Bizonyítás. Az $\alpha = 0$ eset triviális.

Jegyezzük meg, hogy a mátrixok rangszámtétele szerint α-nak $n = \mathrm{rank}(\alpha)$ lineárisan független sora van, azaz $n \leq m$=[sorok száma]. Hajtsunk végre maximális számú Gauss-Jordan eliminációs lépést a sorokon páronként különböző sor- és oszlopindexű pivotokkal. Legyenek a pivotok indexei $(i_1, j_1), \ldots, (i_s, j_s)$. Az előző Megjegyzés szerint a kapott $\widetilde{\alpha}$ mátrix rangja továbbra is n. Vegyük észre, hogy $\widetilde{\alpha}$-nak a j_ℓ-edik oszlopában pontosan csak az i_ℓ-edik elem nem-zéró $(\ell = 1, \ldots, s)$. Tehát az $\widetilde{\alpha}_{\bullet j_1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{\bullet j_s}$ oszlopok lineárisan függetlenek. Így $s \leq n = \operatorname{rank}(\widetilde{\alpha})$ a rangszámtétel szerint. Ha $s < n$ lenne, akkor valamelyik $\widetilde{\alpha}_{\bullet j}$ oszlop lineárisan független volna $\{\widetilde{\alpha}_{\bullet j_1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{\bullet j_s}\}$-tól. Csakhogy az $\widetilde{\alpha}_{\bullet j_1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{\bullet j_s}$ oszlopvektorok összes lineáris kombinációi pontosan az összes olyan vektorok, amelyek $i_1, \ldots, i_s$-edik elemein kívül 0-k állnak

$$\begin{aligned}\operatorname{Span}\{\widetilde{\alpha}_{\bullet j_1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{\bullet j_s}\} &= \operatorname{Span}\{\widetilde{\alpha}_{i_1 j_1} 1_{i_1}^{(m)}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{i_s j_s} 1_{i_s}^{(m)}\} = \\ &= \operatorname{Span}\{1_{i_1}^{(m)}, \ldots, 1_{i_s}^{(m)}\} \ .\end{aligned}$$

Ezért $\operatorname{rank}(\widetilde{\alpha}) = n > s$ esetén valamilyen $j_{s+1} \neq j_1, \ldots, j_s$ indexre

$$\widetilde{\alpha}_{\bullet j_{s+1}} \notin \operatorname{Span}\{1_{i_1}^{(m)}, \ldots, 1_{i_s}^{(m)} \ ,$$

azaz valamilyen $i_{s+1} \neq i_1, \ldots, i_s$ indexre $\widetilde{\alpha}_{i_{s+1} j_{s+1}} \neq 0$. Ekkor azonban s definíciójával ellentétben az $(i_{s+1}, j_{s+1}$ pivottal tovább folytatható lenne a Gauss-Jordan elimináció.

> Következmény. *Ha $\alpha \in \operatorname{Mat}(m, n, \mathbb{K})$ és $\operatorname{rank}(\alpha) = m$ (a sorok száma), akkor vannak olyan $(i_1, j_1), \ldots, (i_r, j_r)$ indexpárok, amelyekkel az $(i_1, j_1), \ldots, (i_n, j_n)$ pivotú Gauss-Jordan eliminációs lépéseket az oszlopokon egymás után elvégezve olyan mátrixhoz jutunk, amelynek nem-zéró tagjai pontosan az $(i_1, j_1), \ldots, (i_n, j_n)$ indexűek.*

Bizonyítás. A Tételt a transzponált α' mátrixra alkalmazzuk.

MULTILINEARITÁS, TENZOROK

k-lineáris leképezések

Definíció. Legyenek $W, V_1, \ldots, V_k$ vektorterek (a $\mathbb{K}$ test fölött). Az

$$L : V_1 \times \ldots \times V_k \to W$$

leképezés **k-lineáris** $V_1 \times \ldots \times V_k$ fölött, ha az minden rögzített $v_1 \in V_1, \ldots, v_k \in V_k$ vektorrendszer és $j(= 1, \ldots, k)$ index mellett az

$$V_j \ni x \mapsto L(v_1, \ldots, v_{j-1}, x, v_{j+1}, v_k)$$

részleképezései mind lineárisak.

Jelölés: $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_k, W) := \big\{k\text{-lin. } V_1 \times \cdots \times V_k \to W \text{ leképezések}\big\}$.

Propozíció. *$\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_k, W)$ a függvényösszeadással és konstansokkal való szorzásokkal vektortér.*

Bizonyítás. Triviális

Példa. 1) A $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ konstans szorzása vektorral művelet a V vektortérben 2-lineáris $\mathbb{K} \times V \to V$ leképezés. (Itt a $\mathbb{K}$ testet 1-dimenziós $\mathbb{K}$ fölötti vektortérnek tekintjük).

2) Ugyanakkor a $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$ vektor-összeadás a V térben *nem* 2-lineáris(ha $V \neq \{0\}$)!

3) A $\phi_1 \in V_1', \ldots, \phi_k \in V_k'$ lineáris funkcionálokkal a

$$(v_1, \ldots, v_k) \mapsto \phi_1(v_1) \cdots \phi_k(v_k)$$

leképezés $V_1 \times \cdots \times V_k$ fölötti k-lineáris funkcionál.

4) A $(\phi, v) \mapsto \langle \phi, v \rangle$ funkcionál-kiértékelés bilineáris (2-lineáris) $V' \times V \to \mathbb{K}$ funkcionál.

Tétel. (Felbontási formula).

Ha $L \in \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_k, W)$, továbbá $j = 1, \ldots, k$-ra $v_1^{(j)}, \ldots, v_{n_j}^{(j)} \in V_j$ és $\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_{n_j}^{(j)} \in \mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned} &L(\alpha_1^{(1)} v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_1^{(1)} v_{n_1}^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{(k)} v_1^{(k)} + \cdots + \alpha_1^{(k)} v_{n_k}^{(k)}) = \\ &= \sum_{\substack{j_1:\ 1 \le j_1 \le n_1 \\ \cdots \\ j_k:\ 1 \le j_k \le n_k}} \alpha_{j_1}^{(1)} \cdots \alpha_{j_k}^{(k)} L(v_{j_1}^{(1)}, \ldots, v_{j_k}^{(k)}) \ . \end{aligned}$$

Bizonyítás. Indukció k szerint. A $k = 1$ eset már ismert, mivel az 1-linearitás nem más, mint a közönséges linearitás.

Tegyük fel, hogy az állítást már igazoltuk a $(k-1)$-lineáris leképezésekre. A döntő észrevétel az, hogy minden rögzített $v \in V_k$ vektor mellett az

$$(u_1, \ldots, u_{k-1}) \mapsto L(u_1, \ldots, u_{k-1}, v)$$

leképezések $(k-1)$-lineárisak ($V_1 \times \cdots \times V_{k-1}$ fölött). Mivel pedig definíció szerint az

$$x \mapsto L(u_1, \ldots, u_{k-1}, x) \qquad (u_1 \in V_1, \ldots, u_{k-1} \in V_{k-1})$$

leképezések mind $(V_k \to W)$-lineárisak,

$$\begin{aligned} &L\big(\textstyle\sum_{j_1=1}^{n_1} \alpha_{j_1}^{(1)} v_{j_1}^{(1)}, \alpha_{j_k}^{(k)} v_{j_k}^{(k)}\big) = \\ &= \sum_{j_k=1}^{n_k} \alpha_{j_k}^{(k)} L\big(\textstyle\sum_{j_1=1}^{n_1} \alpha_{j_1}^{(1)} v_{j_1}^{(1)}, \alpha_{j_{k-1}}^{(k-1)} v_{j_{k-1}}^{(k-1)}, v_{j_k}^{(k)}\big) =^{\text{IND.FELT.}} \\ &= \sum_{j_k=1}^{n_k} \alpha_{j_k}^{(k)} \sum_{\substack{j_1:\ 1 \le j_1 \le n_1 \\ \cdots \\ j_{k-1}:\ 1 \le j_{k-1} \le n_{k-1}}} \alpha_{j_1}^{(1)} \cdots \alpha_{j_{k-1}}^{(k-1)} L(v_{j_1}^{(1)}, \ldots, v_{j_{k-1}}^{(k-1)}, v_{j_k}^{(k)}) \ . \end{aligned}$$

k-lineáris funkcionálok

Definíció. A k-lineáris $\Phi : V_1, \ldots, V_k \to \mathbb{K}$ leképezéseket $V_1 \times \cdots \times V_k$ fölötti **k-lineáris funkcionál**oknak nevezzük.

Az általános multilineáris leképezéseket is reprezentálhatjuk funkcionálokkal a következőképpen.

Propozíció. *Legyenek* $V_1, \dots, V_k, W$ *vektorterek (ugyanazon* $\mathbb{K}$ *test fölött),* $\dim(W) < \infty$*. Ekkor az*

$$I : L \mapsto \big[(v_1, \dots, v_n, \phi) \mapsto \langle \phi, L(v_1, \dots, v_n) \rangle\big]$$

leképezés $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, W) \leftrightarrow \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, W', \mathbb{K})$ *vektortér-izomorfizmus.*

Bizonyítás. Az I leképezés linearitása, az $I(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2) = \alpha_1 I L_1 + \alpha_2 I L_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, W)$ reláció triviális. Az I leképezés kölcsönösen egyértelmű voltát a következő módon láthatjuk be: Tegyük fel, hogy $L \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, W)$ olyan, hogy $I(L) = 0$. Ekkor $\langle \phi, L(v_1, \dots, v_n) \rangle = 0$ minden $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$ és $\phi \in W'$ mellett. Tudjuk: ha $w \in W$ egy olyan vektor, amelyre $\langle \phi, w \rangle = 0$ az összes $\phi \in W'$ mellett, akkor szükségképpen $w = 0$*. Így $L(v_1, \dots, v_n) = 0$ ($v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$), azaz $L = 0$.

Végül megjegyezzük, hogy mindegyik $\Phi \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, W', \mathbb{K})$ funkcionál előáll $I(L)$ alakban. Ugyanis a W tér véges dimenziós volta miatt a $J : w \mapsto \delta_w (:= [\phi \mapsto \langle \phi, w \rangle])$ leképezés lineáris $W \leftrightarrow W''$. Ezzel valóban

$$\begin{aligned} &L : (v_1, \dots, v_n) \mapsto J^{-1}[\phi \mapsto \Phi(v_1, \dots, v_n, \phi)] \\ &\text{mellett} \quad \Phi = I(L) \ . \end{aligned}$$

Tétel. *Legyenek* $V_1, \dots, V_k$ *véges dimenziós vektorterek,* $\widetilde{E}_1, \dots, \widetilde{E}'_k$ *rendezett bázisok a* $V'_1, \dots, V'_k$ *duális terekben. Ekkor*

$$\begin{aligned} \big\{\big[(v_1, \dots, v_k) \mapsto \phi_1(v_1) \dots \phi_k(v_k)\big] : \ \phi_1 \in \widetilde{E}_1, \dots, \phi_k \in \widetilde{E}_k\big\} \text{ bázis} \subset \\ \subset \big\{V \text{ fölötti } k\text{-lin. funkcionálok}\big\}. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A "Véges dimenziós vektortér reflexivitása" alfejezet eredményei szerint

$$\widetilde{E}_j = E'_j \qquad (j = 1, \dots, k)$$

valamilyen V_1-beli $E_1, \dots, V_k$-beli E_k rendezett bázisok duálisai. (Nevezetesen, ha a V_j vektorteret azonosítjuk V''_j-vel, éppen $E_j = \widetilde{E}'_j$.)

Legyen a $\Phi \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_k, \mathbb{K})$ funkcionál tetszőlegesen rögzítve. Vegyük az

$$\alpha_{i_1 \dots i_k} := \Phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \qquad \big(i_1 = 1, \dots, \overbrace{\dim(V_1)}^{n_1}; \dots; i_k = 1, \dots, \overbrace{\dim(V_k)}^{n_k}\big)$$

* Uis $w \neq 0$ esetén Hamel tétele szerint van olyan E bázisa W-nek, amelyre $w \in E$. Most a $\phi := w'_E$ elemére az E' duális bázisnak $\langle \phi, w \rangle = 1$.

együtthatókat.

Állítás: $\Phi(v_1,\ldots,v_k) = \sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_k=1}^{n_k} \alpha_{i_1\ldots i_k}\phi_{i_1}(v_1)\cdots\phi_{i_k}(v_k)$.

Bizonyítás. : Ekkor

$$\begin{aligned}\Phi(e_{j_1},\ldots,e_{j_k}) &= \alpha_{j_1\ldots j_k} = \\ &= \sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_k=1}^{n_k}\alpha_{i_1\ldots i_k}\underbrace{\phi_{i_1}(e_{j_1}}_{=\begin{cases}1 & i_1=1\\ 0 & i_1\neq 1\end{cases}})\cdots\underbrace{\phi_{i_k}(e_{j_k}}_{=\begin{cases}1 & i_k=k\\ 0 & i_k\neq k\end{cases}})\end{aligned}$$

az összes $j_1,\ldots,j_k$ indexek mellett. Ezekből lineáris kombinációkat véve, mindig

$$\begin{aligned}&\Phi\big(\underbrace{\textstyle\sum_{j_1=1}^{n_1}\beta_{j_1}^{(1)}e_{j_1}}_{v_1},\ldots,\underbrace{\textstyle\sum_{j_k=1}^{n_k}\beta_{j_k}^{(k)}e_{j_k}}_{v_k}\big) = \\ &= \sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_k=1}^{n_k}\alpha_{i_1\ldots i_k}\phi_{i_1}\big(\textstyle\sum_{j_1=1}^{n_1}\beta_{j_1}^{(1)}e_{j_1}\big)\cdots\phi_{i_k}\big(\textstyle\sum_{j_k=1}^{n_k}\beta_{j_k}^{(k)}e_{j_k}\big) = \\ &= \sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_k=1}^{n_k}\alpha_{i_1\ldots i_k}\phi_{i_1}(v_1)\cdots\phi_{i_k}(v_k)\ .\end{aligned}$$

Tenzorok

A lineáris leképezéseket leírhattuk a mátrixaik véges sok adata segítségével különböző bázisokat használva. Az előbb láttuk, hogy az $L \in \mathcal{L}(V,W)$ lineáris leképezés természetes módon azonosítható a $(v,\phi)\mapsto\langle\phi,Lv\rangle$ 2-lineáris $V\times W'\to$ $\mathbb{K}$ funkcionállal.

Cél: Konstruáljunk olyan együtthatórendszereket az általános k-lineáris funkcionálok leírására, amelyek a lineáris leképezéseket reprezentáló 2-lineáris funkcionálokra a leképezések mátrixait adják vissza.

Jelölés. Ha $V_1,\ldots,V_n,W_1,\ldots,W_m$ vektorterek a $\mathbb{K}$ test fölött,

$$\mathcal{T}_{V_1\ldots V_n}^{W_1\ldots W_m}(\mathbb{K}) := \mathcal{L}(V_1,\ldots,V_n,W_1',\ldots,W_m',\mathbb{K})\ .$$

Definíció. Legyenek $V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_m$ véges dimenziós vektorterek a $\mathbb{K}$ test fölött, $E_p := (e_1^{(p)}, \ldots, e_{N_p}^{(p)})$ $(p = 1, \ldots, n)$ ill. $F_i := (f_1^{(q)}, \ldots, f_{M_q}^{(q)})$ $(q = 1, \ldots, m)$ pedig rendezett bázisok a $V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_m$ terekben. Az $A \in \mathcal{T}_{V_1 \ldots V_n}^{W'_1 \ldots W'_m}(\mathbb{K})$ $(n+m)$-lineáris **leképezés tenzora** az $E_1, \ldots, E_n, F_1, \ldots, F_m$ bázisok (koordinátarendszerek) szerint a

$$(j_1, \ldots, j_n, i_1, \ldots, i_m) \mapsto A(e_{j_1}^{(1)}, \ldots, e_{j_n}^{(n)}, f_{i_1}^{(1)\prime}, \ldots, f_{i_m}^{(m)\prime})$$

függvény, amely az $\times_{p=1}^{n}\{1, \ldots, N_p\} \times \times_{q=1}^{m}\{1, \ldots, M_q\}$ indexhalmazon van értelmezve.

Példa. Az $A : V \to W$ lineáris leképezés mátrixa az E, F koordinátarendszerek szerint nem más, mint az A-t reprezentáló $V \times W' \to \mathbb{K}$ 2-lineáris funkcionál E, F-szerinti tenzora.

Definíció. Legyenek $N_1, \ldots, N_n, M_1, \ldots, M_m \in \mathbb{N}$. Ekkor a $\mathbb{K}$ test fölötti $(N_1 \times \cdots \times N_p) \times (M_1 \times \cdots \times M_q)$ típusú **tenzor**ok az

$$\begin{aligned} \alpha : &\big(\times_{p=1}^{n}\{1, \ldots, N_p\}\big) \times \big(\times_{q=1}^{n}\{1, \ldots, M_q\}\big) \to \mathbb{K} \\ &(j_1, \ldots, j_n, i_1, \ldots, i_m) \mapsto \alpha_{j_1 \ldots j_n}^{i_1 \ldots i_m} \end{aligned}$$

függvények. Jelölés:

$$\mathrm{Ten}_{M_1 \ldots M_m}^{N_1 \ldots N_n}(\mathbb{K}) := \big\{ \big(\times_{p=1}^{n} N_p\big) \times \big(\times_{q=1}^{m} M_q\big) \text{típusú tenzorok} \big\} \ .$$

Az azonos típusú tenzorok összegeit ill. konstansszorosait a megfelelő függvényműveletekkel képezzük:

$$\lambda\alpha + \mu\beta : (j_1, \ldots, j_n, i_1, \ldots, i_m) \mapsto \lambda\alpha_{+}\mu\beta_{j_1 \ldots j_n}^{i_1 \ldots i_m} \ .$$

Erre automatikusan áll a következő.

> Lemma. *A* $\mathrm{Ten}_{M_1 \ldots M_m}^{N_1 \ldots N_n}(\mathbb{K})$ *tér az összeadással és konstans-szorzásokkal* $\mathbb{K}$ *fölötti vektortér.*

Példa. Ha egy $A : V \to W$ lineáris operátor mátrixa (adott bázisok szerint) az $M \times N$ típusú $(\alpha_{ij})_{i=1}^{M}{}_{j=1}^{N}$ mátrix, akkor az A-t reprezentáló $V \times W' \to \mathbb{K}$ funkcionál tenzora (ugyanazon bázisokban) az $(M) \times (N)$ típusú $(\alpha_j^i)_{i=1}^{M}{}_{j=1}^{N}$ tenzor, ahol $\alpha_j^i = \alpha_{ij}$ $(i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, N)$.

Kérdés. Milyen tenzorműveletek felelhetnek meg a mátrixok szorzásának?

Megjegyzés. Ha $(\gamma_{ik})_{i=1}^{M}{}_{j=1}^{P}$ az $(\alpha_{ij})_{i=1}^{M}{}_{j=1}^{N}$ ill. $(\beta_{ij})_{i=1}^{N}{}_{j=1}^{P}$ mátrixok szorzata, akkor az előbbi példa tenzori írásmódjával

$$\gamma_k^i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^i \beta_k^j \qquad (1 \le i \le M,\ 1 \le k \le P)\ .$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma} &:= \left(\alpha_j^i \beta_k^\ell\right)_{i=1}^{M}{}_{j=1}^{N}{}_{\ell=1}^{N}{}_{k=1}^{P} \in \mathrm{Ten}_{MN}^{NP} \quad \text{mellett} \\ \gamma_k^i &= \sum_{j=1}^{N} \widetilde{\gamma}_{ij}^{jk}\ . \end{aligned}$$

Definíció. Az $\alpha \in \mathrm{Ten}_{N_1 \ldots N_n}^{M_1 \ldots M_m}(\mathbb{K})$ és $\beta \in \mathrm{Ten}_{Q_1 \ldots Q_q}^{P_1 \ldots P_p}(\mathbb{K})$ **tenzorok szorzata** az

$$\alpha\beta := \left(\alpha_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_m} \beta_{\ell_1 \ldots \ell_q}^{k_1 \ldots k_p}\right) \in \mathrm{Ten}_{N_1 \ldots N_n Q_1 \ldots Q_q}^{M_1 \ldots M_m P_1 \ldots P_p}(\mathbb{K})\ .$$

Legyen $\gamma \in \mathrm{Ten}_{N_1 \ldots N_n}^{M_1 \ldots M_m}(\mathbb{K})$. A γ tenzor **redukálható** a $\substack{\ell \\ k}$ indexpárnál, ha $N_k = M_\ell > 0$. Ekkor $R := N_k = M_\ell$-et írva, a γ tenzor $\substack{\ell \\ k}$-szerinti **redukált**ja a

$$\gamma_{\widehat{k}}^{\widehat{\ell}} : (i_1, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_{\ell-1}, j_{\ell+1}, \ldots, j_n) \mapsto \sum_{r=1}^{R} \gamma_{j_1 \ldots j_{\ell-1} j_{\ell+1} \ldots j_n}^{i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_m}$$

tenzor $\mathrm{Ten}_{N_1 \ldots N_{\ell-1} N_{\ell+1} \ldots N_n}^{M_1 \ldots M_{k-1} M_{k+1} \ldots M_m}(\mathbb{K})$-ban.

Einstein-féle jelölési konvenció:

Nem írunk $\sum$-jeleket a redukciók leírásánál, hanem a tenzori kifejezéseket úgy értjük, hogy mindig szummázunk az olyan változó-szimbólumokra, amelyek felső és alsó indexhelyen egyaránt előfordulnak*. Egyszerre több redukciót is kijelölhetünk ilyen módon.

Példa. Ha $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ten}_3^3(\mathbb{R})$ az $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{R})$ mátrixok tenzorai, $\delta(\in \mathrm{Ten}_3^3(\mathbb{R}))$ pedig az $\alpha\beta\gamma$ szorzatmátrix tenzora, akkor

$$\delta_j^i = \alpha_r^i \beta_s^r \gamma_j^s \qquad (i, j = 1, 2, 3)\ .$$

* Természetesen pontosan egyszer felül is és alul is.

Tétel. *Legyen az* $A \in \mathcal{L}(V^(1), \dots, V^{(n)}, W)$ *leképezés tenzora* $\left(\alpha^k_{j_1 \dots j^*{}_n}\right)$ *a* $V_1, \dots, V_n$*- ill.* W*-beli* $E_1, \dots, E_n$ *ill.* F *rendezett bázisok szerint. Legyen adva továbbá mindegyik* $r = 1, \dots, n$ *indexre egy* $B^{(r)} \in \mathcal{L}(U^{(r)}_1, \dots, U^{(r)}_{m_r}, V_r)$ *leképezés, amelynek tenzora az* $U^{(r)}_1, \dots, U^{(r)}_{m_r}$*- ill.* V_r*-beli* $D^{(r)}_1, \dots, D^{(r)}_{m_r}$ *ill.* E_r *rendezett bázisok szerint* $\left(\beta^{(r)\ j}_{i^{(r)}_1 \dots i^{(r)}_{m_r}}\right)$*. Ekkor az Einstein-konvencióval az*

$$A(B^{(1)}, \dots, B^{(r)}) \in \mathcal{L}(U^{(1)}_1, \dots, U^{1)}_{m_1}, \dots, U^{(n)}_{m_n}, W)$$

összetett leképezés tenzora

$$\left(\alpha^k_{j_1 \dots j_n} \beta^{(1)\ j_1}_{i^{(1)}_1 \dots i^{(1)}_{m_1}} \cdots \beta^{(n)\ j_n}_{i^{(n)}_1 \dots i^{(n)}_{m_n}} \right)$$

a $D^{(1)}_1, \dots, D^{1)}_{m_1}, \dots, D^{(n)}_{m_n}$ *ill.* F *rendezett bázisok szerint.*

Bizonyítás. Jelöljük az egyes bázisok elemeit a megfelelő kisbetűkkel, a duálisokat felső vesszővel. Tehát

$$\begin{aligned} F &:= (f_1, \dots, f_N) \\ E_r &:= \big(e_{r\ j} :\ j = 1, \dots, N_r\big) \\ D^{(r)}_s &:= \big(d^{(r)}_{s\ i} :\ i = 1, \dots, N^{(r)}_s\big) \end{aligned}$$

az összes megengedett indexekre. Definíció szerint

$$\begin{aligned} \alpha^k_{j_1 \dots j_n} &= \big\langle f'_k, A(e_{1\ j_1}, \dots, e_{n\ j_n})\big\rangle \\ \beta^{(r)\ j}_{i_1 \dots i_{m_r}} &= \big\langle e'_{r\ j}, B(d^{(r)}_{1\ i_1}, \dots, d^{(r)}_{m_r\ i_{m_r}} \ . \end{aligned}$$

Innen $A(B_1, \dots, B_n)$ tenzorának együtthatói

$$\begin{aligned} &\big\langle f'_k, A\big(\underbrace{B_1(d^{(1)}_{1\ i^{(1)}_1}, \dots, d^{(1)}_{m_1\ i^{(1)}_{m_1}})}_{b^{(1)}_{i^{(1)}_1 \dots i^{(1)}_{m_1}}}, \dots, \underbrace{B_n(d^{(n)}_{1\ i^{(n)}_1}, \dots, d^{(n)}_{m_n\ i^{(n)}_{m_n}})}_{b^{(n)}_{i^{(n)}_1 \dots i^{(n)}_{m_n}}}\big)\big\rangle = \\ =&\big\langle f'_k, A\big(\sum_{j_1} \langle e'_{1\ j_1}, b^{(1)}_{i^{(1)}_1 \dots i^{(1)}_{m_1}} \rangle e_{1\ j_1}, \dots, \sum_{j_n} \langle e'_{n\ j_n}, b^{(n)}_{i^{(n)}_1 \dots i^{(n)}_{m_n}} \rangle e_{n\ j_n}\big)\big\rangle = \\ =& \sum_{j_1, \dots, j_n} \langle e'_{1\ j_1}, b^{(1)}_{i^{(1)}_1 \dots i^{(1)}_{m_1}} \rangle \cdots \langle e'_{n\ j_n}, b^{(n)}_{i^{(n)}_1 \dots i^{(n)}_{m_n}} \rangle \big\langle f'_k, A(e_{1\ j_1}, \dots, e_{n\ j_n})\big\rangle = \\ =& \sum_{j_1, \dots, j_n} \beta^{(1)\ j_1}_{i^{(1)}_1 \dots i^{(1)}_{m_1}} \cdots \beta^{(n)\ j_n}_{i^{(n)}_1 \dots i^{(n)}_{m_n}} \alpha^k_{j_1 \dots j_n} \ . \end{aligned}$$

Megjegyzés. A tenzorkifejezéket az indexek számának csökkentése végett célszerű lehet a báziselemekre való hivatkozás helyett a bázisokra való hivatkozással leírni. Pl. az $A \in \mathcal{L}(V, W)$ operátor mátrixa az $E := (e_1, \ldots, e_m)$ ill. $F := (f_1, \ldots, f_n)$ rendezett bázisok szerint az $\left(\alpha^i_j\right)^{n\ \ m}_{i=1 j=1}$ tenzor (ahol $\alpha^i_j := \langle f_i, Ae_j\rangle$), amit $F'AE$-vel jelöltünk. Ezt a konvenciót könnyen kiterjeszthetjük.

Jelölés. Ha $A \in \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n, W)$ és $E_i := e^{(i)}_1, \ldots, e^{(i)}_{N_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ ill. $F := (f_1, \ldots, f_M$ rendezett bázisok az $E_1, \ldots, E_n$ ill. F terekben, akkor

$$
\begin{aligned}
A(E_1, \ldots, E_n) &:= \left(a_{j_1 \ldots j_n}\right)^{N_1\ \ \ldots N_n}_{j_1=1 \cdots j_n=1} \ , \\
&\quad \text{ahol } \ a_{j_1 \ldots j_n} := A(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) \ , \\
F'A(E_1, \ldots, E_n) &:= \left(\alpha^i_{j_1 \ldots j_n}\right)^{M\ \ N_1\ \ \ldots N_n}_{i=1 j_1=1 \cdots j_n=1} \ , \\
&\quad \text{ahol } \ \alpha^i_{j_1 \ldots j_n} := \langle f'_i, A(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})\rangle \ .
\end{aligned}
$$

Ennek megfelelően egy $\Phi \in \mathcal{T}^{W_1 \ldots W_m}_{V_1 \ldots V_n}(\mathbb{K})$ funkcionál tenzora az $E_1, \ldots, E_n$ ill. $F_1, \ldots, F_m$ rendezett bázisok szerint

$$
\Phi(E_1, \ldots, E_n, F'_1, \ldots, F'_m) \ .
$$

Tenzormennyiségek

Lemma. *Legyen $F := (f_1, \ldots, f_N)$ ill. $\overline{F} := (\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_N)$ két rendezett bázis a W térben. Ekkor az $\overline{F} : F$ operátor* duálisa $F' : \overline{F}'$. Azaz*

$$
T = \overline{F} : F \ , \ \rightarrow \quad T' = F' : \overline{F}' \ .
$$

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőlegesen rögzített i indexet. Azt kell megmutatnunk, hogy $T'\overline{f}'_i = f_i$. Ez áll, hiszen

$$
\begin{aligned}
\langle T'\overline{f}'_i, f_j\rangle = \langle \overline{f}'_i, Tf_j\rangle = \langle \overline{f}'_i, \overline{f}_j\rangle = \delta_{ij} = \\
= \langle f'_i, f_j\rangle \qquad (j = 1, \ldots, N) \ .
\end{aligned}
$$

Tétel. *Legyenek* $V_1, \dots, V_n, W_1, \dots, W_m$ *véges dimenziós vektorterek,* $E_p := (e_1^{(p)}, \dots, e_{N_p}^{(p)}$, $\overline{E}_p := (\overline{e}_1^{(p)}, \dots, \overline{e}_{N_p}^{(p)}$ $(p = 1, \dots, n)$ *ill.* $F_q := (f_1^{(q)}, \dots, f_{M_q}^{(q)}$ $\overline{F}_i := (\overline{f}_1^{(q)}, \dots, \overline{f}_{M_q}^{(q)}$ $(q = 1, \dots, m)$ *pedig rendezett bázisok a* $V_1, \dots, V_n, W_1, \dots, W_m$ *terekben. Ekkor a* $\Phi \in \mathcal{T}_{V_1 \dots V_n}^{W_1 \dots W_m}(\mathbb{K})$ *funkcionál* $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_m$ *szerinti* α *ill.* $\overline{E}_1, \dots, \overline{E}_n$, $\overline{F}_1, \dots, \overline{F}_m$ *szerinti* $\overline{\alpha}$ *tenzorai között az Einstein konvencióval az alábbi összefüggés áll fönn*

$$\text{(T)} \qquad \overline{\alpha}_{\overline{j}_1 \dots \overline{j}_n}^{\overline{i}_1 \dots \overline{i}_m} = \alpha_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} (\sigma_1)_{\overline{j}_1}^{j_1} \cdots (\sigma_n)_{\overline{j}_n}^{j_n} (\widehat{\tau}_1)_{i_1}^{\overline{i}_1} \cdots (\widehat{\tau}_m)_{i_m}^{\overline{i}_m} ,$$

ahol σ_p *az* $(\overline{E}_p : E_p$ *koordináta-áttérési operátor* E_p, E_p*-szerinti mátrixának megfelelő tenzor,* $\widehat{\tau}_q$ *pedig a* $\overline{F}_q : F_q$ *operátor* F_q, F_q*-szerinti* τ *mátrixával a* $(\tau')^{-1}$ *mátrixnak megfelelő tenzor, azaz*

$$\begin{aligned}
&S_p := \overline{E}_p : E_p \ , \quad T_q := \overline{F}_q : F_q \quad \textit{mellett} \\
&\sigma_p := E_p' S_p E_p = E_p' \overline{E}_p \ , \\
&\widehat{\tau}_q := F_q"(F_q' : \overline{F}_q')F_q' = F_q\big((T_q^{-1})'\big)F_q' \ .
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Tudjuk:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \Phi(E_1, \dots, E_n, F_1', \dots, F_m') \ , \\
\overline{\alpha} &= \Phi(\overline{E}_1, \dots, \overline{E}_n, \overline{F}_1', \dots, \overline{F}_m') \ .
\end{aligned}$$

Mivel $\overline{E}_p = S_p(E_p)$, és mivel

$$\overline{F}_q' = (\overline{F}_q' : F_q')F_q' = (F_q' : \overline{F}_q')^{-1}F_q' = T_q'^{-1}(F_q')$$

a Lemma szerint, fennáll

$$\overline{\alpha} = \Phi\big(S_1(E_1), \dots, S_n(E_n), T_1'^{-1}(F_1'), \dots, T_m'^{-1}(F_m')\big) \ .$$

Innen az előző alfejezet tétele azonnal adja a bizonyítandó formulánkat.

Példa. A fizikusok által mért mennyiségek számértékű függvények, amelyek a mérés alapjául szolgáló vonatkoztatási rendszertől függenek. Számunkra tipikus példa lehet a következő. Legyen adva két pont, mondjuk o, p az $\mathbb{R}^3$-mal izomorfnak tekintett terünkben. Az o-ból kiinduló különböző X Descartes koordinátarendszerek szerint a p pont koordinátáira különböző $(x_1(p), x_2(p), x_3(p))$ mérési értékeket kapunk. Mivel o, p rögzítettek, ezek csak az X rendszer választásától függenek, azaz egy $X \mapsto \big(\mathbf{v}_i(X)\big)_{i=1}^3$ leképezést adnak (itt $\mathbf{v}_i(X) := x_i(p)$). Tudjuk, hogy a különböző Descartes rendszerek egymással lineáris kapcsolatban vannak. Vagyis ha $\overline{X}$ egy másik o-ból kiinduló Descartes rendszer, akkor $\overline{x}_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j$ ($i = 1,2,3$) valamilyen α együtthatókkal. Ezzel azon módon változik együtt természetesen a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ triplet:

$$\mathbf{v}_i(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} \mathbf{v}(X) \qquad (i = 1,2,3) \ .$$

Ha csak a mérési eredményeket kapjuk meg (tehát ha ismerjük az $X \mapsto (\xi_1(X), \ldots)$ hozzárendelést, akkor is tudunk ebből a formulából visszakövetkeztetni arra, hogy itt valamilyen $\overrightarrow{op}$ irányított szakasz koordinátáiról van szó. Ezért a fizikusok az ilyen $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ hozzárendeléseket kovariáns (a koordinátatranszformációval egyező módon változó) **vektormennyiség**nek nevezik. Jegyezzük meg, hogy az X rendszer $E := (e_1, e_2, e_3)$ egységvektorrendszerével az x_i koordinátafüggvény nem más, mint a duális E' bázis e_i' tagja. Tehát a kovariáns vektormennyiségek a tér duálisa feletti funkcionálok koordinátái.

Definíció. Használjuk ettől kezdve a

$$\mathcal{B}(V) := \big\{V \text{ rendezett bázisai}\big\}$$

jelölést a véges dimenziós vektortereknél.

Legyenek $V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_m$ rendre $N_1, \ldots, N_n, M_1, \ldots, M_m$ dimenziós vektorterek. Egy

$$\begin{aligned} \mathbf{A} :& \mathcal{B}(V_1) \times \cdots \times \mathcal{B}(V_n) \times \mathcal{B}(W_1) \times \cdots \times \mathcal{B}(W_m) \to \mathrm{Ten}_{N_1 \ldots N_n}^{M_1 \ldots M_m}(\mathbb{K}) \\ & (E_1, \ldots, E_n, F_1, \ldots, F_m) \mapsto \big(\mathbf{A}_{j_1 \ldots j_n}^{i_1 \ldots i_m}(E_1, \ldots, E_n, F_1, \ldots, F_m)\big) \end{aligned}$$

hozzárendelés $\mathrm{Ten}_{V_1 \ldots V_n}^{W_1 \ldots W_m}$-típusú **tenzormennyiség**, amely **kontravariáns** a $V_1, \ldots, V_n$-beli és **kovariáns** a $W_1, \ldots, W_m$-beli változóiban, ha teljesíti a (T) transzformációs formulát valahányszor

$$\alpha := \mathbf{A}(E_1, \ldots, F_m) \ , \quad \overline{\alpha} := \mathbf{A}(\overline{E}_1, \ldots, \overline{F}_m) \ .$$

Propozíció. *Minden tenzormennyiség valamilyen (egyértelműen meghatározott) multilineáris funkcionál tenzori reprezentációja.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_{V_1 \ldots V_n}^{W_1 \ldots W_m}$. Rögzítsünk tetszőlegesen

$$E_1 := (e_1^{(1)}, \ldots, e_{N_1}^{(1)}) \in \mathcal{B}(V_1) \ , \ \ldots \ , \ F_m := (f_1^{(m)}, \ldots, f_{M_m}^{(m)}) \in \mathcal{B}(W_m)$$

rendezett bázisokat. Mivel egy bázisrendszeren adott értékek egy multilineáris leképezést egyértelműen meghatároznak, pontosan egy olyan $A \in \mathcal{T}_{V_1 \ldots V_n}^{W_1 \ldots W_m}$ funkcionál létezik, amelyre

$$A(e_{j_1}^{(1)}, \ldots, e_{j_n}^{(n)}, f_{i_1}^{(1)\prime}, \ldots, f_{i_m}^{(m)\prime}) = \mathbf{A}_{j_1 \ldots j_n}^{i_1 \ldots i_m}(E_1, \ldots, E_n, F_1, \ldots, F_m)$$

az összes lehetséges indexekre. A Tétel szerint az A funkcionál teljesíti a (T) transzformációs formulát.

Tenzori szorzat

Kérdés. Milyen multilineáris funkcionálok közötti művelet felel meg a tenzorok szorzásának?

Definíció. A $\Phi \in \mathcal{T}_{V_1 \ldots V_m}^{W_1 \ldots W_p}$ és $\Psi \in \mathcal{T}_{V_{m+1} \ldots V_{m+n}}^{W_{p+1} \ldots W_{p+q}}$ funkcionálok **tenzori szorzat**a

$$\begin{aligned} \Phi \otimes \Psi : (v_1, \ldots, v_{m+n}, w_1, \ldots, w_{p+q}) \mapsto \\ \mapsto \Phi(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_p) \cdot \Psi(v_{m+1}, \ldots, v_{m+n}, w_{p+1}, \ldots, w_{p+q}) \; . \end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha itt Φ tenzora $\big(\alpha_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_p}\big)$ ill. Ψ tenzora $\big(\beta_{i_{m+1} \ldots i_{m+n}}^{j_{p+1} \ldots j_{p+q}}\big)$ valamilyen $E_1, \ldots, E_m, F_1, \ldots, F_p$ ill. $E_{m+1}, \ldots, E_{m+n}, F_{p+1}, \ldots, F_{p+q}$ rendezett bázisok szerint, akkor $\Phi \otimes \Psi$ tenzora $E_1, \ldots, E_{m+n}, F_1, \ldots, F_{p+q}$ szerint valóban az $\big(\alpha_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_p} \beta_{i_{m+1} \ldots i_{m+n}}^{j_{p+1} \ldots j_{p+q}}\big)$ szorzattenzor.

Lemma. *A tenzori szorzás asszociatív.*

Bizonyítás. A $(\Phi \otimes \Psi) \otimes \Theta$ ill. $\Phi(\otimes \Psi \otimes \Theta)$ funkcionálok ugyanazon három számértékű függvény szorzatai különböző csoportosítással.

Következmény. *A $\Phi_1 \otimes \cdots \otimes \Phi_n$ szorzat mindenfajta zárójelezéssel ugyanazt az értéket adja. (Így a zárójelezését szokásosan el is hagyjuk.)*

Gyakorlat. $\otimes$ nem kommutatív.

Példa. A $V_1, \ldots, V_k$ vektorterekben a $\phi_1 \in V_1', \ldots, \phi_k \in V_k'$ lineáris funkcionálok tenzori szorzata a

$$\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_k : (v_1, \ldots v_k) \mapsto \phi_1(v_1) \cdots \phi_k(v_k)$$

k-lineáris funkcionál.

Definíció. Ha $V_1, \ldots, V_k$ vektorterek,

$$V_1' \otimes \cdots \otimes V_k' := \mathrm{Span}\big\{\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_k : \ \phi_1 \in V_1', \ldots, \phi_k \in V_k'\big\} = \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_k, \mathbb{K}) \; .$$

Emlékeztető. A "k-lineáris funkcionálok" alfejezet Tétele szerint

$$\big\{e_1' \otimes \cdots \otimes e_k' : \ e_1 \in E_1, \ldots, e_k \in E_k\big\} \text{ bázis} \subset V_1' \otimes \cdots \otimes V_k'$$

valahányszor $E_1, \dots, E_k$ bázisok $V_1, \dots, V_K$-ban (és $'$ szokásosan a duális bázis elemeire utal). Innen

$$V_1' \otimes \dots \otimes V_n' = \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n, \mathbb{K}) \ .$$

Kérdés. Lehet-e általános vektorterek tenzori szorzatát definiálni?

Definíció. A $(V_k')' \equiv V_k$ azonosításnak megfelelően

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_k = \mathcal{L}(V_1', \dots, V_k', \mathbb{K})$$

a $V_1, \dots, V_k$ terek **tenzori szorzat**a.

Példa. Használtuk a $v \otimes \phi$ jelölést a lineáris $V_1 \to V_2$ leképezéseknél. Ez megfelel annak a konvenciónknak, amely szerint azonosítottuk az $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ operátort az $(\psi, u) \mapsto \langle \psi A u \rangle$ funkcionállal. Ezzel ugyanis

$$\begin{aligned} v \otimes \phi &= \big[u \mapsto \langle \phi, u \rangle v\big] \equiv \\ &\equiv \big[(\psi, u) \mapsto \underbrace{\langle \psi, v \rangle}_{\delta_v(\psi)} \langle \phi, u \rangle\big] = \underbrace{\delta_v}_{\equiv v} \otimes \phi \ . \end{aligned}$$

Tétel. *$\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k, \mathbb{K})$ kanonikusan azonosítható a $(V_1 \otimes \dots \otimes V_k)'$ duálissal, ha $\dim V_1, \dots, \dim V_k < \infty$. Nevezetesen, van olyan (egyértelműen meghatározott) lineáris*

$$I : \mathcal{L}(V_1, \dots, V_k, \mathbb{K}) \leftrightarrow (V_1 \otimes \dots \otimes V_k)'$$

leképezés, amelyre

$$\big\langle I(\Phi), x_1 \otimes \dots \otimes x_k \big\rangle = \Phi(x_1, \dots, x_k)$$

valahányszor $\Phi \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_k, \mathbb{K})$ és $x_1 \in V_1, \dots, x_k \in V_k$.

Bizonyítás. Legyenek $E_1, \dots, E_k$ tetszőlegesen rögzített bázisok a $V_1, \dots, V_k$ terekben. Ekkor

$$\begin{aligned} \big\{e_1' \otimes \dots \otimes e_k' :\ e_1 \in E_1, \dots, e_k \in E_k\big\} \text{ bázis} &\subset V_1' \otimes \dots \otimes V_k' = \\ &= \mathcal{L}(V_1, \dots, V_k, \mathbb{K}) \ , \\ \mathcal{E} := \big\{e_1 \otimes \dots \otimes e_k :\ e_1 \in E_1, \dots, e_k \in E_k\big\} \text{ bázis} &\subset V_1 \otimes \dots \otimes V_k \ . \end{aligned}$$

Így van egy egyértelműen meghatározott $I : \mathcal{L}(V_1, \dots, V_k, \mathbb{K}) \leftrightarrow (V_1 \otimes \dots \otimes V_k)'$ lineáris leképezés, amelyre

$$I : e_1' \otimes \dots \otimes e_k' \mapsto (e_1 \otimes \dots e_k)_{\mathcal{E}}' \qquad (e_1 \in E_1, \dots, e_k \in E_k) \ .$$

Ezzel tetszőleges $e_1, f_1 \in E_1, \ldots, e_k, f_k \in E_k$ mellett

$$\begin{aligned}
\big\langle I(e_1' \otimes \cdots \otimes e_k'), f_1 \otimes \cdots \otimes f_k \big\rangle &= \big\langle (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k)'_{\mathcal{E}}, f_1 \otimes \cdots \otimes f_k \big\rangle = \\
&= \big[1 \text{ ha } e_1 = f_1, \ldots, e_k = f_k \ , \quad 0 \text{ egyébként}\big] = \\
&= e_1'(f_1) \cdots e_k'(f_k) = \\
&= e_1' \otimes \cdots \otimes e_k'(f_1, \ldots, f_k) \ .
\end{aligned}$$

Innen lineáris kombinációkra áttérve kapjuk a tétel állítását.

Példa. A legfeljebb N-edfokú egyváltozós $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomok $\mathrm{Pol}_N(\mathbb{R})$ terének $\mathrm{Pol}_N(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{Pol}_N(\mathbb{R})$ tenzori négyzete azonosítható a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_2^N := \Big\{ \sum_{k,\ell=1}^{N} a_{k\ell} x^k y^\ell : \ a_{11}, \ldots, a_{NN} \in \mathbb{R} \Big\} \ , \\
&x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\
&\quad (\xi, \eta) \mapsto \xi \qquad\quad (\xi, \eta) \mapsto \eta
\end{aligned}$$

kétváltozós polinom-térrel, úgy, hogy mindig a $P \otimes Q$ elemnek a $P(x)Q(y)$ kétváltozós polinom feleljen meg.

A $z^k : \xi \mapsto \xi^k$ $(k = 0, \ldots, N)$ homogén polinomok bázist képeznek Az $x^k y^\ell$ $(k, \ell = 1, \ldots, N)$ kétváltozós homogén polinomok lineárisan függetlenek (mint $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények), így bázist adnak $\mathcal{P}_2^N$-ben. Vagyis a

$$\sum_{k,\ell=1}^{N} c_{k\ell} z^k \otimes z^\ell \mapsto \sum_{k,\ell=1}^{N} x^k y^\ell$$

leképezés a megfelelő.

Megjegyzés. A szakirodalomban a $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ tenzori szorzat teret sokan eleve mint az $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_k, \mathbb{K})$ funkcionáltér (pre)duálisát definiálják véges dimenzióban. Végtelen dimenzióban ilyen szép dualitási tulajdonságok nem állnak. Ott a véges dimenzióban népszerűbb funkcionál-reprezentációs definíciónkkal szemben (ami csak duális terek szorzatára működik jól) célszerű a Tétel által sugalmazott alábbi definíció:

$$\begin{aligned}
&x_1 \otimes \cdots \otimes x_k := \big[\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_k, \mathbb{K}) \ni \Phi \mapsto \Phi(x_1, \ldots, x_k)\big] \\
&V_1 \otimes \cdots \otimes V_k := \mathrm{Span}\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_k : \ x_1 \in V_1, \ldots, x_k \in V_k\} \ \subset \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_k, \mathbb{K}).
\end{aligned}$$

Szimmetrikus leképezések

A legtöbb alkalmazásban a multilineáris leképezések változói mind ugyanazon a vektortéren vannak értelmezve, sőt a leképezés a sorrendjüktől nem is függ. (Ilyen pl. a $(\xi,\eta)\mapsto\xi\eta$ szorzás).

Jelölés. A k-lineáris $V^k\to W$ leképezések tere

$$\mathcal{L}({}^kV,W):=\mathcal{L}(\underbrace{V,\dots,V}_{k},W)\ .$$

Definíció. Az $L\in\mathcal{L}({}^kV,W)$ leképezés **szimmetrikus**, ha független az argumentumai sorrendjétől, azaz ha

$$L(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(k)})=L(x_1,\dots,x_k)\qquad(\pi\in\mathrm{PERM}_k)\ ,$$

ahol $\mathrm{PERM}_k:=\big\{\pi:\ \pi:\{1,\dots,k\}\leftrightarrow\{1,\dots,k\}\big\}$
az $\{1,\dots,k\}$ indexhalmaz permutációcsoportja.

Jelölés. $\mathcal{L}^{\mathrm{S}}({}^kV,W):=\{L\in\mathcal{L}({}^kV,W):\ L\ \textit{szimmetrikus}\}$.

Példa. A többváltozós valós függvénytanban alapvető szerepet játszik a következő tény (Schwarz tétele). Ha $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ egy k-szor folytonosan differenciálható függvény, akkor minden $a\in\mathbb{R}^N$ helynél az irány szerinti deriváltakkal alkotott

$$(v_1,\dots,v_k)\mapsto f'_{v_1}{}'_{v_2}{}^{\cdots}{}'_{v_k}f(a)$$

funkcionál szimmetrikus k-lineáris $\big(\mathbb{R}^N\big)^k\to\mathbb{R}$ leképezés. Emlékeztető: egy g függvény v-iránybeli deriváltja a b helyen

$$g'_v(b):=\lim_{\tau\to0}\frac{1}{\tau}\big[g(b+\tau v)-g(b)\big]\qquad(b\in\mathbb{R}^N\ ,\ g:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R})\ .$$

Lemma. *Ha a* $\mathbb{K}$ *skalártestben* $2,3,\dots,k\neq0^*$, *akkor az*

$$A\mapsto A^{\mathrm{S}}\in\mathcal{L}^{\mathrm{S}}({}^kV,W)\ ,\ \text{ahol}$$
$$A^{\mathrm{S}}:(x_1,\dots,x_k)\mapsto\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in\mathrm{PERM}_k}L(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(k)})$$

leképezés egy lineáris $\mathcal{L}({}^kV,W)\to\mathcal{L}^{\mathrm{S}}({}^kV,W)$ *projekció.*

Bizonyítás. Feltevés szerint a $\mathbb{K}$ testben $k! = 1 \cdot 2 \cdots k \neq 0$ és ilyenkor az $1/k!$ faktor jól-definiált. Ekkor az $A \mapsto A^{\mathrm{S}}$ leképezés triviálisan lineáris. Minden $\sigma \in \mathrm{PERM}_k$-ra

$$\begin{aligned}
A^{\mathrm{S}}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) &= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \mathrm{PERM}_k} L(x_{\sigma(\pi(1))}, \ldots, x_{\sigma(\pi(k))}) = \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \sigma(\mathrm{PERM}_k)} L(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(k)}) = \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathrm{PERM}_k} L(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(k)}) = A^{\mathrm{S}}(x_1, \ldots, x_k)
\end{aligned}$$

akármilyen $x_1, \ldots, x_k \in V$ mellett. Innen azonnal adódik A^{S} szimmetriája, továbbá az a tény, hogy $A^{\mathrm{S}} = A$ valahányszor $A \in \mathcal{L}^{\mathrm{S}}({}^k V, W)$.

Definíció. A Lemmában megadott A^{S} leképezés az A multilineáris leképezés **szimmetrizált**ja.

Példa. A mátrix szorzás szimmetrizáltja $\mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K})^2 \ni (\alpha, \beta) \mapsto \frac{1}{2}(\alpha\beta + \beta\alpha)$ az ún. **Jordan szorzat**.

Definíció. Az $A \in \mathcal{L}({}^k V, W)$ leképezés **diagonalizált**ja

$$\widehat{A} := \big[V \ni x \mapsto A(\underbrace{x, \ldots, x}_{k}) \big] \ .$$

Tétel. (Polarizációs formula). *Tegyük fel, hogy $\mathbb{K}$-ban $2, 3, \ldots, k \neq 0$, és legyenek V, W vektorterek $\mathbb{K}$ fölött. Ekkor a szimmetrikus k-lineáris $V^k \to W$ leképezéseket egyértelműen meghatározzák a diagonális részeik. Nevezetesen*

$$L(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{2^k \cdot k!} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k \widehat{L}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_k x_k)$$

valahányszor $L \in \mathcal{L}^{\mathrm{S}}({}^k V, W)$ és $x_1, \ldots, x_k \in V$.

Bizonyítás. Legyen $x_1, \ldots, x_k \in V$ tetszőlegesen rögzítve, és tekintsük a

$$P : (\tau_1, \ldots, \tau_k) \mapsto k! \widehat{L}(\tau_1 x_1 + \cdots + \tau_k x_k)$$

polinomiális leképezés

$$P(\tau_1, \ldots, \tau_k) = \sum_{\substack{0 \le i_1, \ldots, i_k \le k \\ i_1 + \cdots + i_k = k}} \tau_1^{i_1} \cdots \tau_k^{i_k} v_{i_1 \ldots i_k}$$

kifejtését. Itt L szimmetriája miatt használhatjuk a polinomiális tételt. Ezért

$$v_{i_1\dots i_k} = \frac{k!}{i_1!\cdots i_k!} L(\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{i_1},\dots,\underbrace{x_k,\dots,x_k}_{i_k}) \qquad (i_1+\cdots+i_k=k)\ .$$

Innen

$$\begin{aligned}\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm1} \varepsilon_1\cdots\varepsilon_k \widehat{L}(\varepsilon_1 x_1+\cdots+\varepsilon_k x_k) &= \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm1} \varepsilon_1\cdots\varepsilon_k P(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k) = \\ &= \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm1} \varepsilon_1\cdots\varepsilon_k \sum_{\substack{0\le i_1,\dots,i_k\le k\\ i_1+\cdots+i_k=k}} \varepsilon_1^{i_1}\cdots\varepsilon_k^{i_k} v_{i_1\dots i_k} = \\ &= \sum_{\substack{0\le i_1,\dots,i_k\le k\\ i_1+\cdots+i_k=k}} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm1} \varepsilon_1^{i_1+1}\cdots\varepsilon_k^{i_k+1} v_{i_1\dots i_k}\ .\end{aligned}$$

A döntő észrevétel az, hogy ha nem $i_1 = \cdots = \subset_k = 1$, akkor mindig $\exists\ \ell \quad i_\ell = 0$ azaz $\sum_{\varepsilon_\ell=\pm1} \varepsilon_\ell^{i_\ell+1} = 0$, és így

$$\begin{aligned}\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm1} \varepsilon_1^{i_1+1}\cdots\varepsilon_k^{i_k+1} &= \textstyle\sum_{\varepsilon_1=\pm1}\varepsilon_1^{i_1+1}\cdots\sum_{\varepsilon_k=\pm1}\varepsilon_k^{i_k+1} = \\ &= \left[2^k \ \text{ ha } i_1=\cdots=i_k=1, \ \ 0 \text{ egyébként}\right]\ .\end{aligned}$$

Feltevés szerint $\mathbb{K}$-ban $2,3,\dots,k\neq0$, és így $2^k, k!\neq0$ is. Másrészt $k!\cdot L(x_1,\dots,x_k) = v_{1\dots1}$.

ALTERNÁLÓ FORMÁK, DETERMINÁNSOK

Első célunk ebben a fejezetben a

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

egyenletrendszer megoldóképlete, az ún. **Cramer szabály**.

Emlékeztető. Ha az egyenletrendszer $A := \big(a_{ij}\big)_{i,j=1}^{n}$ mátrixának $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek ($\mathbb{K}^n$-ben), akkor minden $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ mellett pontosan egy $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ megoldás létezik. Ha $a_1, \dots, a_n$ lineárisan függők, $\mathrm{rank}(A) < n = \dim(\mathbb{K}^n)$, és így $\exists\, b \in \mathbb{K}^n \quad \nexists\, x \in \mathbb{K}^n \quad Ax = b$.

Példa. Legyen $n = 2$. Ekkor

$$\begin{aligned} &a_1, a_2 \text{ lin.függő} \iff a_{11} : a_{12} = a_{21} : a_{22} \iff a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0\ , \\ &D(u,v) := u_1v_2 - u_2v_1 \qquad \left(u := \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right), v := \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^2\right) \text{ jelöléssel} \\ &x_1 = \frac{D(b, a_2)}{D(a_1, a_2)}\ \ ,\quad x_2 = \frac{D(a_1, b)}{D(a_1, a_2)}\ ,\quad D(a_1, a_2) \neq 0 \ \text{ ha } a_1, a_2 \text{ lin.fgtlen} \end{aligned}$$

az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldása.

Determináló formák

Definíció. Egy $\mathbb{K}$ test fölötti V egy vektortér n**-formái** az n-lineáris $V^n \to \mathbb{K}$ funkcionálok, azaz

$$\{n\text{-formák } V \text{ fölött}\} := \mathcal{L}(^n V, \mathbb{K}) \ .$$

Egy V fölötti D n-forma **determináló**, ha $\dim(V) = n$ és

$$D(v_1, \dots, v_n) \neq 0 \iff \{v_1, \dots, v_n\} \text{ bázis} \subset V \qquad (v_1, \dots, v_n \in V) \ .$$

Megjegyzés. Ha $\dim(V) = n$, egy n-elemű vektorcsalád pontosan akkor bázis V-ben, ha lineárisan független.

A Cramer szabály kulcsa a következő.

Propozíció. *Legyen D egy determináló forma a V téren, és $\{a_1, \dots, a_n\}$*

bázis V-ben. Ekkor tetszőleges $b \in V$ vektorra

$$\begin{aligned} & x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b \iff \\ & x_k = \frac{D(a_1, \dots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \dots, a_n)}{D(a_1, \dots, a_n)} \qquad (k = 1, \dots, n) \ . \end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen $b \in V$ tetszőlegesen adott. Mivel $\{a_1, \dots, a_n\}$ bázis V-ben,

$$\exists! \ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \qquad x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b \ .$$

Ha pedig $x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b$, akkor bármely k mellett

$$\begin{aligned} D(a_1, \dots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \dots, a_n) &= D(a_1, \dots, a_{k-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j a_j, a_{k+1}, \dots, a_n) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{D(a_1, \dots, a_{k-1}, a_j, a_{k+1}, \dots, a_n)}_{0 \text{ ha } j \neq k} = \\ &= x_k D(a_1, \dots, a_n) \ , \end{aligned}$$

hiszen $j \neq k$ esetén az $\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_j, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ halmaz $(n-1)$-elemű, így nem lehet bázis az n-dimenziós V-ben.

Kérdés. Hogyan adhatók meg $\mathbb{K}^n$ determináló formái?

Alternáló formák

Probléma. Hogyan jellemezhetők azok a $\Phi \in \mathcal{L}({}^kV, \mathbb{K})$ k-lineáris formák, amelyekre

$$\Phi(e_1, \dots, e_k) = 0 \qquad \big((e_1, \dots, e_k) \text{ lin. függő}\big) \ .$$

Megjegyzés. Ha $k = \dim(V)$, minden determináló forma ilyen. Lineáris algebrai szempontból azért szerencsésebb a fenti probléma vizsgálata, mint direkt a determináló formáké, mert a determináló formák lineáris kombinációi nem feltétlenül determinálók (pl. 0 sem determináló).

Kezdjük a $k = 2$ esettel.

Lemma. *Ha* $\mathbb{K} \neq \{0, 1\}$, *egy* $\varphi \in \mathcal{L}({}^2V, \mathbb{K})$ *formánál ekvivalensek*
1) $\varphi(v, v) = 0 \quad (v \in V)$, 2) $\varphi(u, v) = -\varphi(v, u) \quad (u, v \in V)$.

Bizonyítás. 2) $\Rightarrow$ 1): Ekkor $\varphi(v, v) = -\varphi(v, v)$, azaz $2\varphi(v, v) = 0$. Mivel $\mathbb{K} \neq \{0, 1\}$, fennáll $2 \neq 0$ $\mathbb{K}$-ban.

1) $\Rightarrow$ 2): Feltevés szerint $\varphi(u + v, u + v) = 0$. Azaz

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(u + v, u + v) = \\ &= \underbrace{\varphi(u, u)}_{0} + \varphi(u, v) + \varphi(v, u) + \underbrace{\varphi(v, v)}_{0} \ . \end{aligned}$$

Definíció. A $\Phi \in \mathcal{L}({}^kV, \mathbb{K}) \big(= \otimes^k V' := V' \otimes \cdots \otimes V'\big)$ k-forma **alternáló**, ha két változóját felcserélve mindig előjelet vált, azaz

$$\begin{aligned} &\Phi(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, y, v_j, \dots, v_k) = \\ &= -\Phi(v_1, \dots, v_{i-1}, y, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, x, v_{j+1}, \dots v_k) \end{aligned}$$

valahányszor $x, y, v_1, \dots, v_k \in V$ és $1 \leq i < j \leq k$.

Tétel. *Ha* $\phi \in \otimes^k V'$, *ahol* $k \leq n := \dim(V)$, *akkor ekvivalensek*
1) $\Phi(e_1, \dots, e_k) = 0 \qquad \big((e_1, \dots, e_k)$ *lin. függő*$\big)$,
2) $\Phi(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, x, v_{j+1}, \dots, v_k) = 0 \quad (x, v_1, \dots, v_k \in V,\ 1 \leq i, j \leq n)$,
3) Φ *alternáló.*

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2): A $(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, x, v_{j+1}, \dots, v_k)$ vektorrendszer triviálisan lineárisan függő (x kétszer fordul elő benne).

2) $\Rightarrow$ 3): Legyenek $v_1, \ldots, v_k \in V$, $1 \le i < j \le k$ tetszőlegesen rögzítve. Ekkor a

$$\varphi_{ij} : (x, y) \mapsto \Phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, y, v_{j+1}, \ldots, v_k)$$

2-lineáris formára feltevés szerint

$$\varphi_{ij}(x, x) = 0 \qquad (x \in V) \ .$$

A Lemma alapján $\varphi_{ij}(x, y) = -\varphi_{ij}(y, x)$ $(x, y \in V)$, azaz Ψ előjelet vált az i-edik változóját a j-edikkel felcserélve.

3) $\Rightarrow$ 1): Tegyük fel, hogy $(e_1, \ldots, e_k)$ lineárisan függő V-beli vektorrendszer. Ekkor

$$\exists\, j \quad \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1} \qquad e_j = \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i e_i \ .$$

Ezzel

$$\begin{aligned}\Phi(e_1, \ldots, e_k) &= \Phi(e_1, \ldots, e_{j-1}, \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i e_i, e_{j+1}, \ldots, e_k) = \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \Phi(e_1, \ldots, \underbrace{e_i, \ldots, e_{j-1}, e_i}_{0}, e_{j+1}, \ldots, e_n) = \\ &= 0 \ .\end{aligned}$$

Következmény. *Minden determináló forma alternáló.*

Definíció. Egy tetszőleges S halmaz két különböző elemének a felcserélését **transzpozíció**nak nevezzük. Vagyis a $\pi : S \to S$ leképezés **transzpozíció**, ha $\exists\ a, b \in S \quad a \neq b,\ \pi(a) = b,\ \pi(s) = s\ (s \neq a, b)$.

Jelölés. Függetlenül az S halmazból, τ_{ab} fogja jelölni az a, b elempár felcserélését (transzpozícióját). A következőkben, ha Φ egy k-forma és $\pi \in \mathrm{PERM}_k (:= \big\{\{1, \ldots, k\} \leftrightarrow \{1, \ldots, k\}$ leképezések$\big\}$ egy indexpermutáció, $T_\pi \Phi$ fogja jelölni a

$$T_\pi \Phi : (v_1, \ldots, v_k) \mapsto \Phi(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)})$$

formát.

Megjegyzés. Észrevétel: $T_\pi \circ T_\sigma \Phi = T_{\pi \circ \sigma} \Phi$ mindig.

Propozíció. *A $\Phi \in \mathcal{L}(^k V, \mathbb{K})$ forma pontosan akkor alternáló, ha*

$$T_\pi \Phi = (-1)^m \Phi \quad \text{valahányszor} \quad \pi = \tau_{a_m b_m} \circ \cdots \circ \tau_{a_1 b_1} \ .$$

BIZONYÍTÁS. Definíció szerint a Φ forma pontosan akkor alternáló, ha $T_{\tau_{ij}}\Phi = -\Phi$ $(1 \le i < j \le k)$. Innen m szerinti indukcióval azonnal adódik az állítás az előző Megjegyzés alapján.

Permutációk paritása

Megjegyzés. Észrevétel: Ha $\pi \in \mathrm{PERM}_n$ (azaz $\pi : \{1,\dots,n\} \leftrightarrow \{1,\dots,n\}$) és $1 \le a < b \le n$, akkor az a, b számokat felcserélő transzpozíció után π-t végrehajtva, a kapott $\pi\tau_{ab}(:= \pi \circ \tau_{ab}$ permutáció megcseréli π értékeit az a, b helyeken:

$$\begin{array}{rccccccccccc}
\pi\tau_{ab}: & 1 & \dots & a{-}1 & \underline{a} & a{+}1 & \dots & b{-}1 & \underline{b} & b{+}1 & \dots & n \\
& \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
& \pi(1) & \dots & \pi(a{-}1) & \underline{\pi(b)} & \pi(a{+}1) & \dots & \pi(b{-}1) & \underline{\pi(a)} & \pi(b{+}1) & \dots & \pi(n).
\end{array}$$

Propozíció. *Minden véges permutáció transzpozíciók szorzata (összetétele). Nevezetesen*

$$\forall\, \pi \in \mathrm{PERM}_n \quad \exists\, m \le n \quad \exists\, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$$
$$\pi = \tau_{a_m b_m} \circ \dots \circ \tau_{a_1 b_1} \ .$$

BIZONYÍTÁS. Indukció n szerint. Az $n = 2$ eset triviális.
Tegyük fel, hogy $\pi \in \mathrm{PERM}_{n+1}$. Legyen

$$i := \pi(n+1)\ , \quad \pi' := \pi\tau\ , \text{ ahol } \tau := \begin{cases} \mathrm{id} & \text{ha } i = n+1 \\ \tau_{i(n+1)} & \text{ha } i < n+1 \end{cases} .$$

Észrevétel: $\pi' : n+1 \mapsto n+1$. Így

$$\pi_0 := \pi' | \{1,\dots,n\} \in \mathrm{PERM}_n \ .$$

Az indukciós feltétel szerint

$$\pi_0 = \tau_{a_m b_m} \cdots \tau_{a_1 b_1} \qquad \exists\, m \le n \quad \exists\, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m \ .$$

Innen, mivel $\pi'(n+1) = n+1$,

$$\pi = \pi'\tau = \tau_{a_m b_m} \cdots \tau_{a_1 b_1}\tau \ ,$$

ami m vagy $m+1(\le n+1)$ transzpozíció szorzata.

Definíció. A $\pi \subset \mathrm{PERM}_n$ permutáció **páros**, ha előáll páros, **páratlan**, ha előáll páratlan számú transzpozíció szorzataként. (A Propozíció szerint minden permutáció páros vagy páratlan).

Kérdés. Lehet-e egy pemutáció egyszerre páros és páratlan?
Látni fogjuk: NEM.

Definíció. A $\pi \in \mathrm{PERM}_n$ permutáció **inverziószáma**

$$\mathrm{inv}(\pi) := \#\{(i,j):\ i<j,\ \pi(i)>\pi(j)\}\ .$$

Tétel. *Legyen $\pi \in \mathrm{PERM}_n$ és $1 \le a < b \le n$. Ekkor*

$$2 \not| \ \mathrm{inv}(\pi\tau_{ab}) - \mathrm{inv}(\pi)\ .$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a kezdeti Megjegyzés értelmében

$$\tau_{ab} = \tau_{a,a+1}\tau_{a+1,a+2}\cdots\tau_{b-1,b}\cdot\tau_{b-2,b-1}\tau_{b-3,b-2}\cdots\tau a, a+1\ .$$

Ugyanis a fenti felbontásnál a $\tau_{a,a+1}$, $\tau_{a,a+1}\tau_{a+1,a+2}, \ldots$ egymás utáni részletszorzatok hatása az $(a, a+1, \ldots, b-1, b)$ sorozatra

$$\left.\begin{array}{l}(a+1, \underline{a}, a+2, a+3, \ldots, \underline{b})\ ,\\ (a+1, a+2, \underline{a}, a+3, \ldots, \underline{b})\ ,\\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\ (a+1, \ldots, b-2, b-1, \underline{a}, \underline{b})\ ,\end{array}\right\}(b-a-1)$$
$$\begin{array}{l}(a+1, \ldots, b-2, b-1, \underline{b}, \underline{a})\ ,\end{array}$$
$$\left.\begin{array}{l}(a+1, \ldots, b-2, \underline{b}, b-1, \underline{a})\ ,\\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\ (a+1, \underline{b}, a+2, \ldots, b-1, \underline{a})\ ,\\ (\underline{b}, a+1, a+2, \ldots, b-1, \underline{a})\ .\end{array}\right\}(b-a-1)$$

Tehát τ_{ab} előáll $2(b-a)-1$, azaz páratlan számú $\tau_{i(i+1)}$ alakú (ún. **elemi**) transzpozíció szorzataként.

Elég látni: $\mathrm{inv}(\sigma\tau_{i,i+1}) - \mathrm{inv}(\sigma)$ páratlan mindig.

Csakhogy ekkor

$$\mathrm{inv}(\sigma\tau_{i,i+1}) - \mathrm{inv}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \sigma(i) < \sigma(i+1) \\ -1 & \text{ha } \sigma(i) > \sigma(i+1)\ , \end{cases}$$

hiszen $\sigma\tau_{i,i+1}$ csak annyiban különbözik σ-tól, hogy értékeik az $i, i+1$ szomszédos helyeken meg vannak cserélve (ld. a kezdeti Megjegyzést).

Következmény. *Páros pemutáció inverziószáma páros, páratlané páratlan.*

Bizonyítás. Ha $\pi = \tau_{a_m b_m} \cdots \tau_{a_1 b_1}$, akkor

$$\operatorname{inv}(\pi) = \operatorname{inv}(\tau_{a_m b_m}) + \sum_{k=1}^{m-1} \big[\operatorname{inv}(\tau_{a_m b_m} \cdots \tau_{a_k b_k}) - \operatorname{inv}(\tau_{a_m b_m} \cdots \tau_{a_{k+1} b_{k+1}})\big] =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \big[\operatorname{inv}(\sigma_k \tau_{a_k b_k}) - \operatorname{inv}(\sigma_k)\big] \ ,$$

ahol $\sigma_k := \tau_{a_m b_m} \cdots \tau_{a_{k+1} b_{k+1}}$ $(k = 1, \ldots, m-1)$ és $\sigma_m :=$ id (hiszen inv(id) $= 0$). Tehát inv(π) éppen m páratlan szám összege. Így m csak páros (ill. páratlan) lehet, ha inv(π) páros (ill. páratlan).

Definíció. A $\pi \in \mathrm{PERM}_n$ permutáció **paritás**a

$$\operatorname{par}(\pi) := \operatorname{mod}_2 \operatorname{inv}(\pi) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \pi \text{ páros} \\ 1 & \text{ha } \pi \text{ páratlan} \end{cases} .$$

Következmény. *A $\Phi \subset \mathcal{L}({}^k V, \mathbb{K})$ forma pontosan akkor alternáló, ha $T_\pi \Phi = (-1)^{\operatorname{par}(\pi)} \Phi$, azaz ha minden $\pi \in \mathrm{PERM}_k$ permutációra*

$$\Phi(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}) = (-1)^{\operatorname{par}(\pi)} \Phi(v_1, \ldots, v_k) \qquad (v_1, \ldots, v_k \in V) \ .$$

Determinánsok

Tétel. *Egy (véges dimenziós) vektortér alternáló formáit egyértelműen meghatározzák egy rendezett bázison felvett értékei. Nevezetesen, legyen $\dim(V) = n$ és $(e_1, \ldots, e_n)$ egy rendezett bázis V-ben. Ekkor pontosan egy olyan $\Phi \in \mathcal{L}({}^n V, \mathbb{K})$ alternáló forma létezik, amelyre $\Phi(e_1, \ldots, e_n) = 1$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy Ψ alternáló forma V-n és $\Psi(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Ha most

$$v_1 := \alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \cdots + \alpha_{1n} e_n, \ \ldots \ , v_n := \alpha_{n1} e_1 + \cdots + \alpha_{nn} e_n$$

tetszőlegesen adott vektorok, akkor

$$\Psi(v_1,\ldots,v_n)=\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n}\alpha_{1i_1}\cdots\alpha_{ni_n}\Psi(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})\ .$$

A Ψ forma alternálása miatt az összeg tagjaiban

$$\begin{aligned}\Psi(e_{i_1}\ldots,e_{i_n})\neq 0 &\Rightarrow \{i_1,\ldots,i_n\}=\{1,\ldots,n\}\\ &\Rightarrow \exists\,\pi\in\mathrm{PERM}_n \qquad \pi(j)=i_j\ (j=1,\ldots,n)\ .\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\begin{aligned}\Psi(v_1,\ldots,v_n)&=\sum_{\pi\in\mathrm{PERM}_n}\alpha_{1\pi(1)}\cdots\alpha_{n\pi(n)}\Psi(e_{\pi(1)},\ldots,e_{\pi(n)})=\\ &=\sum_{\pi}(\alpha_{1\pi(1)}\cdots\alpha_{n\pi(n)}(-1)^{\mathrm{par}(\pi)}\Psi(e_1,\ldots,e_n)=\\ &=\sum_{\pi}(-1)^{\mathrm{par}(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\cdots\alpha_{n\pi(n)}\end{aligned}$$

egyértelműen meghatározott.

Azt kell tehát még belátnunk, hogy a

$$\Phi:\left(\textstyle\sum_{j=1}^n\alpha_{1j}e_j,\ldots,\sum_{j=1}^n\alpha_{nj}e_j\right)\mapsto\sum_{\pi\in\mathrm{PERM}_n}(-1)^{\mathrm{par}(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\cdots\alpha_{n\pi(n)}$$

funkcionál jól-definiált, alternáló és $\Phi(e_1,\ldots,e_n)=1$. Az $(e_1,\ldots,e_n)$ rendezett bázis $(e'_1,\ldots,e'_n)$ duálisával $v=\sum_{j=1}^n\langle e'_j,v\rangle e_j$ alakban áll elő egyértelműen minden $v\in V$ vektor $e_1,\ldots,e_n$ lineáris kombinációjaként. Így a Φ funcionál jól-definiált, és

$$\Phi(v_1,\ldots,v_n)=\sum_{\pi\in\mathrm{PERM}_n}(-1)^{\mathrm{par}(\pi)}\langle e'_{\pi(1)},v_1\rangle\cdots\langle e'_{\pi(n)},v_n\rangle \qquad (v_1,\ldots,v_n\in V)\ .$$

Minthogy $e'_1,\ldots,e'_n$ lineáris funkcionálok, Φ n-lineáris. Ha $\pi\neq\mathrm{id}\,(:k\mapsto k)$, akkor $\pi(j)\neq j$ azaz $\langle e'_{\pi(j)},e_j\rangle=0$ valamelyik j indexre, ahonnan

$$\Phi(e_1,\ldots,e_n)=(-1)^{\mathrm{par(id)}}\langle e'_1,e_1\rangle\cdots\langle e'_n,e_n\rangle=(-1)^0\cdot 1\cdots 1=1\ .$$

Végül, ha $\sigma\in\mathrm{PERM}_n$, akkor mindig

$$\begin{aligned}\Phi(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(n)})&\overset{\alpha_{ij}:=\langle e'_j,v_i\rangle}{=}\sum_{\pi}(-1)^{\mathrm{par}(\pi)}\prod_{j=1}^n\alpha_{\sigma(j)\pi(j)}\overset{k:=\sigma(j)}{=}\\ &=\sum_{\pi}(-1)^{\mathrm{par}(\pi)}\prod_{k=1}^n\alpha_{k\pi\sigma^{-1}(k)}\overset{\vartheta:=\pi\sigma-1}{=}\\ &=\sum_{\vartheta}(-1)^{\mathrm{par}(\vartheta\sigma)}\prod_{k=1}^n\alpha_{k\vartheta(k)}=\sum_{\vartheta}(-1)^{\mathrm{par}(\vartheta)}(-1)^{\mathrm{par}(\sigma)}\prod_{k=1}^n\alpha_{k\vartheta(k)}=\\ &=(-1)^{\mathrm{par}(\sigma)}\Phi(v_1,\ldots,v_n)\ .\end{aligned}$$

Ez mutatja, hogy a Φ forma alternáló.

Következmény. *Minden véges dimenziós térben vannak determináló formák, és az összes alternáló formák egy determináló forma konstansszorosai.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy tetszőleges $(e_1, \ldots, e_n)$ rendezett bázist és legyen Φ az az alternáló forma V-ben amelyre $\Phi(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Tekintsünk egy másik $f_1, \ldots, f_n)$ rendezett bázist és Ψ alternáló formát, és legyen $\lambda := \Psi(e_1, \ldots, e_n)$.

Elég belátni: 1) $\Psi = \lambda\Phi$, 2) $\Phi(f_1, \ldots, f_n) \neq 0$.

1) A $\Delta := \Psi - \lambda\Phi$ forma is alternáló, és $\Delta(e_1, \ldots, e_n) = 0$. Minthogy az $\equiv 0$ forma is alternáló, a Tétel szerint $\Psi - \lambda\Phi = \Delta = 0$.

2) Ha $\Phi(f_1, \ldots, f_n) = 0$ volna Φ-nek egybe kellene esnie az $\equiv 0$ formával (ami eltűnik $(f_1, \ldots, f_n)$-en is). Ez $1 = \Phi(e_1, \ldots, e_n)$ miatt lehetetlen.

Következmény. *A Ψ forma pontosan akkor determináló, ha alternáló és nem azonosan zéró.*

Tétel. *Ha $A : V \to V$ egy lineáris leképezés, akkor a*

$$\frac{\Phi(Ae_1, \ldots, Ae_n)}{\Phi(e_1, \ldots, e_n)}$$

hányados független a Φ determináló formák és $(e_1, \ldots, e_n)$ bázisok választásától.

Bizonyítás. Legyenek $\Phi, \Psi \neq 0$ alternáló formák ill. $(e_1, \ldots, e_n), (f_1, \ldots, f_n)$ rendezett bázisok a V vektortérben. Belátandó:

$$\frac{\Phi(Ae_1, \ldots, Ae_n)}{\Phi(e_1, \ldots, e_n)} = \frac{\Psi(Af_1, \ldots Af_n)}{\Psi(f_1, \ldots, f_n)} \ .$$

Az előző Tétel szerint

$$\exists\, \lambda \neq 0 \quad \Psi = \lambda\Phi \ , \ \Rightarrow \quad \frac{\Psi(Af_1, \ldots, Af_n)}{\Psi(f_1, \ldots f_n)} = \frac{\Phi(Af_1, \ldots, Af_n)}{\Phi(f_1, \ldots f_n)} \ .$$

Másrészt

$$\widehat{\Phi} : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \Phi(Av_1, \ldots, Av_n) \ \text{ alternáló} \ , \ \Rightarrow \ \exists\, \delta \in \mathbb{K} \quad \widehat{\Phi} = \delta\Phi \ .$$

Definíció. Az n-dimenziós V térbeli $A \in \mathcal{L}(V, V)$ operátor **determinánsa**

$$\det(A) := \Big[\frac{\Phi(Ae_1, \ldots, Ae_n)}{\Phi(e_1, \ldots, e_n)} : \ \Phi \,\text{determináló} \in \mathcal{L}(^nV, \mathbb{K}), \ \{e_1, \ldots, e_n\}\,\text{bázis} \subset V\Big].$$

Az $\alpha \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K})$ mátrixot azonosítva azzal a lineáris $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ leképezéssel, amelynek a mátrixa $\mathbb{K}^n$ kanonikus bázisában, definiáljuk a $\det(\alpha)$ **mátrix-determinánst**.

Megjegyzés. Tehát az $n \times n$-es mátrixok terén a

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}_{n,\mathbb{K}} :\ & \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ & \alpha \mapsto \det(\alpha) \end{aligned}$$

funkcionál a következőképpen jellemezhető:

$\mathrm{Det}_{n,\mathbb{K}}$ *az az alternáló n-lineáris funkcionál a mátrixok oszlop vektorain, amely a $\left(\delta_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ egységmátrixnál 1-et ad.*

Propozíció. *Az $\alpha = \left(\alpha_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ mátrix determinánsa*

$$\det(\alpha) = \sum_{\pi \in \mathrm{PERM}_n} (-1)^{\mathrm{par}(\pi)} \alpha_{1\pi(1)} \cdots \alpha_{n\pi(n)} \ .$$

Bizonyítás. Jelöljük ε_k-val a k-adik egységvektort $\mathbb{K}^n$-ben $(k = 1, \ldots, n)$.* Ha létezik, véve azt a $\Phi : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$ alternáló n-lineáris funkcionált, amelyre $\Phi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 1$, fennáll

$$\begin{aligned} \det(\alpha) &= \frac{\Phi(\alpha\varepsilon_1, \ldots, \alpha\varepsilon_n)}{\Phi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)} = \Phi(\alpha\varepsilon_1, \ldots, \alpha\varepsilon_n) = \\ &= \Phi(\alpha_{11}\varepsilon_1 + \cdots + \alpha_{1n}\varepsilon_n, \ldots, \alpha_{n1}\varepsilon_1 + \cdots + \alpha_{nn}\varepsilon_n) \overset{\Phi \text{ alter.}}{=} \\ &= \sum_{\pi \in \mathrm{PERM}_n} (-1)^{\mathrm{par}(\pi)} \alpha_{1\pi(1)} \cdots \alpha_{n\pi(n)} \underbrace{\Phi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)}_{1} \ . \end{aligned}$$

Következmény. *Az $A : V \to V$ lineáris leképezés determinánsa nem más, mint tetszőleges $E := (e_1, \ldots, e_n)$ rendezett V-beli bázis szerinti $E'AE$ mátrixának a determinánsa.*

Bizonyítás. Vegyük azt a Φ determináló n-formát a V téren, amelyre $\Phi(E) = 1$. Most

$$\alpha := E'AE \ \text{ mellett } \qquad Ae_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i \qquad (j = 1, \ldots, n) \ ,$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \frac{\Phi(AE)}{\Phi(E)} = \Phi(AE) = \\ &= \Phi(\alpha_{11}e_1 + \cdots + \alpha_{1n}e_n, \ldots, \alpha_{n1}e_1 + \cdots + \alpha_{nn}e_n) = \det(\alpha) \ . \end{aligned}$$

* Tehát ε_k az a $1 \times n$-es mátrix, amelynek k-adik sorában 1 áll, míg a többi helyein 0.

Determinánsok szorzástétele

Tétel. *Ha* $A, B \in \mathcal{L}(V, V)$, *akkor* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Bizonyítás. Legyen $n := \dim(V)$. Tekintsünk egy tetszőlegesen rögzített $\Phi : V^n \to \mathbb{K}$ determináló funkcionált és egy $\{e_1, \ldots, e_n\}$ bázist V-ben.

1) $\det(B) = 0$ esete. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\Phi(Be_1, \ldots, Be_n) = 0 \ , \ \Rightarrow \{Be_1, \ldots, Be_n\} \text{ lin. függő} \ , \ \Rightarrow \\
&(ABe_1, \ldots, ABe_n) \text{ lin. függő} \ , \ \Rightarrow \ \Phi(ABe_1, \ldots, ABe_n) = 0 \ , \ \Rightarrow \\
&\det(AB) = \frac{\Phi(ABe_1, \ldots, ABe_n)}{\Phi(e_1, \ldots, e_n)} = 0 \ .
\end{aligned}$$

2) $\det(B) \neq 0$ esete. Ekkor, mivel $\{Be_1, \ldots, Be_n\}$ bázis $\subset V$,

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \frac{\Phi(ABe_1, \ldots, ABe_n)}{\Phi(Be_1, \ldots Be_n)} = \\
&= \frac{\Phi(ABe_1, \ldots ABe_n)/\Phi(e_1, \ldots, e_n)}{\Phi(Be_1, \ldots, Be_n)/\Phi(e_1, \ldots, e_n)} = \\
&= \frac{\det(AB)}{\det(B)} \ .
\end{aligned}$$

Következmény. $\det(\alpha\beta) = \det(\alpha)\det(\beta)$ *az* $\alpha, \beta \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K})$ *mátrixokra.*

Transzponált determinánsa

Tétel. $\det(A) = \det(A')$ *minden* $A \in \mathcal{L}(V, V)$ *operátorra ill.* $\det(\alpha) = \det(\alpha')$ *minden* $\alpha \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K})$ *mátrixra.*

Bizonyítás. Elegendő mátrixokra igazolni a tételt.

Legyen α egy $n \times n$-es mátrix. Az α' transzponált együtthatói $\alpha'_{ij} = \alpha_{ji}$ $(i, j =$

$1, \ldots, n)$. Az $S := \mathrm{PERM}_n$ rövidítéssel ekkor

$$\begin{aligned}\det(\alpha') &= \sum_{\pi\in S}(-1)^{\mathrm{par}(\pi)}\prod_{i=1}^{n}\alpha'_{i\pi(i)} = \sum_{\pi\in S}(-1)^{\mathrm{par}(\pi)}\prod_{i=1}^{n}\alpha_{\pi(i)i} = \\ &= \sum_{\pi\in S}(-1)^{\mathrm{par}(\pi)}\prod_{i=1}^{n}\alpha_{\pi(i)\pi^{-1}(\pi(i))} =^{j\,:=\,\pi(i)} \\ &= \sum_{\pi\in S}(-1)^{\mathrm{par}(\pi)}\prod_{j=1}^{n}\alpha_{j\pi^{-1}(j)}\ .\end{aligned}$$

Észrevétel: $S = \{\pi^{-1} :\ \pi \in S\}$ és $\mathrm{par}(\pi^{-1}) = \mathrm{par}(\pi)$ $(\pi \in S)$. Így

$$\begin{aligned}\det(\alpha') &= \sum_{\pi^{-1}\in S}(-1)^{\mathrm{par}(\pi^{-1})}\prod_{j=1}^{n}\alpha_{j\pi^{-1}(j)} =^{\sigma\,:=\,\pi^{-1}} \\ &= \sum_{\sigma\in S}(-1)^{\mathrm{par}(\sigma)}\prod_{j=1}^{n}\alpha_{j\sigma(j)} = \det(\alpha)\ .\end{aligned}$$

Determináns kiszámítása eliminációval

Megjegyzés. Ha az $n \times n$-es α mátrix α_{ij} együtthatói adottak, az elméleti jelentőségű

$$\begin{aligned}\det(\alpha) &= \sum_{\pi\in\mathrm{PERM}_n}(-1)^{\mathrm{par}(\pi)}\alpha_{1\pi(1)}\cdots\alpha_{n\pi(n)} = \\ &= \sum_{\pi\in\mathrm{PERM}_n}(-1)^{\mathrm{par}(\pi)}\alpha_{\pi(1)1}\cdots\alpha_{\pi(n)n}\end{aligned}$$

formulák* igen rossz hatásfokúak $\det(\alpha)$ kiszámításához.

Példa. Az elméleti formulával egy 5×5-ös determinánst $4 \cdot 5! = 480$ szorzással és $5! = 120$ összeadással számolhatunk ki. Ez kézzel órás nagyságrendű munka lehet még kis abszolut értékű egész α_{ij} együtthatók esetén is.

> **Lemma.** *Egy mátrix determinánsa nem változik, ha egyik oszlopához hozzáadjuk egy másik oszlop valamilyen többszörösét, ill. ha egy sorához egy másik sor többesét adjuk.*

* A második abból adódik, hogy a transzponált determinánsa megegyezik az eredetiével.

Bizonyítás. Tudjuk: A $(v_1,\dots,v_n)\mapsto \det(v_1,\dots,v_n)$ forma* determináló az $n\times 1$-es oszlopvektorok ($\mathbb{K}^n$-nel azonosított) terén. Mivel determináló formák alternálók,

$$\begin{aligned}\det(v_1,\dots,v_{i-1},&v_i+\lambda v_j,v_{i+1},\dots,v_j,\dots,v_n)=\\ &=\det(v_1,\dots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\dots,v_j,\dots,v_n)+\\ &\ \ +\lambda\cdot\det(v_1,\dots,v_{i-1},\underbrace{v_j,v_{i+1},\dots,v_j,}_{0}\dots,v_n)\ .\end{aligned}$$

Mivel a mátrix transzpozíciója a determinánsát nem változtatja meg, innen a sorokra vonatkozó állítás a gondolatmenetet a transzponáltakra alkalmazva adódik.

Következmény. *Gauss eliminációt végrehajtva egy mátrix sorain vagy oszlopain, a determinánsa nem változik.*

Lemma. *Felcserélve egy mátrix két sorát vagy oszlopát, determinánsa előjelet vált, egy sorát vagy oszlopát egy $\lambda(\in\mathbb{K})$ számmal szorozva a determináns λ-szorosára változik.*

Bizonyítás. Közvetlen következménye annak a ténynek, hogy a $(v_1,\dots,v_n)\mapsto \det(v_1,\dots,v_n)$ forma alternáló n-lineáris. (A sorokra vonatkozó rész itt is transzpozícióval jön).

Megjegyzés. Emlékeztető: Az $\alpha := \big(\alpha_{ij}\big)_{i,j=1}^n$ mátrixot **felső [ill. alsó] trianguláris**nak mondjuk, ha nem-zéró elemei csak a főátlójában és fölötte [ill. alatta] vannak, azaz $\alpha_{ij}=0\ (i<j)$ [ill. $\alpha_{ij}=0\ (i>j)$].
Láttuk: A sorokon végzett Gauss eliminációval és sor- és oszlopcserékkel minden mátrix felső trianguláris alakra hozható.

Lemma. *Trianguláris mátrix determinánsa a főátlóbeli elemeinek a szorzata.*

Bizonyítás. Észrevétel:

$$\forall\,\pi\in\mathrm{PERM}_n\qquad \pi\neq\big[1\mapsto 1,\dots,n\mapsto n\big]\Rightarrow\ \exists\, i,j\quad \pi(i)<i \text{ és } \pi(j)>j\ .$$

Ha α egy $n\times n$-es mátrix, ez azt jelenti, hogy amennyiben $\pi\in\mathrm{PERM}_n$ és $\alpha_{1\pi(1)}\cdots\alpha_{n\pi(n)}$ nem a főátlóbeli elemek $\alpha_{11}\cdots\alpha_{nn}$ szorzata, akkor az $\alpha_{1\pi(1)},\dots,\alpha_{n\pi(n)}$ tényezők között mind főátló alatti, mind fölötti elemek előfordulnak. Vagyis az $\alpha_{11}\cdots\alpha_{nn}$ szorzat kivételével az összes többi tagjai a $\det(\alpha)=\sum_{\pi\in\mathrm{PERM}_n}\alpha_{1\pi(1)}\cdots\alpha_{n\pi(n)}$ összegnek tartalmaznak 0 tényezőt valahányszor α fölső- vagy alsó trianguláris.

---

* Itt $\det(v_1,\dots,v_n)$ annak az $n\times n$-es mátrixnak a determinánsa, amelynek oszlopai $v_1,\dots,v_n$.

Algoritmus. Gauss eliminációt sor- és oszlopcserékkel végrehajtva, az α mátrixot egy $\widetilde{\alpha}$ trianguláris mátrixba visszük. Minden sor- és oszlopcserénél a determináns előjelet vált, az eliminációs lépéseknél nem változik. Végül a trianguláris $\widetilde{\alpha}$ főátlóbeli elemeinek a szorzata adja a keresett determinánst a megfelelő előjellel, ha nincs 0 sor vagy oszlop (anikor is $\det(\alpha) = 0$).

Tehát, ha $\alpha \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K})$ és az elimináció pivotjai az $(i_1, j_1), \ldots, (i_n, j_n)$ pozíciókban vannak,

$$\det(\alpha) = (-1)^{[\text{cserék száma}]}\det(\widetilde{\alpha}) = (-1)^{[\text{cserék száma}]}\widetilde{\alpha}_{11}\widetilde{\alpha}_{22}\cdots\widetilde{\alpha}_{nn} =$$
$$= (-1)^{\mathrm{par}(\pi)+\mathrm{par}(\sigma)} \prod_{k=1}^{n} \alpha_{\pi(k)\sigma(k)} \ ,$$

ahol $\pi := [k \mapsto i_k : \ k = 1, \ldots, n]$, $\sigma := [k \mapsto j_k : \ k = 1, \ldots, n]$.

Megjegyzés. Az eliminációk leírhatók mátrixokkal való szorzásokkal is. Pl. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ estén n alkalmas $1 - 2\big(\sum_k \varepsilon_k^2\big)^{-1}(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n)(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n)'$ alakú (-1) determinánsú **tükrözés**-mátrixokkal szorozva egy $\alpha \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R})$ mátrixot, egy $\widehat{\alpha}$ trianguláris mátrixot kaphatunk (ld. később az "LQ elimináció" alfejezetben). Vagyis a determinánsok szorzástétele alapján

$$\det(\alpha) = (1)^n \det(\widehat{\alpha}) = \prod_{k=1}^{n} \widehat{\alpha}_{kk} \ .$$

A Gauss eliminációval szemben az LQ eliminációnak a **numerikus stabilitás** az előnye.

Jelölés. A $\det(\alpha)$ kifejezés helyett szokásos az $|\alpha|$-et is írni.

Példa. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{1\leftrightarrow 2}{\underset{\text{oszl.}}{=\!=}} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} \underline{1} & \underline{0} & \underline{-2} \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{3.+2\cdot 1.}{\underset{\text{oszl.}}{=\!=}}$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{3.+\frac{3}{4}\cdot 2.}{\underset{\text{oszl.}}{=\!=}} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{39}{4} \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot \tfrac{39}{4} = 78.$$

Kifejtés adjungált aldeterminánsokkal

Szimbolikus algebrai kifejezések determinánsai ill. kisebb szám-determinánsok kiszámítását célszerű lehet kisebb méretű determinánsok kiszámítására visszavezetni.

Definíció. Legyen $\alpha := \left(\alpha_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ egy $\mathbb{K}$ fölötti $n \times n$-es mátrix és $1 \leq p, q \leq n$. Ekkor az α-ból az p-edik sor és q-adik oszlop kihagyásával kapott $(n-1)\times(n-1)$-es mátrix

$$\det_{(p,q)}(\alpha) := \det\left(\alpha_{s_p(k)s_q(\ell)}\right)_{k,\ell=1}^{n-1}$$

$$\text{ahol} \quad s_m(r) := \left[r \text{ ha } r < m, \;\; r+1 \text{ ha } r \geq m\right]$$

determinánsa az (i,j)-edik elem **adjungált aldeterminánsa** α-nál.

Tétel. *Legyen α egy $n \times n$-es mátrix. Ekkor*

$$\det(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \alpha_{1k} \det_{(1,k)}(\alpha) \; .$$

Bizonyítás. Az $S := \mathrm{PERM}_n$ rövidítéssel

$$\det(\alpha) = \sum_{\pi \in S} (-1)^{\mathrm{par}(\pi)} \prod_{i=1}^{n} \alpha_{i\pi(i)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\pi \in S^k} (-1)^{\mathrm{par}(\pi)} \prod_{i=1}^{n} \alpha_{i\pi(1)} \; ,$$

ahol $k = 1, \ldots, n$-nél az

$$S^{(k)} := \left\{\pi|\{2,\ldots,n\} : \; \pi \in S, \; \pi(1) = k\right\} \; .$$

Vezessük be a

$$\begin{aligned} Q_k : & \mathrm{PERM}_{n-1} \to S^{(k)} \\ & \varphi \mapsto \left[\{2,\ldots,n\} \ni j \mapsto P_k(\varphi(j-1))\right] \; , \\ & \text{ahol} \quad P_k : i \mapsto [i \text{ ha } i < k, \quad i+1 \text{ ha } i \geq k] \end{aligned}$$

transzformációkat $(k = 1, \ldots, n)$. Vegyük észre, hogy

$$Q_k : \mathrm{PERM}_{n-1} \leftrightarrow S^(k) \quad \text{és} \quad \mathrm{inv}(\varphi) + k - 1 = \mathrm{inv}\big(\{1 \mapsto k\} \cup Q_k(\varphi)\big)$$

mindig. Innen mivel $(-1)^{\mathrm{par}(\sigma)} = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)}$ minden permutációra,

$$\det(\alpha') = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\pi \in S^(k)} (-1)^{\mathrm{inv}(\pi)} \alpha_{1k} \prod_{i=2}^{n} \alpha_{i\sigma(i)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\varphi \in S^(k)} (-1)^{\mathrm{inv}(\varphi)+k-1} \alpha_{1k} \prod_{i=2}^{n} \alpha_{iQ_k(\varphi)(i))} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \alpha_{1k} \det_{(1,k)}(\alpha) \; .$$

Példa. **Vandermonde determinánsok**. Legyen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Az

$$a^k := \begin{pmatrix} a_0^k \\ \vdots \\ a_n^k \end{pmatrix} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

oszlopvektorok alkotta mátrixot **Vandermonde mátrix**nak nevezik. Itt $a_i^0 := 1$ $i = 0, \ldots, n$, így a^0 helyett szemléletesen 1-et írunk. Ennek a determinánsát a következő módon számolhatjuk ki:

$$V(a_0, \ldots, a_n) := \det(1, a^1, a^2, \ldots, a^n) \underset{a_0^k \cdot 1.\text{oszl.}}{\overset{k.\text{oszl.}-}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 - a_0 & \cdots & a_1^n - a_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n - a_0 & \cdots & a_n^n - a_0^n \end{vmatrix} =$$

$$\underset{1.\ \text{sor}}{\overset{\text{KIFEJT.}}{=\!=}} \begin{vmatrix} a_1 - a_0 & \cdots & a_1^n - a_0^n \\ a_2 - a_0 & \cdots & a_2^n - a_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n - a_0 & \cdots & a_n^n - a_0^n \end{vmatrix}.$$

Mivel $a_i^k - a_0^k = (a_i - a_0) \sum_{p=0}^{k-1} a_i^{k-1-p} a_0^p$, itt $i = 1, \ldots, n$-re az i-edik sorból $(a_i - a_0)$-at kiemelve

$$V(a_0, \ldots, a_n) = (a_1 - a_0) \cdots (a_n - a_0) \begin{vmatrix} 1 & a_1 + a_0 & \cdots & a_1^{n-1} + \cdots + a_0^{n-1} \\ 1 & a_2 + a_0 & \cdots & a_2^{n-1} + \cdots + a_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n + a_0 & \cdots & a_n^{n-1} + \cdots + a_0^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Itt kivonjuk rendre a $k = 2, \ldots, n$-edik oszlopból az első a_0^k-szorosát. Ezzel az egyes helyeken álló összegek utolsó tagjai eltűnnek a második oszloptól kezdve:

$$V(a_0, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^n (a_j - a_0) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} + \cdots + a_1 a_0^{n-2} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} + \cdots + a_2 a_0^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} + \cdots + a_n a_0^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Tehát kivonva ezután $k = 3, \ldots, n$-re a második oszlop a_0^{k-2}-szörösét a k-adik oszlopból,

$$V(a_0, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^n (a_j - a_0) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} + \cdots + a_1^2 a_0^{n-3} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} + \cdots + a_2^2 a_0^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} + \cdots + a_n^2 a_0^{n-3} \end{vmatrix}.$$

Hasonlóan folytatva, végül eljutunk az

$$V(a_0,\dots,a_n)=\prod_{j=1}^{n}(a_j-a_0)\cdot\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

alakig. Észrevétel: ez egy 1-gyel kisebb méretű Vandermonde determinánst tartalmaz, és így

$$\begin{aligned}V(a_0,\dots,a_n)&=\prod_{k=1}^{n}(a_k-a_0)\cdot V(a_1,\dots,a_n)=\\&=\prod_{k=1}^{n}(a_k-a_0)\cdot\prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\cdot V(a_2,\dots,a_n)=\\&\ \vdots\\&=\prod_{k=1}^{n}(a_k-a_0)\cdot\prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\cdots\prod_{k=n-1}^{n}(a_k-a_{n-2})\cdot\underbrace{V(a_{n-1},a_n)}_{(a_n-a_{n-1})}.\end{aligned}$$

Következésképpen

$$V(a_0,\dots,a_n)=\prod_{n\ge k>\ell\ge 0}(a_k-a_\ell).$$

Sakktábla-szabály. Egy $n\times n$-es mátrix pozícióit lássuk el a bal-fölső saroktól $+$-szal kezdve **sakktáblaszerűen** $\pm$ **előjelekkel:**

$$\begin{pmatrix}+ & - & + & - & \cdots\\ - & + & - & + & \cdots\\ + & - & + & - & \cdots\\ - & + & - & + & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Ekkor egy $\left|\alpha_{ij}\right|_{i,j=1}^{n}$ determinánst a következőképpen is kifejthetjük:

Véve egy tetszőleges sort [vagy oszlopot], összegezzük a sor [oszlop] elemeinek az adjungált aldeterminánsaikkal való szorzatát az egyes elem pozíciójánál levő előjellel.

Bizonyítás. Mivel az előjel-sakktábla szimmetrikus a főátlóra, az oszlop szerinti kifejtés esete visszavezethető a transzponált mátrix determinánsánsa sor szerinti kifejtésének esetére (hiszen transzponálás nem változtat a determinánsok értékén).

Vegyük a p-edik sort. Ezt $(p-1)$ sorcserével átvihetjük az elsősorba úgy, hogy a többi sorok sorrendje ne változzék. Ezért

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{\alpha_{(p1}} & \underline{\alpha_{p2}} & \cdots & \underline{\alpha_{pn}} \\ \alpha_{(p+1)1} & \alpha_{(p+1)2} & \cdots & \alpha_{(p+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{p-1} \begin{vmatrix} \underline{\alpha_{(p1}} & \underline{\alpha_{p2}} & \cdots & \underline{\alpha_{pn}} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{(p-1)1} & \alpha_{(p-1)2} & \cdots & \alpha_{(p-1)n} \\ \alpha_{(p+1)1} & \alpha_{(p+1)2} & \cdots & \alpha_{(p+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} .$$

A Kifejtési Tételt a jobb-oldali determinánsra alkalmazva, éppen

$$\begin{aligned} \det(\alpha) &= (-1)^{p-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \det_{(p,k)}(\alpha) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{p+k} \det_{(p,k)}(\alpha) \ , \end{aligned}$$

ami megfelel a "sakktábla-szabálynak".

Példa. Legyenek $\lambda, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tetszőlegesen adottak. Ekkor az utolsó oszlop szerint kifejtve

$$\begin{vmatrix} \lambda & & & & & a_0 \\ 1 & \lambda & & & & a_1 \\ & 1 & \lambda & & & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & \lambda & a_{n-2} \\ & & & & 1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1} a_0 \begin{vmatrix} 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda \\ & & & & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+2} a_1 \begin{vmatrix} \lambda & & & & \\ & 1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda \\ & & & & 1 \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+ \underbrace{(-1)^{2n-1}}_{-1} a_{n-2} \begin{vmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^{2n}}_{1} (\lambda + a_{n-1}) \begin{vmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda \\ & & & & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2} a_1 \lambda + (-1)^{n-1} a_0 \ .$$

Tehát tetszőleges polinomot megkaphatunk ilyen formában.

Cramer szabály

Probléma. Adjuk meg explicit módon $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{K}^n$ terminusaival az

$$\left.\begin{array}{rrr} a_{11}x_1 + \cdots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + & a_{nn}x_n = & b_n \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} x_1a_1 + \cdots + x_na_n = b \\ \text{ahol } j = 1, \ldots, n\text{-re} \end{array} \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} =: a_j$$

egyenletrendszer $x_1, \ldots, x_n$ megoldását.

Jelölés. Szokás szerint $\mathbb{K}^n$-et azonosítjuk az $n \times 1$-es oszlopvektorok halmazával, és $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^n$ mellett $\det(v_1, \ldots, v_n)$ fogja jelölni a $v_1, \ldots, v_n$ oszlopvektorok egymás mellé tételével kapott $n \times n$-es mátrix determinánsát.

Tétel. (Cramer szabály). *A fenti egyenletrendszerre*
1) $\forall\, b \in \mathbb{K}^n \;\; \exists!\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad \sum_k x_k a_k = b \iff \det(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$,
2) $\det(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ *esetén az* $x_1a_1 + \ldots + x_na_n = b$ *rendszer megoldása*

$$x_j = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n)}{\det(a_1, \ldots, a_n)} \qquad (j = 1, \ldots, n)\ .$$

Bizonyítás. Tudjuk: a $D : \;(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det(v_1, \ldots, v_n)$ forma determináló $\mathbb{K}^n$-en. (Nevezetesen az a determináló forma, amely a kanonikus egységvektorok bázisán 1-et ad.)

1) Mivel a D forma determináló,

$$\{a_1, \ldots, a_n\} \text{ bázis} \subset \mathbb{K}^n \iff \det(a_1, \ldots, a_n) \neq 0\ .$$

Ha $\{a_1, \ldots, a_n\}$ bázis $\subset \mathbb{K}^n$, akkor vele a $\mathbb{K}^n$ tér minden b vektora egyértelmű lineáris kombinációként áll elő. Ha nem bázis, akkor $\dim\mathrm{Span}\{a_1, \ldots, a_n\} < n = \dim(\mathbb{K}^n)$, azaz $\exists\, b \in \mathbb{K}^n \;\; b \notin \mathrm{Span}\{a_1, \ldots, a_n\}$.

2) Ez éppen a "Determináló formák" alfejezet Propozíciója $V := \mathbb{K}^n$-re.

Megjegyzés. Az általános

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

egyenletrendszer a következőképpen oldható meg a Cramer szabállyal a Kronecker-Capelli tétel szerint.

Következmény. *Tegyük fel, hogy* $\operatorname{rank}\big(a_{ij}\big)_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} = r$, *és a* $(*)$ *egyenletrendszer első* r *oszlopa, azaz az* $a_1, \ldots, a_r$ *oszlopvektorok ill. első* r *sora lineárisan függetlenek. Ekkor, ha a* $(*)$ *egyenletrendszer megoldható,*

$$\big\{\text{MEGOLDÁSOK}\big\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1(c_1, \ldots, c_{n-r}) \\ \vdots \\ x_n(c_1, \ldots, c_{n-r}) \end{pmatrix} : \ c_1, \ldots, c_{n-r} \in \mathbb{K}\right\},$$

ahol $j = 1, \ldots, r-1$ *mellett*

$$x_j(c_1, \ldots, c_{n-r}) := \frac{\det(a_1^o, \ldots, a_{j-1}^o, b^o - \sum_{k=1}^{n-r} c_k a_{r+k}^o, a_{j+1}^o, \ldots, a_r^o)}{\det(a_1^o, \ldots, a_n^o)}$$

$$x_{r+1}(c_1, \ldots, c_{n-k}) := c_1 \ , \ \ldots \ , \ x_n(c_1, \ldots, c_{n-r}) := c_{n-r}$$

$$\text{a }^o : \ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \mapsto v^o := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix} \ \textit{vetítéssel.}$$

Megjegyzés. 1) Sor ill. oszlopcserékkel elérhető, hogy az első r(=rangszám) sor ill. oszlop lineárisan független legyen egy egyenletben.

2) A Kronecker-Capelli tétel szerint, ha egy mátrix rangja r, akkor bármely r lineárisan független sora és oszlopa találkozásánál levő $r \times r$-es részmátrix determinánsa $\neq 0$. Mivel egy négyzetes mátrix sorai ill. oszlopai pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a determinánsa 0, egy mátrix rangja a benne levő legnagyobb nem-eltűnő determinánsú (nem feltétlenül szomszédos sororkból ill. oszlopokból álló) négyzetes mátrix mérete. Azaz

$$\operatorname{rank}\big(a_{ij}\big)_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} = \max\big\{r : \ \exists\, I, J \quad \#I = \#J = r, \ \det\big(a_{ij}\big)_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \neq 0\big\} \ .$$

3) A Cramer szabály következményében szereplő formulából kiolvasható az alábbi is.

Következmény. *Ha találunk egy megoldását a* $\sum_{j=1}^{n} aijx_j = b_i$ $(1 \leq i \leq n)$ *egyenletrendszernek, akkor az összes megoldást úgy kapjuk meg, hogy ehhez hozzádjuk a* $\sum_{j=1}^{n} aijx_j = 0$ $(1 \leq i \leq n)$ homogén *egyenletrendszer megoldásait, amelyek a* $\mathbb{K}^n$ *tér egy* $[n - \operatorname{rank}(a_{ij})]$-*dimenziós alterét alkotják.*

Mátrix inverze adjungált aldeterminánsokkal

Megjegyzés. Ha az $\alpha \in \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{K})$ mátrix invertálható, akkor az $\alpha\alpha^{-1} = \left(\delta_{pq}\right)_{p,q=1}^{n}$ reláció azt jelenti, hogy $q = 1,\dots,n$-re $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \left[\alpha^{-1}\ q\text{-ik oszlopa}\right]$ megoldása az

$$\begin{array}{rcrl} \alpha_{11}x_1 + & \cdots + & \alpha_{1n}x_n & = \delta_{1q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + & \cdots + & \alpha_{nn}x_n & = \delta_{nq} \end{array}$$

egyenletrendszernek (ahol $\delta_{pq} := [1 \text{ ha } p = q,\ 0 \text{ egyébként}]$ a Kronecker-δ).

Propozíció. *Az $\alpha \in \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{K})$ mátrix pontosan akkor invertáható, ha $\det(\alpha) \neq 0$. Ha $\det(\alpha) \neq 0$, akkor*

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\det(\alpha)} \Big((-1)^{p+q}\det{}_{(p,q)}(\alpha)\Big)_{p,q=1}^{n} .$$

Bizonyítás. Az "Inverz mátrix, $\mathrm{GL}(V)$" alfejezet tétele szerint α pontosan akkor invertálható, ha az oszlopai lineárisan függetlenek. Ezek pedig pontosan akkor lineárisan fűggetlenek, ha $\det(\alpha) \neq 0$.

Tegyük fel, hogy $\det(\alpha) \neq 0$. A Cramer szabály szerint

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_{11}x_1^{(q)} + \cdots + \alpha_{1n}x_n^{(q)} & = & \delta_{1q} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1}x_1^{(q)} + \cdots + \alpha_{nn}x_n^{(q)} & = & \delta_{nq} \end{array}\right\} \Rightarrow x_p^{(q)} = \frac{\det(\alpha_{\bullet 1},\dots,\alpha_{\bullet q-1},\delta_{\bullet q},\alpha_{\bullet q+1},\dots,\alpha_{\bullet n})}{\det(\alpha_{\bullet 1},\dots,\alpha_{\bullet n})}$$

minden $p,q = 1,\dots,n$ indexre. A Megjegyzés mutatja, hogy ekkor $x_p^{(q)}$ az α^{-1} inverz mátrix (p,q) indexű eleme. Itt a $\det(\alpha_{\bullet 1},\dots,\alpha_{\bullet q-1},\delta_{\bullet q},\alpha_{\bullet q+1},\dots,\alpha_{\bullet n})$ számlálóbeli determinánst a "sakktábla-szabály" alapján kifejtjük a q-adik oszlopa szerint.

Megjegyzés. Természtesen, egy $n \times n$-es mátrix inverzének együtthatóit célszerűbb szinte mindig a Lemmának megfelelően n egyenletrendszer eliminációs módon való megoldásával meghatározni, mint $n^2 + 1$ determinánst kiszámítani. Azonban fordítva hasznos lehet a formula. Ha máshonnan van információnk az inverz mátrixról, akkor az adjugált aldeterminánsait egyszerre meghatározhatjuk.

Példa. Legyenek az $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$ számok mind különbözők. Ekkor az $\alpha := \left(a_s^k\right)_{s,k=1}^{n}$ mátrixnak a determinánsa Vandermonde típusú, $\det(\alpha) = \prod_{q>p}(a_q - a_p)$, mint láttuk. Az α inverzéről az úgynevezett **Lagrange interpolációs polinom**ok adnak információt: Ezek a

$$P_s \; : \; \lambda \mapsto \prod_{k:\ k\neq s} \frac{\lambda - a_k}{a_s - a_k} \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

polinomok triviálisan teljesítik a

$$P_s(a_k) = \delta_{sk} \qquad (s, k = 1, \ldots, n)$$

követelményeket.* Rögzítsük tetszőlegesen az s indexet, és (kissé szokatlan módon) jelöljük $x_1, \ldots, x_n$-nel a P_s polinom együtthatóit. Ekkor

$$\left.\begin{array}{l} 1\cdot x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 + \cdots + a_1^{n-1} x_n = \delta_{s1} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 1\cdot x_1 + a_n x_2 + a_n^2 x_3 + \cdots + a_n^{n-1} x_n = \delta_{sn} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_p = \left(\alpha^{-1}\right)_{ps} = \dfrac{(-1)^{p+s}\det_{(s,p)}(\alpha)}{\det(\alpha)} \\ (p = 1, \ldots, n) \; . \end{array}$$

Következésképpen minden p, s indexpárra

$$\begin{aligned} \det{}_{(s,p)}(\alpha) &= \det(\alpha) \cdot \left[\lambda^{p-1} \text{ együtthatója } P_s(\lambda)\text{-ban}\right] = \\ &= \frac{\prod_{k>\ell}(a_k - a_\ell)}{\prod_{k:\ k\neq s}(a_s - a_k)} \cdot (-1)^{n-p} \sum_{1\leq i_1 < \cdots < i_{n-p} \leq n} a_{i_1} \cdots a_{i_{n-p}} \; . \end{aligned}$$

Külső szorzat

Megjegyzés. Ha Φ egy alternáló p-forma, Ψ pedig egy alternáló q-forma a V vektortér fölött, akkor a $\Phi \otimes \Psi$ $(p+q)$-forma nem alternáló.

Cél: Egy $\Phi \otimes \Psi$-vel természtes kapcsolatban levő alternáló $(p+q)$-forma konstrukciója.

Definíció. A továbbiakban T_π-vel jelöljük a formáknak egy π permutáció szerinti **változócsere transzformáció**ját. Azaz ha Φ egy p-forma (valamilyen vektortéren) és $\pi \in \mathrm{PERM}_p$, akkor

$$T_\pi \Phi : \; (v_1, \ldots, v_p) \mapsto \Psi(v_\pi(1), \ldots, v_\pi(p)) \; .$$

---

* Jelentőségüket az adja, hogy tetszőleges $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ esetén az (egyedüli) $P(a_1) = b_1, \ldots, P(a_n) = b_n$ feltételeknek eleget tevő $(n-1)$-edfokú polinom éppen $b_1 P_1 + \cdots + b_n P_n$.

Az egész alfejezet során feltesszük, hogy

$$1, \underbrace{1+1}_{2}, \underbrace{1+1+1}_{2}, \ldots \neq 0 \qquad \text{a } \mathbb{K} \text{ testben .}$$

Minden $n = 1, 2, \ldots$ és V vektortér mellett bevezetjük a V fölötti n-formákra a

$$P_{\mathrm{a}} := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathrm{PERM}_n} (-1)^{\mathrm{par}(\pi)} T_\pi$$

operációt*.

Propozíció. *A* P_{a} *leképezés lineáris* $\mathcal{L}({}^nV, \mathbb{K}) \to \{\text{alt. } n\text{formák}\}$ *projekció. Nevezetesen* $P_{\mathrm{a}}\Phi = \Phi$ *az alternáló* Φ *formákra.*

Bizonyítás. Észrevétel: A T_π operációk triviálisan lineárisak, és

$$T_s igma \circ T_\pi = T_{\pi\sigma} \qquad (\pi, \sigma \in \mathrm{PERM}_n) \ .$$

Így tetszőleges $\Phi \in \mathcal{L}({}^nV, \mathbb{K})$ forma és $\sigma \in \mathrm{PERM}_n$ permutáció mellett

$$\begin{aligned}
T_\sigma P_{\mathrm{a}}\Phi &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathrm{PERM}_n} (-1)^{\mathrm{par}(\pi)} T_\sigma T_\pi \Phi = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathrm{PERM}_n} (-1)^{\mathrm{par}(\pi)} T_{\pi\sigma}\Phi \overset{\vartheta := \pi\sigma}{=} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\vartheta \in \mathrm{PERM}_n} (-1)^{\mathrm{par}(\vartheta\sigma^{-1})} T_\vartheta \Phi \overset{(-1)^{\mathrm{par}(\vartheta\sigma^{-1})}}{=} (-1)^{\mathrm{par}(\vartheta)} (-1)^{\mathrm{par}(\sigma)} \\
&= (-1)^{\mathrm{par}(\sigma)} \frac{1}{n!} \sum_{\vartheta \in \mathrm{PERM}_n} (-1)^{\mathrm{par}(\vartheta)} T_\vartheta \Phi = (-1)^{\mathrm{par}(\sigma)} P_{\mathrm{a}}\Phi \ ,
\end{aligned}$$

ami mutatja, hogy a $\overline{P}_{\mathrm{a}}\Phi$ forma alternáló. Vagyis $\overline{P}_{\mathrm{a}} : \mathcal{L}({}^nV, \mathbb{K}) \to \{\text{alt. } n\text{formák}\}$.

Tegyük fel, hogy a $\Phi \in \mathcal{L}({}^nV, \mathbb{K})$ forma alternáló. Belátandó: $P_{\mathrm{a}}\Phi = \Phi$. Most

$$\begin{aligned}
\overline{P}_{\mathrm{a}}\Phi &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{PERM}_n} (-1)^{\mathrm{par}(\sigma)} T_\sigma \Phi \overset{\Phi \text{ alt.}}{=} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{PERM}_n} (-1)^{\mathrm{par}(\sigma)} (-1)^{\mathrm{par}(\sigma)} T_{\sigma\pi}\Phi = \frac{1}{n!} n! \cdot \Phi = \Phi \ .
\end{aligned}$$

Gyakorlat. Írjuk le a szimmetrizálást (ld. "Szimmetrikus leképezések" alfejezet) a T_π operációkkal. $\left(P_{\mathrm{s}} = \frac{1}{n!} \sum_\pi T_\pi\right)$.

---

* A félreértés veszélye nélkül elhagyhatjuk az n-re ill. V-re való utalást a jelölésben.

Definíció. Legyen Φ egy alternáló p-forma, Ψ pedig egy alternáló q-forma a V vektortéren. Ekkor a **külső szorzat**uk a

$$\Phi \wedge \Psi := P_{\mathrm{a}}(\Phi \otimes \Psi)$$

alternáló $(p+q)$-forma.

Lemma. *Ha Φ egy p-forma, Ψ egy q-forma a V vektortéren, akkor*

$$P_{\mathrm{a}}\big((P_{\mathrm{a}}\Phi) \otimes (P_{\mathrm{a}}\Psi)\big) = P_{\mathrm{a}}(\Phi \otimes \Psi) \ .$$

Bizonyítás. Bevezetve a p-permutációk

$$\overline{\sigma} := \left[i \mapsto \begin{cases} \sigma(i) & i \leq p \\ i & p < i \leq p+q \end{cases} \right] \qquad (\sigma \in \mathrm{PERM}_p)$$

természetes PERM_{p+q}-beli kiterjesztését,

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{a}}\big((P_{\mathrm{a}}\Phi) \otimes \Psi\big) &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\pi \in \mathrm{PERM}_{p+q}} T_\pi \left[\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathrm{PERM}_p} (T_\sigma \Phi) \otimes \Psi \right] = \\ &= \frac{1}{(p+q)!p!} \sum_{\pi \in \mathrm{PERM}_{p+q}} \sum_{\sigma \in \mathrm{PERM}_p} T_\pi T_{\overline{\sigma}} (\Phi \otimes \Psi) \overset{T_\pi T_{\overline{\sigma}} = T_{\overline{\sigma}\pi}}{\underset{\vartheta := \overline{\sigma}\pi}{=}} \\ &= \frac{1}{(p+q)!p!} \sum_{\vartheta \in \mathrm{PERM}_{p+q}} \underbrace{\#\{\sigma : \ \overline{\sigma} = \vartheta\}}_{p!} \cdot T_\vartheta (\Phi \otimes \Psi) = \\ &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\vartheta \in \mathrm{PERM}_{p+q}} T_\vartheta (\Phi \otimes \Psi) = P_{\mathrm{a}}(\Phi \otimes \Psi) \ . \end{aligned}$$

Megjegyzés. Analóg bizonyítás adja, hogy ugyanígy

$$P_{\mathrm{a}}\big(\Phi \otimes (P_{\mathrm{a}}\Psi)\big) = P_{\mathrm{a}}(\Phi \otimes \Psi) \ .$$

Propozíció. *A $\wedge$ külső szorzat asszociatív művelet.*

Bizonyítás. Legyenek Φ_1, Φ_2, Φ_3 alternáló formák ugyanazon V vektortér fölött. Ekkor $P_{\mathrm{a}}\Phi_k = \Phi_k$ $(k = 1,2,3)$. Így

$$\begin{aligned} (\Phi_1 \wedge \Phi_2) \wedge \Phi_3 &= P_{\mathrm{a}}\big((\Phi_1 \wedge \Phi_2) \otimes \Phi_3\big) = P_{\mathrm{a}}\big([P_{\mathrm{a}}(\Phi_1 \otimes \Phi_2)] \otimes \Phi_3\big) =^{\mathrm{Lemma}} \\ &= P_{\mathrm{a}}\big[(\Phi_1 \otimes \Phi_2) \otimes \Phi_3\big] \ . \end{aligned}$$

Hasonló számolással adódik a Megjegyzés alapján, hogy

$$\Phi_1 \wedge (\Phi_2 \wedge \Phi_3) = P_{\mathrm{a}}\big[\Phi_1 \otimes (\Phi_2 \otimes \Phi_3)\big] \ .$$

Tudjuk: a formák tenzori szorzása asszociatív. Vagyis

$$(\Phi_1 \wedge \Phi_2) \wedge \Phi_3 = \Phi_1 \wedge (\Phi_2 \wedge \Phi_3) = P_{\mathrm{a}}\big[\Phi_1 \otimes \Phi_2 \otimes \Phi_3\big] \ .$$

Következmény. *Ha $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ különböző formák V fölött, akkor*

$$\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n = P_{\mathrm{a}}(\Phi_1 \otimes \cdots \otimes \Phi_n) \ .$$

Bizonyítás. Indukció n szerint. Az $n = 2, 3$ esetek már ismertek. Ha n-re az állítás igaz,

$$\begin{aligned}\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_{n+1} &= P_{\mathrm{a}}\big((\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n) \otimes \Phi_{n+1}\big) = \\ &= P_{\mathrm{a}}\big(\big[P_{\mathrm{a}}(\Phi_1 \otimes \cdots \otimes \Phi_n)\big] \otimes \Phi_{n+1}\big) =^{\mathrm{LEMMA}} \\ &= P_{\mathrm{a}}(\Phi_1 \otimes \cdots \otimes \Phi_{n+1}) \ .\end{aligned}$$

Példa. Ha $\phi_1, \dots, \phi_n \in V'$ (ezek 1-formák v fölött), akkor

$$\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n = \sum_{\pi \in \mathrm{PERM}_n} (-1)^{\mathrm{par}(\pi)} \phi_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\pi(n)} \ .$$

Bizonyítás. . Észrevétel: Minden $\pi \in \mathrm{PERM}_n$ permutációra

$$T_\pi(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n : \ (v_1, \dots, \phi_n) \mapsto \big[\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n\big](v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n)}) \ ,$$

és itt

$$\begin{aligned}\big[\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n\big](v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n)}) &= \phi_1\big(v_{\pi(1)}\big) \cdots \phi_n\big(v_{\pi(1)}\big) = \\ &= \phi_{\pi^{-1}\pi(1)}\big(v_{\pi(1)}\big) \cdots \phi_{\pi^{-1}\pi(n)}\big(v_{\pi(n)}\big) = \\ &= \phi_{\pi^{-1}(1)}(v_1) \cdots \phi_{\pi^{-1}(n)}(v_n) = \big[\phi_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\pi^{-1}(n)}\big](v_1, \dots, v_n) \ .\end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned}\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n &= \sum_{\pi \in \mathrm{PERM}_n} (-1)^{\mathrm{par}(\pi)} T_\pi(\phi_1 \otimes \cdots \phi_n) = \\ &= \sum_{\pi \in \mathrm{PERM}_n} (-1)^{\mathrm{par}(\pi)} \phi_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \phi_{\pi^{-1}(n)} =^{\sigma := \pi^{-1}} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{PERM}_n} (-1)^{\mathrm{par}(\sigma)} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \phi_{\sigma(n)} \ .\end{aligned}$$

Propozíció. *Az alternáló formák lineáris funcionálok külső szorzatainak lineáris kombinációi. Azaz*

$$\mathcal{L}_\mathrm{a}({}^nV, \mathrm{I\!K}) = \mathrm{Span}\{\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n : \ \phi_1, \ldots, \phi_n \in V'\} \ .$$

Bizonyítás. Az előző Következmény szerint

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\mathrm{a}({}^nV, \mathrm{I\!K}) &= P_\mathrm{a}\big(\underbrace{V' \otimes \cdots \otimes V'}_{n}\big) = P_\mathrm{a}\mathrm{Span}\{\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n : \ \phi_1, \ldots, \phi_n \in V'\} = \\ &= \mathrm{Span}\{P_\mathrm{a}(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) : \ \phi_1, \ldots, \phi_n \in V'\} = \\ &= \mathrm{Span}\{\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n : \ \phi_1, \ldots, \phi_n \in V'\} = \\ &= \mathrm{Span}\{\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n : \ \phi_1, \ldots, \phi_n \in V'\} \ .\end{aligned}$$

Definíció. Hasolóan, mint a vektorterek tenzori szorzatának definíciójánál, csak pl. V' fölötti lineáris funkcionálokként kell felfogni V elemeit ahhoz, hogy a V tér $V \wedge \ldots \wedge V$ alakú **külső hatvány**ait értelmezzük.
Azaz $v_1, \ldots, v_n \in V$-re

$$\begin{aligned}&v_1 \wedge \ldots \wedge v_n := \delta_{v_1} \wedge \ldots \wedge \delta_{v_n} \ , \\ &\text{ahol} \quad \delta_v := \big[V' \ni \phi \mapsto \langle \phi, v\rangle\big] \qquad (v \in V) \ ; \\ &\bigwedge^n V := \mathrm{Span}\{v_1 \wedge \ldots \wedge v_n : \ v_1, \ldots, v_n \in V\} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \ .\end{aligned}$$

Lemma. *A* $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ *hozzárendelés alternáló* n-*lineáris* $V^n \to \bigwedge^n V$ *leképezés.*

Bizonyítás. Azonnali következménye a (Példa szerinti)

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \sum_{\pi \in \mathrm{PERM}_n} (-1)^{\mathrm{par}(\pi)} v_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi(n)}$$

formulának.

Tétel. *Legyen* $(e_1, \ldots, e_n)$ *rendezett bázis a* V *térben. Ekkor*
1) $\big\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} : \ 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\big\} \qquad (k = 1, \ldots, n)$,
2) $\bigwedge^{n+m} V = \{0\} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$,
3) $v_j = \alpha_{1j} e_1 + \cdots + \alpha_{nj} e_n \quad (j = 1, \ldots, k)$ *esetén*

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \det\big(\alpha_{pj_q}\big)_{p,q=1}^{k} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k} \ .$$

BIZONYÍTÁS. 1) Mivel $V = \mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_n\}$, minden k-ra fennáll $\bigwedge^k V = \mathrm{Span}^n_{j_1,\ldots,j_k=1} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}$. A Lemma alapján $e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k} = 0$, ha a $j_1, \ldots, j_k$ indexek közül valamelyik kettő azonos. Ha pedig $j_1, \ldots, j_k$ mind különbözők, az indexek $i_1 := j_{\vartheta(1)}, \ldots, i_n := j_{\vartheta(k)}$ sorrendbe rakásával

$$e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k} = (-1)^{\mathrm{par}(\vartheta)} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \ , \qquad i_1 < \cdots < i_k \ ,$$

ahonnan $\bigwedge^k V = \mathrm{Span}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$. Másrészt az $e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k}$ alakú elemek lineárisan függetlenek ($\bigotimes^k V$-ben), és így az

$$\begin{aligned} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} &= \frac{1}{k!} \sum_{\vartheta \in \mathrm{PERM}_k} (-1)^{\mathrm{par}(\vartheta)} e_{i_{\vartheta(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\vartheta(k)}} \in \\ &\in \mathrm{Span}\big\{e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k} : \ \{j_1, \ldots, j_k\} = \{i_1, \ldots, i_k\}\big\} \quad (i_1 < \cdots < i_k) \end{aligned}$$

külső szorzatok lineárisan függetlenek.

2) Ha $j_1, \ldots, j_{n+m} \in \{1, \ldots, n\}$, akkor $\exists\, p, q \ \ j_p = j_q, \ p \ne q$, ahonnan $e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{n+m}} = 0$. Így $\bigwedge^{n+m} V = \mathrm{Span}^n_{j_1,\ldots,j_{n+m}=1} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{n+m}} = \{0\}$.

3) A külső szorzat alternáló tulajdonsága alapján

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \ldots \wedge v_k &= \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{kj_k} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k} = \\ &= \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \underbrace{\sum_{\vartheta \in \mathrm{PERM}_k} \alpha_{1 j_{\vartheta(1)}} \cdots \alpha_{k \vartheta(k)} (-1)^{\mathrm{par}(\vartheta)}}_{\det\left(\alpha_{p j_q}\right)_{p,q=1}^k} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k} \end{aligned}$$

a determináns kifejtési formulája szerint.

KARAKTERISZTIKUS POLINOM, JORDAN NORMÁLFORMA

Kérdés. Egy adott $A \in \mathcal{L}(V)$ operátornak milyen a legegyszerűbb $E'AE$ alakú mátrixa?

Nilpotens operátorok

Az egész alfejezetben V egy *tetszőleges* (tehát akár végtelen dimenziós) vektortér, $A : V \to V$ pedig egy tetszőlegesen rögzített lineáris operátor.

Definíció. Az A operátor **nilpotens**, ha valamely $n > 0$ mellett $A^n = 0$.

Emlékeztető. Egy B lineáris operátor 0-tere $\ker(B) := \{v : \ Bv = 0\}$, képtere pedig $\mathrm{ran}(B) := \{u : \ \exists\, v \ \ Bv = u\}$. Ezzel nilpotens operátorokra azonnal adódik a következő.

Lemma. *Ha $A^n = 0$, akkor*

$$A : V \to \ker(A^{n-1}) \to \ker(A^{n-2}) \to \cdots \to \ker(A^2) \to \ker(A) \to \{0\} \ ,$$

$$\textit{sőt} \quad \mathrm{ran}(A^k) \subset \ker(A^{n-k}) \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Definíció. Egy $B : V \to V$ (nem feltétlenül nilpotens) lineáris operátor mellett az $\{e_1, \ldots, e_m\}$ vektorcsalád B-**lánc**, ha $e_1, \ldots, e_m \neq 0$ és

$$A : e_1 \mapsto e_2 \mapsto \cdots \mapsto e_m \mapsto 0 \ .$$

Példa. Legyen $A : \mathbb{K}^{12} \to \mathbb{K}^{13}$ az egységvektorok $E := \{e_1, \ldots, e_{12}\}$ bázisa mellett a (mátrixával azonosított)

$$\begin{pmatrix}
0 &&&&&&&&&&& \\
1 & 0 &&&&&&&&&& \\
& 1 & 0 &&&&&&&&& \\
&&& 0 &&&&&&&& \\
&&& 1 & 0 &&&&&&& \\
&&&& 1 & 0 &&&&&& \\
&&&&&& 0 &&&&& \\
&&&&&& 1 & 0 &&&& \\
&&&&&&&& 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 & 0 && \\
&&&&&&&&&& 0 & \\
&&&&&&&&&&& 0
\end{pmatrix}$$

operátor. Ekkor $A^3 = 0$, és az E bázis felbomlik az

$$e_1 \mapsto e_2 \mapsto e_3 \mapsto 0\ ,\ e_4 \mapsto e_5 \mapsto e_6 \mapsto 0\ ,e_7 \mapsto e_8 \mapsto 0\ ,\ e_9 \mapsto e_{10} \mapsto 0\ ,e_{11} \mapsto 0\ ,\ e_{12} \mapsto 0$$

A-láncokra.

Lemma. *Ha $A^n = 0$ és U olyan altér V-ben, amelyre $U \cap \ker(A^{n-1} = \{0\}$, akkor az A leképezés injektív U-n (azaz $A : U \leftrightarrow AU$) és $(AU) \cap \ker(A^{n-2}) = \{0\}$.*

Bizonyítás. Egy lineáris leképezés pontosan akkor injektív, ha nem-0 vektort nem-0 vektorba visz. Ezért elég látni:

$$Au \notin \ker(A^{n-2}) \qquad (0 \neq u \in U)\ .$$

Tegyük fel, hogy $u \in U$ olyan vektor, hogy $Au \in \ker(A^{n-2})$. Ekkor $0 = A^{n-2}(Au) = A^{n-1}u$, azaz $u \in \ker(A^{n-1})$. Mivel $U \cap \ker(A^{n-1}) = \{0\}$, szükségképpen $u = 0$.

Lemma. *Legyen $A^n = 0$ és $S \subset V$ olyan lineárisan független vektorcsalád, amelyre* $\mathrm{Span}(S) \cap \ker(A^{n-1}) = \{0\}$. *Ekkor*

1) *az A operátor injektív* $\mathrm{Span}(S)$*-en* ($A : \mathrm{Span}(S) \leftrightarrow \mathrm{Span}(AS)$), $\mathrm{Span}(AS)\ker(A^{n-2}) = \{0\}$ *és* AS linfgtlen $\subset V$*;*
2) $\exists\ \overline{S}$ linfgtlen $\subset V \qquad S \subset \overline{S}$ linfgtlen $\subset V\ ,\ V = \mathrm{Span}(S) \oplus \ker(A^{n-1})$.*

Bizonyítás. 1) Az $U := \mathrm{Span}(S)$ altérre a lemma szerint $A : U \leftrightarrow AU$. Tudjuk: injektív lineáris leképezések vektortér-izomorfizmusok értelmezési tartományuk és

* Azaz $\mathrm{Span}(\overline{S}) \cap \ker(A^{n-1}) = \{0\}$ és $\mathrm{Span}(\overline{S}) + \ker(A^{n-1}) = V$.

képterük között. Így A az U-beli lineárisan független vektorrendszereket lineárisan függetlenekbe viszi.

2) Vegyünk fel egy (tetszőleges) H bázist a $\ker(A^{n-1})$ altérben.
Állítás: $S \cup H$linfgtlen $\subset V$.

Bizonyítás. : Ha $u_1, \ldots, u_m \in S$, $v_1, \ldots, v_\ell \in H$ páronként különbözők és $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j v_j = 0$, akkor

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i = -\sum_{j=1}^{\ell} \beta_j v_j \in \mathrm{Span}(S) \cap \mathrm{Span}(H) = \{0\} ,$$

ahonnan $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_1 = \cdots = \beta_\ell = 0$.
Az állítás alapján Hamel tétele szerint $S \cup H$ kiegészíthető V-nek egy $\overline{H}$ bázisává. Most

$$\overline{S} := \overline{H} \setminus H$$

mellett $\overline{S} \supset S$, és mivel a $\overline{H}$ bázis az egymástól diszjunkt $\overline{S}$ ill. H vektorcsaládok egyesítése, $V = \mathrm{Span}(\overline{H}) = \mathrm{Span}(\overline{S}) \oplus \mathrm{Span}(H) = \mathrm{Span}(\overline{S}) \oplus \ker(A^{n-1})$.

Tétel. *Ha $A^n = 0$, akkor található olyan S bázisa a V térnek, amely felbontható egymástól diszjunkt, legfeljebb n hosszú A-láncok egyesítésére.*

Bizonyítás. Indukcióval n szerint belátjuk a következőt.

Ha $A^n = 0$ és S olyan lineárisan független vektorrendszer, amelyre $\mathrm{Span}(S) \cap \ker(A^{n-1}) = \{0\}$*, akkor található páronként diszjunkt A-láncokból álló, S-et tartalmazó E bázisa a V térnek.*

Az $n = 1$ esetben $A = 0$ (és $\ker(A^0) = \ker(\mathrm{id}) = \{0\}$). Ekkor Hamel tétele szerint as S lineárisan független rendszert kiegészíthetjük egy E bázissá. Minden $e \in E$-re $Ae = 0$, azaz $\{e\}$ egy-elemű A-lánc (és $E = \bigcup_{e \in E} \{e\}$).

Tegyük fel, hogy $(n-1)$-re igaz az állítás, és legyen $A^n = 0$, S linfgtlen$\subset V$, $\mathrm{Span}(S) \cap \ker(A^{n-1}) = \{0\}$.
Lemma 2) alapján S-et kibővítjük egy olyan $\overline{S}$ vektorrendszerré, amelyre

$$S \subset \overline{S} \text{ linfgtlen } \subset V \ , \quad V = \mathrm{Span}(S) \oplus \ker(A^{n-1}) \ .$$

Az indukciós feltevés alkalmazásához legyen

$$\widetilde{V} := \ker(A^{n-1}) \quad , \quad \widetilde{A} := A|\widetilde{V} \quad , \quad \widetilde{S} := A\overline{S} \ .$$

Valóban, $\widetilde{A}^{n-1} = 0$, és Lemma 1)-et $\overline{S}$-ra alkalmazva

$$\widetilde{S}\text{linfgtlen}\subset \widetilde{V} \quad , \quad \mathrm{Span}(\widetilde{S}) \cap \ker(\widetilde{A}^{n-2}) = \mathrm{Span}(A\overline{S}) \cap \ker(A^{n-2}) = \{0\} \ .$$

Az indukciós feltevés alapján

$$\exists\, \widetilde{E} \text{ bázis} \subset \widetilde{V} \qquad \widetilde{S} \subset \widetilde{E} = \bigcup \big\{ \text{ diszjunkt } A\text{-láncok} \big\} \ .$$

Állítás: $E := \overline{S} \cup \widetilde{E}$ megfelel (azaz Ebázis$\subset V$ és $S \subset E = \bigcup\{$ diszj. A-láncok$\}$).

Bizonyítás. : Mivel $\mathrm{Span}(\widetilde{E}) = \widetilde{V} = \ker(A^{n-1})$, így $\mathrm{Span}(\overline{S}) \cap \mathrm{Span}(\widetilde{E}) = \{0\}$, vagyis $\overline{S}$ lineárisan független$\widetilde{E}$-től. Ezért

$$E = \overline{S} \cup \widetilde{E} \text{ linfgtlen } \subset V \ .$$

Mśrészt

$$V = \mathrm{Span}(\overline{S}) \oplus \ker(A^{n-1}) == \mathrm{Span}(\overline{S}) \oplus \mathrm{Span}(\widetilde{E}) = \mathrm{Span}\big(\overline{S} \cup \widetilde{E}\big) = \mathrm{Span}(E) \ ,$$

így E bázis$\subset V$.

Jelölje $\widetilde{\mathcal{D}}$ az $\widetilde{E}$-t alkotó diszjunkt A-láncok családját. Észrevétel: Az

$$D_e := \{e, Ae, A^2e, \ldots, A^{n-2}e\} \qquad (e \in \widetilde{S})$$

A-láncokra

$$(*) \qquad D_e \in \widetilde{\mathcal{D}} \ , \quad D_e \cap D_f = \emptyset \qquad (e \neq f \ ; \ e, f \in \widetilde{S}) \ .$$

Ugyanis, ha $e \in \widetilde{S}$, akkor $e \in D$ pontosan egy $D \in \mathcal{D}$ A-láncra, amelyre egyben $D_e \subset \mathcal{D}$. Másrészt $A^{n-2}e \neq 0$ (hiszen $e = Ag$ valamely $g \in \overline{S}$-re, és ezzel $A^{n-2}e = 0$ esetén $g \in \ker(A^{n-1})$ volna, ami a $0 \neq g \in \mathrm{Span}(\overline{S}) \cap \ker(A^{n-1}) = \{0\}$ ellentmondásra vezetne). Ezért az $e, Ae, \ldots, A^{n-2}e \in \widetilde{V}$ vektorok mind különbözők és nem-zérók. Csakhogy $A^{n-1}\widetilde{V} = \{0\}$, vagyis $\widetilde{V}$-ben nem lehetnek $(n-1)$-nél hosszabb A-láncok. Következésképpen $D_e = D$ lehet csak, azaz valóban $D_e \in \mathcal{D}$. Az előbbi gondolatmenet mutatja, hogy $\widetilde{S}$-beli elem csak kezdőtagja lehet az őt tartalmazó $\mathcal{D}$-beli A-láncnak. Így $e \neq f$ esetén $f \notin D_e$, ahonnan $D_f \neq D_e$, és ezért $D_f \cap D_e = \emptyset$ (mivel $\mathcal{D}$ páronként diszjunkt A-láncokból áll).

Lemma 1) szerint $A : \overline{S} \leftrightarrow \widetilde{S}$. Vagyis mindegyik $e \in \widetilde{S}$ vektorhoz pontosan egy $g(e) \in \overline{S}$ található, amelyre $e = Ag(e)$. Ezzel a $D_e \cup \{g(e)\}$ halmaz egy A-lánc, hiszen rajta A hatása

$$A : g(e) \mapsto e \mapsto Ae \mapsto A^2e \mapsto \cdots \mapsto A^{n-2}e \mapsto 0 \ .$$

Tehát $(*)$ alapján az $E(\overline{S} \cup \widetilde{E})$ bázis a páronként diszjunkt

$$\overline{D} := \begin{cases} D_e \cup \{g(e)\} & \text{ha } D = D_e \ (e \in \widetilde{S}) \\ D & \text{egyébként} \end{cases} \qquad (D \in \mathcal{D})$$

A-láncok uniója.

Sajátvektorok, karakterisztikus polinom

Definíció. A $v \in V$ vektor az $A \in \mathcal{L}(V)$ operátor $\lambda \in \mathbb{K}$ **sajátértékű sajátvektor**a, ha

$$Av = \lambda v \ .$$

Propozíció. *Legyen V egy véges dimenziós vektortér, $A \in \mathcal{L}(V)$ és $\lambda (\in \mathbb{K})$. Ekkor*

$$\{e \in V : \ Ae = \lambda e\, ,\ e \neq 0\} \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\lambda - A) \neq 0 \ .$$

Bizonyítás. A $B := \lambda - A$ operátorral $Ae = \lambda e \iff Be = 0$ $(e \in V)$.
Ha $\det(B) \neq 0$, akkor B invertálható, és ilyenkor $Be = 0 \iff e = B^{-1}0 = 0$.
Ha $\det(B) = 0$, akkor B nem invertálható, azaz nem injektív. Véve olyan $e_1, e_2 \in V$ vektorokat, amelyekre $e_1 \neq e_2$ és $Be_1 = Be_2$, az $e := e_1 - e_2$ vektorra $Be = 0 \neq e$.

Tétel. *Ha V egy n-dimenziós vektortér és $A \in \mathcal{L}(V)$, akkor a $\lambda \mapsto \det(\lambda - A)$ függvény n-edfokú polinom. Nevezetesen,*

$$\det(\lambda - A) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \Big[\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \det\big(a_{i_s i_t}\big)_{s,t=1}^{k} \Big] \lambda^{n-k} \ ,$$

ahol $\big(a_{i_s i_t}\big)_{s,t=1}^{n} := E'AE$ az A operátor mátrixa V egy tetszőlegesen rögzített E bázisa szerint.

Bizonyítás. Jelölje $a_1, \dots, a_n$ az $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ mátrix oszlopait, ill. $e_1, \dots, e_n$ a $\mathbb{K}^n$ tér kanonikus egységvektorait (mint oszlopmátrixokat). Ekkor

$$\begin{aligned}
\det(\lambda - A) &= \det(\lambda e_1 - a_1, \dots, \lambda e_n - a_n) = \\
&= \det(\lambda e_1, \lambda e_2 - a_2, \dots, \lambda e_n - a_n) + \det(a_1, \lambda e_2 - a_2, \dots, \lambda e_n - a_n) = \\
&\ \vdots \\
&= \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} \det\Big(\begin{Bmatrix} -a_1 & \text{ha } 1 \in I \\ \lambda & \text{ha } 1 \notin I \end{Bmatrix}, \dots, \begin{Bmatrix} -a_n & \text{ha } n \in I \\ \lambda & \text{ha } n \notin I \end{Bmatrix} \Big) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{I:\ \#I = k} (-1)^k \lambda^{n-k} \det\Big(\begin{Bmatrix} a_1 & \text{ha } 1 \in I \\ 1 & \text{ha } 1 \notin I \end{Bmatrix}, \dots, \begin{Bmatrix} a_n & \text{ha } n \in I \\ 1 & \text{ha } n \notin I \end{Bmatrix} \Big) = \\
&= \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \lambda^{n-k} \sum_{\substack{I = \{i_1, \dots, i_k\} \\ i_1 < \cdots < i_k}} \det\Big(\begin{Bmatrix} a_1 & \text{ha } 1 \in I \\ 1 & \text{ha } 1 \notin I \end{Bmatrix}, \dots, \begin{Bmatrix} a_n & \text{ha } n \in I \\ 1 & \text{ha } n \notin I \end{Bmatrix} \Big) .
\end{aligned}$$

Legyen $k \in \{1, \ldots, n\}$ és legyenek az $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ indexek tetszőlegesen rögzítve, $I := \{i_1, \ldots, i_k\}$. Legyen továbbá $j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-k}$ az $\{1, \ldots, n\} \setminus I$ indexhalmaz elemeinek sorrendbe szedése, és π a

$$\pi(s) := \begin{cases} s & (1 \le s \le k) \\ j_{s-k} & (k+1 \le s \le n) \end{cases}$$

permutáció. Ezzel

$$\det\left(\begin{Bmatrix} a_1 \text{ ha } 1 \in I \\ 1 \text{ ha } 1 \notin I \end{Bmatrix}, \ldots, \begin{Bmatrix} a_n \text{ ha } n \in I \\ 1 \text{ ha } n \notin I \end{Bmatrix}\right) =^{\text{OSZLOPCSERE}}$$

$$= (-1)^{\mathrm{par}(\pi)} \det(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_{n-k}}) =^{\text{SORCSERE}}$$

$$= \underbrace{(-1)^{\mathrm{par}(\pi)}(-1)^{\mathrm{par}(\pi)}}_{1} \det \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} & & & \\ a_{j_1 i_1} & \cdots & a_{j_1 i_k} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ a_{j_{n-k} i_1} & \cdots & a_{j_{n-k} i_k} & & & 1 \end{pmatrix} =^{\substack{\text{KIFEJT.} \\ (k+1),\ldots,n. \\ \text{OSZL.}}}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix} .$$

Definíció. Véges dimenziós V vektortérben egy $A \in \mathcal{L}(V)$ operátor **karakterisztikus polinom**ja a

$$\mathbb{K} \ni \lambda \mapsto \det(\lambda - A)$$

polinom. Az $1 \le k \le n := \dim(V)$ értékek mellett az A operátor k**-adrendű nyom**a

$$\mathrm{trace}_k(A) := \sum \{E'AE \ (k \times k\text{-as szimmetrikus aldeterminánsai}\}$$

ahol E tetszőleges rendezett bázis V-ben.

Megjegyzés. 1) A Tétel szerint $\mathrm{trace}_1(A), \ldots, \mathrm{trace}_n(A)$ jól-definiált, koordináta-független mennyiségek, és

$$\det(\lambda - A) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \mathrm{trace}_k(A) \lambda^{n-k} \qquad (\lambda \in \mathbb{K}) .$$

2) Szokásosan, ha csak **nyom**ról beszélünk a *rend megjelölése nélkül*, akkor *elsőrendű nyom*ot értünk alatta.

3) Természetes módon beszélhetünk (az $n \times n$-es mátrixokat $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^N$ operátorokkal azonosítva) *mátrixok sajátvektorai, sajátértékei, karakterisztikus polinomja* ill. *nyomai*ról.

Példa. Ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, az

$$\alpha := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

karakterisztikus polinomja

> Következmény. *Ha α és β hasonló $n \times n$-es mátrixok, azaz ha $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$ valamilyen invertálható σ mátrixszal, akkor tetszőlegesen rögzített $1 \le k \le n$ mellett az α ill. β mátrixok főátlóra szimmetrikus $k \times k$-as aldeterminánsainak összege megegyezik.*

Bizonyítás. Tudjuk: van olyan $\overline{\mathbb{K}}$ algebrailag zárt test, amelynek részteste $\mathbb{K}$. Természetesen, $\alpha, \beta, \sigma \in \mathrm{Mat}(n, n, \overline{\mathbb{K}})$ is.

Észrevétel: a determinánsok szorzástétele szerint

$$\begin{aligned} \det(\lambda - \beta) = \det\big(\lambda\sigma\sigma^{-1} - \sigma\alpha\sigma^{-1}\big) &= \det[\sigma(\lambda - \alpha)\sigma^{-1}] = \\ (\det\sigma)\det(\lambda - \alpha)(\det\sigma)^{-1} &= \\ = \det(\lambda - \alpha) \qquad (\lambda &\in \overline{\mathbb{K}}) \ . \end{aligned}$$

Vagyis az β mátrix karakterisztikus polinomja $\overline{\mathbb{K}}$ fölött egybeesik β-éval. Így, a $\overline{\mathbb{K}}$ test algebrai zártsága miatt az együtthatóik csak ugyanazok lehetnek. A tétel szerint pedig *egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjában* $[\lambda \mapsto \lambda^{n-k}]$ *együtthatója* $= (-1)^k \sum\big\{(k \times k)$-s szimmetrikus aldeterminánsok$\big\}$.

> Propozíció. *Pontosan akkor van minden $\mathbb{K}$ fölötti véges dimenziós vektortéren értelmezett lineáris operátornak sajátvektora, ha a $\mathbb{K}$ test algebrailag zárt.*

Bizonyítás. Legyen V egy n-dimenziós $\mathbb{K}$ fölötti vektortér és $A \in \mathcal{L}(V)$. Ha a $\mathbb{K}$ test algebrailag zárt, akkor a $\lambda \mapsto \det(\lambda - A)$ polinomnak (mint bármelyik nem 0-fokú polinomnak) van legalább egy gyöke, és ehhez (az előző proozíció szerint) nem-0 sajátvektora is.

Tegyük fel, hogy a $\mathbb{K}$ test nem zárt algebrailag. Ekkor van olyan 1 főegyütthatójú $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ polinom, mondjuk

$$p : \ \lambda \mapsto \lambda^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \lambda^k \ ,$$

amely sehol sem tűnik el. Észrevétel: Az

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & & & & -a_1 \\ & 1 & & & -a_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

mátrixszal azonosított $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ operátor karakterisztikus polinomja (ha $P_{\beta_1,\dots,\beta_m}$ az A-val analóg $m \times m$-es mátrix karakterisztikus polinomja, ahol az utolsó oszlopban $\beta_1, \dots, \beta_m$ áll)

$$\begin{aligned} \det(\lambda - A) &= \lambda P_{-a_1,\dots,-a_{n-1}}(\lambda) + (-1)^{n-1} a_0 (-1)^{n-1} = \\ &= \lambda\big(\lambda P_{-a_2,\dots,-a_{n-1}}(\lambda) + (-1)^{n-2} a_1 (-1)^{n-2}\big) + a_0 = \\ &\vdots \\ &= \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^{k-1} = p(\lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{K}) \ . \end{aligned}$$

Ha valamely $e \neq 0$ vektor $\lambda_0 (\in \mathbb{K})$ sajátértékű sajátvektora volna A-nak, akkor $p(\lambda_0) = \det(\lambda_0 - A) = 0$ volna ellentétben azzal a feltévéssel, hogy a p polinom sehol sem tűnik el $\mathbb{K}$-n.

Jordan blokkok

Definíció. Általában is, az $e \in V$ vektor az $A \in \mathcal{L}(V)$ operátor k**-adrendű** $\lambda(\in \mathbb{K})$ **sajátértékű sajátvektor**a, ha

$$(A - \lambda)^k e = 0 \qquad k = \min\{m : \ (A - \lambda)^m e = 0\} \ .$$

Ha nem utalunk egy sajátvektor rendjére, automatikusan 1-rendű sajátvektort értünk alatta. (Valóban, $(A - \lambda)^1 e = 0 \iff Ae = \lambda e$).

Megjegyzés. Ha e k-rendű sajátvektora A-nak a λ sajátértékkel, akkor $(A - \lambda)^m e = 0 \iff m \geq k$. A 0-vektor minden operátor 0-rendű sajátvektora.

Propozíció. *Legyen $e(\in V)$ az $A(\in \mathcal{L}(V))$ operátor n-edrendű saját-vektora a λ sajátérték mellett. Ekkor az*

$$e_k := (A-\lambda)^{k-1}e \qquad (k=1,\dots,n)$$

vektorok lineárisan függetlenek. Az A operátor hatása rajtuk

$$A:\ e_k \mapsto \lambda e_k + e_{k+1} \qquad (k=1,\dots,n-1)\ ,\quad e_n \mapsto \lambda e_n\ .$$

Bizonyítás. Nyilván $e_{k+1} = (A-\lambda)e_k$ $(k=1,\dots,n-1)$ és $(A-\lambda)e_n = (A-\lambda)^n e = 0$. Innen $Ae_k = \lambda e_k + e_{k+1}$ $(k<n)$, és $Ae_n = \lambda e_n$.

Tegyük fel, hogy $e_1,\dots,e_n$ nem lineárisan függetlenek. Ekkor az

$$U := \mathrm{Span}\{e_1,\dots,e_n\}$$

altérre $\dim(U) < n$ volna. Mivel $A-\lambda : e_1 \mapsto e_2 \mapsto \cdots \mapsto e_n \mapsto 0$, $A-\lambda:\ U \to U$ és $(A-\lambda)^n U = \{0\}$. Vagyis a $B := (A-\lambda)|U(\in \mathcal{L}(U))$ operátor nilpotens. Így van B-láncokból álló F bázisa az U térnek. Csakhogy bármelyik F-beli B-lánc legfeljebb $\dim(U)$ elemből állhat, hiszen lineárisan függetlenelemek alkotják. Ezért $B^{\dim}(U) = 0$, azaz

$$A^{\dim(U)}U = \{0\}\ ,$$

ami a $\dim(U) < n$ indirekt feltevésnek ellentmond, hiszen $A^{n-1}e_1 = e_n \neq 0$ miatt $A^{n-1}U \neq \{0\}$. $\dim(U) < n$ volna.

Következmény. *A $\mathrm{Span}\{e_1,\dots,e_n\}$ alteret A önmagába viszi, és rajta az $(e_1,\dots,e_n)$ rendezett bázis szerinti mátrixa*

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} \lambda & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & \\ & 1 & \lambda & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & \lambda & \\ & & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definíció. A $(*)$ alakú $n\times n$-es mátrixot n-edrendű λ sajátértékű **Jordan blokk**nak nevezzük, és $J(n,\lambda)$-val jelöljük.

Következmény. *Ha* $\dim(U) < \infty$ *és* $B \in \mathcal{L}(U)$ *egy nilpotens operátor, akkor található olyan* F *rendezett bázisa az* U *térnek, amely* B*-nek a* 0 *sajtértékű magasabb rendű sajátvektoraiból áll, és vele* B *mátrixa*

$$F'BF = \begin{pmatrix} J(n_1, 0) & & \\ & \ddots & \\ & & J(n_\ell, 0) \end{pmatrix}$$

alakú.

Jordan normálforma

Az egész alfejezetben V egy tetszőlegesen rögzített *véges dimenziós* vektortér egy *algebrailag zárt* $\mathbb{K}$ test fölött.

Megjegyzés. Ha $B : V \to V$ egy lineáris operátor, akkor $B^k v = 0 \;\Rightarrow\; B^{k+m} v = 0$ $(k, m > 0,\; v \in V)$, azaz

$$\ker(B) \subset \ker(B^2) \subset \ker(B^3) \subset \cdots \; .$$

A növő $k \mapsto \dim(\ker(B^k)) \leq \dim(V)$ függvény valahonnantól kezve konstanssá válik, és így

$$\dim(V) < \infty \;\Rightarrow\; \exists\, n \quad \ker(B) \subset \ker(B^2) \subset \cdots \subset \ker(B^n) = \ker(B^{n+1}) = \cdots \; .$$

Lemma. *Legyen* $B \in \mathcal{L}(V)$. *Ekkor*

$$\ker(B^n) = \ker(B^{n+1}) = \cdots \quad \Rightarrow \quad V = \operatorname{ran}(B^n) \oplus \ker(B^n) \; .$$

A $\operatorname{ran}(B^n)$, $\ker(B^n)$ *alterek sajátalterei a* B *operátornak**.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\ker(B^n) = \ker(B^{n+1})$ és $v \in \operatorname{ran}(B^n) \cap \ker(B^n)$. Vehető $v = B^n w$ valamely $w \in V$ mellett (mivel $v \in \operatorname{ran} B^n$). Feltevés szerint $B^n v = 0$ (uis $v \in \ker(B^n)$), ahonnan $B^{2n} w = 0$. Eszerint $w \in \ker(B^{2n}) = \ker(B^n)$, azaz $v = B^n w = 0$. Ezzel beláttuk, hogy $\operatorname{ran}(B^n) \cap \ker(B^n) = \{0\}$.

Tudjuk: $\dim(\ker(B^n)) + \dim(\operatorname{ran}(B^n)) = \dim V$.* Mivel $\ker(B^n) \cap \operatorname{ran}(B^n) = \{0\}$, fennáll $\dim(\ker(B^n) + \operatorname{ran}(B^n)) = \dim(\ker(B^n)) + \dim(\operatorname{ran}(B^n))$ is. Tehát

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim(\ker(B^n)) + \dim(\operatorname{ran}(B^n)) = \\ &= \dim(\ker(B^n) + \operatorname{ran}(B^n)) \; , \qquad \Rightarrow \quad V = \ker(B^n) \oplus \operatorname{ran}(B^n) \; . \end{aligned}$$

* Ld. a "Mátrixok rangszám-tétele" alfejezet.

Végül $B\mathrm{ran}(B^n) = \mathrm{ran}(B^{n+1}) \subset \mathrm{ran}(B^n)$ ill. $B\ker(B^n) \subset \ker(B^{n-1}) \subset \cdots \subset \ker(B)$.

Megjegyzés. Végtelen dimenzióban általában nem igaz a lemma állítása, mivel ekkor lehetnek injektív de nem szürjektív operátorok. Ha pl. $\widetilde{V}$ az $\mathbb{R}$ fölötti polinomok tere, $\widetilde{B}$ pedig az $x := [\xi \mapsto \xi]$ függvénynyel való szorzás, akkor $\mathrm{ran}(\widetilde{B}) = \{p \in \widetilde{B} :\ p(0) = 0\} \neq \widetilde{B}$ és $\ker(\widetilde{B}) = \{0\}$.

> **Propozíció.** *Legyen $A \in \mathcal{L}(V)$, $\dim(V) = n < \infty$. Ekkor talaálhatók olyan $U_1, \ldots, U_m$ sajátalterei A-nakés olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ konstansok, amelyekre*
>
> $$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m \ , \qquad (A - \lambda_k)^n U_k = \{0\} \quad (k = 1, \ldots, m) \ .$$

Bizonyítás. Teljes indukció $\dim(V)$ szerint. A $\dim(V) = 1$ eset triviális.

Tegyük fel, hogy $\dim(V) = n$, és az összes n-nél kisebb dimenziójú tereken értelmezett operátorokra igaz a Propozíció állítása. Legyen

$$\lambda_1 \text{ tetsz.} \in \{\lambda \in \mathbb{K} :\ \det(\lambda - A) = 0\} \ , \qquad B := A - \lambda_1 \ .$$

Mivel a $\mathbb{K}$ test algebrailag zárt, $\{\lambda \in \mathbb{K} :\ \det(\lambda - A) = 0\} \neq \emptyset$. Az alfejezet elején levő Megjegyzés szerint $\ker(B^n) = \ker(B^{n+1}) = \cdots$. Vagyis

$$V = U_1 \oplus V_1 \ , \qquad \text{ahol } \ U_1 := \ker(B^n) \ , \ \ V_1 := \mathrm{ran}(B^n)$$

és $B(U_1) \subset U_1$, $B(V_1) \subset V_1$ a Lemma alapján. Másrészt $A = B + \lambda_1$, így

$$A : U_1 \to U_1 \ , \ V_1 \to V_1 \ .$$

Mivel pedig λ_1 sajátértéke B-nek, $\ker(B) \neq \{0\}$, azaz $\dim(U_1) \neq 0$ és $\dim(V_1) < n$. Tehát az indukciós feltevést alkalmazhatjuk az $A_1 := A|V_1$ operátorra, ahonnan

$$\begin{aligned}
&\exists\, m \quad \exists\, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \\
&V = U_1 \oplus V_1 = U_1 \oplus (U_2 \oplus \cdots \oplus U_m) \ , \\
&AU_k = A_1 U_k \subset U_k \ , \ \ (A - \lambda_k)^n U_k = \{0\} \qquad (k = 2, \ldots, m) \ .
\end{aligned}$$

Definíció. Az $\alpha_k \in \mathrm{Mat}(m_k, n_k, \mathbb{K})$ $(k = 1, \ldots, N)$ mátrixok **direkt összeg**e az

$$\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_N := \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_N \end{pmatrix}$$

$(m_1 + \cdots + m_N) \times (n_1 + \cdots + n_N)$-es mátrix.

Példa. $(1\ 2) \oplus \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{smallmatrix}\right) \oplus (7) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & & & \\ & & 3 & 4 & \\ & & 5 & 6 & \\ & & & & 7 \end{pmatrix} ,$$

ahol szokásosan az üres helyeken 0-k állnak.

Tétel. Jordan normálforma) *Legyen $A \in \mathcal{L}(V)$, $\dim(V) = n$. Ekkor talaálható olyan E rendezett bázisa a V térnek, amely szerint az A operátor mátrixa*

$$E'AE = J(n_1, \zeta_1) \oplus \cdots \oplus J(n_M, \zeta_M)$$

alakú alkalmas $n_1, \ldots, n_M$ rendű ($n_1 + \cdots + n_M = n$) és $\alpha_1, \ldots, \alpha_M \in \mathbb{K}$ sajátértékű Jordan blokkokkal.

Bizonyítás. Legyenek $U_1, \ldots, U_m$ a Propozícióban megkonstruált alterek, és legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ azok a sajátértékek, amelyekkel

$$B_k^n = 0 \ , \quad \text{ahol} \ \ B_k := A - \lambda_k | U_k \in \mathcal{L}(U_k) \qquad (k = 1, \ldots, m) \ .$$

Tudjuk: mindegyik U_k altérben van olyan F_k rendezett bázis, amelyben

$$F_k' B F_k = \begin{pmatrix} J(d_1^{(k)}, 0) & & \\ & \ddots & \\ & & J(d_{\nu_k}^{(k)}, 0) \end{pmatrix} = J(d_1^{(k)}, 0) \oplus \cdots \oplus J(d_{\nu_k}^{(k)}, 0) \ .$$

Ekkor az $\ell \times \ell$-es egységmátrixot $\mathbf{1}_\ell$-lel jelölve,

$$\begin{aligned} F_k'(A|U_k)F_k &= F_k'(B + \lambda_k \,\mathrm{id}_{U_k})F_k = F_k' B F_k + \lambda_k F_k' \mathrm{id}_{U_k} F_k = \\ &= \left[J(d_1^{(k)}, 0) \oplus \cdots \oplus J(d_{\nu_k}^{(k)}, 0)\right] + \lambda_k \cdot \left[\mathbf{1}_{d_1^{(k)}} \oplus \cdots \mathbf{1}_{d_{\nu_k}^{(k)}}\right] = \\ &= [J(d_1^{(k)}, 0) + \lambda_k \mathbf{1}_{d_1^{(k)}}] \oplus \cdots \oplus [J(d_{\nu_k}^{(k)}, 0) + \lambda_k \mathbf{1}_{d_{\nu_k}^{(k)}}] = \\ &= J(d_1^{(k)}, \lambda_k) \oplus \cdots \oplus J(d_{\nu_k}^{(k)}, \lambda_k) \ . \end{aligned}$$

Az $F_1, \ldots, F_m$ rendszerek egymás után tételéből kapott $E := (F_1, \ldots, F_m)$ rendszer rendezett bázisa a $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ térnek. Ebben tehát

$$E'AE = F_1'(A|U_1)F_1 \oplus \cdots \oplus F_m'(A|U_m)F_m = J(d_1^{(1)}, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(d_{\nu_k}^{(k)}, \lambda_k) \ .$$

Következmény. *Ha $\alpha \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K})$ egy négyzetes mátrix, létezik olyan invertálható $\sigma \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K})$, amellyel a $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ mátrix Jordan blokkok direkt összege.*

Következmény. *Az $A \in \mathcal{L}(V)$ operátor hasonló a duálisához, azaz $A' = SAS^{-1}$ valamely lineáris $S : V \leftrightarrow V'$ leképezés mellett.*

Bizonyítás. Alkalmas E rendszerrel az $\alpha := E'AE$ mátrix Jordan blokkok direkt összege. Ekkor $E''A'E' = \alpha'$ az előbbi Jordan blokkok transzponáltjainak a direkt összege. Így elég csak kimutatni, hogy egy Jordan blokk hasonló a transzponáltjához. Ez azonnal adódik a következő észrevételből.

Lemma. *Tetszőleges n és λ mellett, a mellékátlóban 1-eseket tartalmazó $\varepsilon := \big(\delta_{i,n-j}\big)_{i,j=1}^{n}$ mátrixszal*

$$\varepsilon J(n, \lambda)\varepsilon = \varepsilon J(n, \lambda)\varepsilon^{-1} = J(n, \lambda)' .$$

Cayley-Hamilton tétel

Lemma. *Ha $n_1, \dots, n_N > 0$ és $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$,*

$$\det\big(J(n_1, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(n_N, \lambda_N)\big) = \lambda_1^{n_1} \cdots \lambda_N^{n_N} .$$

Bizonyítás. Mivel a Jordan blokkok alsó-trianguláris mátrixok, ilyenek direkt összege is alsó-trianguláris. Tudjuk: trianguláris mátrix determinánsa a főátlóbeli elemei szorzata. A $J(n_1, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(n_N, \lambda_N)$ mátrix főátlójának elemei

$$\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{\lambda_N, \dots, \lambda_N}_{n_N} .$$

Következmény. *Az $\alpha := J(n_1, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(n_N, \lambda_N)$ mátrix karakterisztikus polinomja*

$$\det(\lambda\mathbf{1} - \alpha) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_N)^{n_N} .$$

Tétel. (Cayley-Hamilton) *Egy operátort a karakterisztikus polinomjába helyettesítve a zéró-operátort kapjuk. Azaz, $A \in \mathcal{L}(V)$, $n = \dim(V)$ esetén*

$$\sum_{m=0}^{n} \mu_m A^m = 0 \ , \quad \text{ahol} \quad \det(\lambda \mathrm{id}_V - A) = \sum_{m=0}^{n} \mu_m \lambda^m \quad (\lambda \in \mathbb{K}) \ .$$

Bizonyítás. Válasszunk egy olyan E rendezett bázist V-ben, amely szerint A mátrixa Jordan blokkok direkt összege:

$$\alpha := E'AE = J(n_1, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(n_N, \lambda_N) \ .$$

Legyen $\tau_1, \ldots, \tau_n$ az α mátrix főátlóbeli elemeinek a felsorolása. Ezzel A karakterisztikus polinomja

$$\det(\lambda \mathrm{id}_V - A) = \prod_{k=1}^{N} (\lambda - \lambda_k)^{n_k} = \prod_{\ell=1}^{n} (\lambda - \tau_\ell) = \sum_{m=0}^{n} \mu_m \lambda_m \ ,$$
$$\text{ahol} \quad \mu_m = (-1)^{n-m} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_\ell \le n-m} \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{n-m}} \ .$$

Észrevétel: A szorzat kifejtésekor

$$\prod_{k=1}^{N} (\alpha - \lambda_k \mathbf{1})^{n_k} = \prod_{\ell=1}^{n} (\alpha - \tau_\ell \mathbf{1}) = \sum_{m=0}^{n} \mu_m \alpha^m \ .$$

Tehát

$$E' [\sum_{m=0}^{n} \mu_m A^m] E = \sum_{m=0}^{n} \mu_m \alpha^m = \prod_{k=1}^{N} (\alpha - \lambda_k \mathbf{1})^{n_k} \ .$$

Csakhogy itt

$$\prod_{k=1}^{N} (\alpha - \lambda_k \mathbf{1})^{n_k} = [\prod_{k=1}^{N} J(n_1, \lambda_1 - \lambda_k)^{n_k}] \oplus \cdots \oplus [\prod_{k=1}^{N} J(n_N, \lambda_N - \lambda_k)^{n_N}] =$$
$$= 0 \oplus \cdots \oplus 0 \ ,$$

mivel tetszőleges $j \in \{1, \ldots, n\}$ indexnél

$$J(n_j, 0)^{n_j} = 0 \ , \Rightarrow \quad \prod_{k=1}^{N} J(n_j, \lambda_j - \lambda_k)^{n_j} = 0 \ .$$

Gyakorlat. Ha $\alpha_k \in \mathrm{Mat}(n_k, n_k, \mathbb{K})$ $(k = 1, \ldots, N)$ négyzetes mátrixok, $\det(\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_N) = \prod_{k=1}^{N} \det(\alpha_k)$.

ASSZOCIATÍV ALGEBRÁK

Asszociatív algebrák, reprezentációik

Általában is, **algebra** alatt olyan vektorteret értünk, amely el van látva egy kétváltozós művelettel, amely kompatibilis a vektorműveletekkel. Ebben a fejezetben a klasszikus lineáris algebrával kapcsolatos tulajdonságait tárgyaljuk az **asszociatív algebrák**nak.

Definíció. Tehát az $\mathcal{A}, \bullet$ struktúra **asszociatív algebra**, ha

$\mathcal{A}$ vektortér (egy $\mathbb{K}$ test fölött a szokásosan jelölt $+$ összeadással és a vektorok skalárokkal való szorzásával),

$$\begin{aligned} \bullet\ &: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \\ &(a, b) \mapsto a \bullet b \end{aligned}$$

kétváltozós művelet, amelyre minden $a, b, c \in \mathcal{A}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ mellett

$$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c\ , \qquad \text{(disztributivitás)}$$
$$(\lambda a) \bullet b = a \bullet (\lambda b) \qquad \text{(homogenitás)}$$
$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)\ . \qquad \text{(asszociativitás)}$$

Az alstruktúrák általános fogalmának megfelelően az $\mathcal{A}, \bullet$ algebrában a $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ halmaz **részalgebra**, jelölésben $\mathcal{B}\,\text{alg.} \subset \mathcal{A}$, ha $\mathcal{B}$-ből nem vezetnek ki a műveletek. Ha $\mathcal{A}, \mathcal{Z}$ két algebra, a $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{Z}$ leképezés **algebra-homomorfizmus**, ha művelettartó, azaz ha $\phi(\lambda a) = \lambda\Phi(a)$, $\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$, $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ $(a, b \in \mathcal{A}\,,\ \lambda \in \mathbb{K})$. A Φ algebra-homomorfizmus **izomorfizmus** $\mathcal{A}$ és $\mathcal{Z}$ között, ha $\Phi : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{Z}$.

Megjegyzés. Ha $\mathcal{B}\,\text{alg.} \subset \mathcal{A}$, akkor $\mathcal{B}$ altér$\mathcal{A}$-ban a vektorműveletekre nézve, és az $\mathcal{A}$-beli $\bullet : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ szorzás $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$-re való $\bullet_{\mathcal{B}}$ megszorítottjával a $\mathcal{B}, \bullet_{\mathcal{B}}$ struktúra asszociatív algebra.

Konvenció: A terminológia egyszerűsítése végett, ahogy az sok műben szokásos, a továbbiakban *asszociatív algebra helyett algebra* a használatos kifejezés röviden.

Ha a félreértés veszélye nem áll fönn, a körülményes $\mathcal{A},\bullet$ típusú jelölés helyett a műveleti jel nélküli $\mathcal{A}$-t írjuk egy (asszociatív) algebra esetén. (Maga az $\mathcal{A},\bullet$ jelölés is ilyen rövidítés: eltekint a vektorműveletekre és a hozzájuk tartozó $\mathbb{K}$ alaptestre való utalástól.) Hasonlóan, mint a skalárral való szorzásnál, a $\bullet$ műveleti jelet általában elhagyjuk. Magát a $\bullet$ műveletet az $\mathcal{A}$-beli **szorzás**nak fogjuk nevezni.

Megjegyzés. A $\bullet$ művelet disztributivitása és homogenitása nem más, mint az a tény, hogy $\bullet$ egy 2-lineáris $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ leképezés. A $\bullet$ művelet asszociatív, disztributív, de NEM FELTÉTLENÜL KOMMUTATÍV.

Emlékeztető. Egy V vektortérnél $\mathcal{L}(V) := \{\text{lineáris } V\to V \text{ leképezések}\}$.

Tudjuk: 1) $\mathcal{L}(V),\circ$ (operátor összetétel) algebra

2) Ha $\dim V = n (<\infty)$ és $E := (e_1,\dots,e_n)$ rendezett bázis V-ben, akkor az operátorokhoz az E-szerinti mátrixukat hozzárendelő R leképezésre

$$R : A \mapsto E'AE \qquad \textbf{izomorfizmus} \qquad \mathcal{L}(V) \leftrightarrow \mathrm{Mat}(n,\mathbb{K}) \ ,$$

ahol $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{K}) := \{n\times n\text{-es } \mathbb{K} \text{ fölötti mátrixok}\}$ ellátva a szokásos mátrix szorzással. Ugyanis

$$R(A)R(B) = (E'AE)(E'BE) = E'(AB)E = R(AB) \qquad (A,B\in\mathcal{L}(V)) \ .$$

Definíció. Az $\mathcal{A},\bullet$ algebrában az $a\in\mathcal{A}$ elem **bal-** ill. **jobb reprezentáció**i az

$$L_a : \mathcal{A}\ni x\mapsto ax \quad , \qquad R_a : \mathcal{A}\ni x\mapsto xa$$

operátorok. Az $\mathcal{A}$ algebra bal- ill. jobb-reprezentációja

$$L_{\mathcal{A}} := \{L_a :\ a\in\mathcal{A}\} \quad , \qquad R_{\mathcal{A}} := \{R_a :\ a\in\mathcal{A}\} \ .$$

Megjegyzés. $L_a, R_a \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \quad (a\in\mathcal{A})$.

Tétel. 1) *$L_{\mathcal{A}}$ részalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{A})$-ban.*
2) *Az $[a\mapsto L_a]$ megfeleltetés $\mathcal{A}\to L_{\mathcal{A}}$ homomorfizmus.*

Bizonyítás. Ha $a,b\in\mathcal{A}$ tetszőlegesen rögzítettek, akkor minden $x\in\mathcal{A}$ és $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ mellett

$$L_aL_b(x) = abx = L_{ab}(x)$$
$$L_{\alpha a+\beta b}(x) = (\alpha a+\beta b)x = \alpha(ax)+\beta(bx) = \alpha L_a(x)+\beta L_b(x) \ .$$

Azaz az $a\mapsto L_a$ leképezés lineáris $\mathcal{A}\to L_{\mathcal{A}}$.

Következmény. *$[a \mapsto L_a]$ izomorfizmus $\Leftrightarrow$ $\forall\, a\in\mathcal{A}$ $\;a\neq 0 \Rightarrow \exists\, x \in \mathcal{A}$ $\;ax\neq 0$.*

BIZONYÍTÁS. Egy lineáris leképezés pontosan akkor kölcsönösen egyértelmű, ha nemzéró elemeket nem-zérókba visz. Ugyanakkor $L_a\neq 0 \;\Leftrightarrow\; \exists\, x\in\mathcal{A}\;\; ax\neq 0$.

Definíció. $\mathcal{Z}_L(\mathcal{A}) := \{z \in \mathcal{A} :\; za = 0 \;\; (a \in \mathcal{A})\}$ az $\mathcal{A}$ algebra **bal-zérói**. Mivel

$$L_a\big(b + \mathcal{Z}_L(\mathcal{A})\big) = ab \qquad (a, b \in \mathcal{A})\ ,$$

a Tételből azonnal adódik az alábbi.

Következmény. *Az $\mathcal{A}/\mathcal{Z}_L(\mathcal{A})$ faktor-algebra jól-definiált és izomorf $L_{\mathcal{A}}$-val.*

Definíció. Általában is, ha $\mathcal{A}$ egy algebra és V egy vektortér, a $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(V)$ (lineáris) leképezés $\mathcal{A}$-nak **reprezentációja**, ha algebra-homomorfizmus, azaz ha

$$\Phi(\alpha a+\beta b) = \alpha\Phi(a) + \beta\Phi(b)\ ,\quad \Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b) \qquad \forall\, a, b, \alpha, \beta\,.$$

A $\Psi : \mathcal{A} \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ típusú reprezentációk $\mathcal{A}$ **mátrix-reprezentációi**.
A Φ reprezentáció **hű**, ha injektív (azaz ha $\Phi : \mathcal{A}\leftrightarrow\Phi(\mathcal{A})$ izomorfizmus).

Példa. 1) Az Emlékeztetőbeli R reprezentációja $\mathcal{L}(V)$-nek (tetszőlegesen rögzített E bázis mellett) hű mátrixreprezentáció.

2) Ha V tetszőleges vektortér és $\mathcal{A}(\neq \{0\})$ egy algebra, az $a \mapsto 0$ leképezés reprezentációja $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{L}(V)$-ben, amely azonban nem hű.

Ideálok, faktoralgebra

Definíció. A faktorstruktúrák általános definíciójának megfelelően, ha $\approx$ egy az $\mathcal{A}$ algebra összes műveleteivel kompatibilis ekvivalencia reláció*, akkor az

$$\mathcal{A}^{\approx} := \{a^{\approx} :\; a \in \mathcal{A}\}\ , \quad \text{ahol } \; a^{\approx} := \{x \in \mathcal{A} :\; a \approx x\}$$

alaphalmaz a

$$\lambda a^{\approx} := (\lambda a)^{\approx}\ ,\quad a^{\approx} + b^{\approx} := (a + b)^{\approx}\ ,\quad a^{\approx}b^{\approx} := (ab)^{\approx} \qquad (a, b \in \mathcal{A}\,,\ \lambda \in \mathbb{K})$$

műveletekkel jól-definiált algebra.
Elnevezés: $\mathcal{A}^{\approx}$ az $\mathcal{A}$ algebra $\approx$ szerinti **faktoralgebrá**ja.

---

* Azaz $\alpha a + \beta b \approx \alpha a' + \beta b'$ és $ab \approx a'b'$ valahányszor $a \approx a'$, $b \approx b'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Lemma. *Legyen $\approx$ egy, az $\mathcal{A}$ algebra műveleteivel kompatibilis ekvivalencia. Ekkor az $I := 0^{\approx}$ ekvivalenciaosztály altere $\mathcal{A}$-nak (a $+, \lambda\cdot$ vektorműveletek szerint), és*

$$a^{\approx} = a + I \qquad (a \in \mathcal{A}) \quad \text{azaz} \quad \mathcal{A}^{\approx} = \mathcal{A}/I \ .$$

Bizonyítás. A "Faktortér" alfejezet eredményei alapján azonnal következik abból a tényből, hogy $\approx$ kompatibilis $\mathcal{A}$ vektorműveleteivel.

Kérdés. Mely alterek lehetnek $0^{\approx}$ típusúak?

Definíció. Egy I halmaz **ideál** az $\mathcal{A}$ algebrában, ha

$$I \text{ altér} \subset \mathcal{A} \ \text{ és } \ \mathcal{A}I, I\mathcal{A} \subset I \ .$$

Tétel. *$\mathcal{A}$ faktoralgebrái pontosan az $\mathcal{A}/I$ alakúak, ahol I* ideál$\subset \mathcal{A}$.

Bizonyítás. Legyen $\approx$ egy, az $\mathcal{A}$ műveleteivel kompatibilis ekvivalencia, és $I := 0^{\approx}$. Tudjuk: I altér$\subset \mathcal{A}$. Másrészt $0 = 0 \cdot a = a \cdot 0 \approx xa \approx ax$ valahányszor $x \in I$ (azaz $x \approx 0$) és $a \in \mathcal{A}$. Tehát $xa, ax \in I$ ($a \in \mathcal{A}$, $x \in I$), vagyis $\mathcal{A}I, I\mathcal{A} \subset I$. Tegyük fel, hogy I ideál$\subset \mathcal{A}$. Legyen $a \approx b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a - b \in I$ $(a, b \in \mathcal{A})$. Mivel most feltevés szerint I altér$\subset \mathcal{A}$, az $\approx$ reláció a vektorműveletekkel kompatibilis ekvivalencia, és $\mathcal{A}^{\approx} = \mathcal{A}/I$. Még csak annyit kell belátni, hogy $\approx$ kompatibilis a $\cdot$ szorzással is. Legyen $a \approx a'$, $b \approx b'$. Ekkor $a - a' \approx 0$, $b - b' \approx 0$, ahonnan $a' \in a + I$, $b' \in b + I$, és így

$$a'b' \in (a+I)(b+I) \subset ab + aI + Ib + I^2 \subset ab + I + I + I = ab + I \ , \Rightarrow a'b' \approx ab \ .$$

Tétel. *Ha $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ algebra-homomorfizmus, akkor*

$$\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \ , \ \ker \Phi \text{ ideál} \subset \mathcal{A} \ , \ \operatorname{ran} \Phi \text{ alg.} \subset \mathcal{B} \ \text{ és } \ \mathcal{A}/\ker \Phi \simeq \operatorname{ran} \Phi \ .$$

Bizonyítás. Az, hogy Φ tartja a vektorműveleteket, a linearitását jelenti. Vagyis az $I := \Phi^{-1}\{0\}$ halmaz nem más, mint a $\ker \Phi$ altér $\mathcal{A}$-ban. Így elegendő látni, hogy $\mathcal{A}I, I\mathcal{A} \subset I$. Ha $a \in \mathcal{A}$ és $x \in I$, akkor $\Phi(ax) = \Phi(a)\Phi(x) = \Phi(a) \cdot 0 = 0$, és hasonlóan $\Phi(xa) = 0$.

Megjegyzés. Ha I ideál$\subset \mathcal{A}$, akkor az $a \mapsto a + I$ leképezés egy olyan $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$ algebra-homomorfizmus, amelynek magja $\ker \Phi = I$. Tehát minden ideál magja is valamilyen algebra-homomorfizmusnak.

Példa. 1) Ha $X \neq \emptyset$ és $\mathcal{A}$ alg.$\subset$ $\{X \to \mathbb{K}$ függvények$\}$ (a pontonkénti $+, \cdot$ műveletekkel), akkor tetszőleges $x \in X$ pontnál $I_x := \{f \in \mathcal{A} : \ f(x) = 0\}$ ideál$\subset$ $\mathcal{A}$. Itt I_x az $f \mapsto f(x)$ homomorfizmus ($\mathcal{A} \to \mathbb{K}$) magja.

2) Ha az $\mathcal{A}$ algebra kommutatív (azaz $ab = ba$ $a, b \in \mathcal{A}$), akkor tetszőlegesen rögzített $c \in \mathcal{A}$ mellett $c\mathcal{A}(:= \{ca : \ a \in \mathcal{A}\})$ ideál$\subset$ $\mathcal{A}$.

3) Ha $\dim V < \infty$, az $\mathcal{L}(V)$ operátor-algebrának csak két ideálja van: önmaga és $\{0\}$.

Gyakorlat. 1) I_1, I_2 ideál$\subset$ $\mathcal{A}$, $\Rightarrow I_1 + I_2$ ideál$\subset$ $\mathcal{A}$.

2) $\mathcal{I} \subset \{\mathcal{A}$ ideáljai$\}$, $\Rightarrow \bigcap \mathcal{I}$ ideál$\subset$ $\mathcal{A}$.

3) Ha $\operatorname{Span}(I \cdot I) \subset I$, akkor I ideál$\subset$ J ideál$\subset$ $\mathcal{A}$, $\Rightarrow I$ ideál$\subset$ $\mathcal{A}$.

Egységelem, inverz

Ettől kezdve, a fejezet végéig $\mathcal{A}$ egy (tetszőlegesen rögzített) algebrát jelöl.

Definíció. Az $e \in \mathcal{A}$ elem **egység**elem $\mathcal{A}$-ban, ha $ea = ae = a$ $(a \in \mathcal{A})$.

Lemma. *Egységelemes algebra bal- és jobb-reprezentációja hű.*

Bizonyítás. Ha e egység$\in \mathcal{A}$, akkor triviálisan $L_a(e) = R_a(e) = a \neq 0$ valahányszor $0 \neq a \in \mathcal{A}$.

Lemma. *Legfeljebb egy egység van $\mathcal{A}$-ban.*

Bizonyítás. Ha e, e' egység $\in \mathcal{A}$, akkor $ee' = L_e(e') = e' = R_{e'}(e) = e$.

Megjegyzés. Egy V vektortér esetén $\mathcal{L}(V)$ egységeleme id_V.

Tétel. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$-ban nincs egység. Ekkor is belefoglalható $\mathcal{A}$ egy őt részalgebraként tartalmazó egységelemes $\overline{\mathcal{A}}$ algebrába.*

Bizonyítás. Heurisztika: Ha van ilyen $\overline{\mathcal{A}}$ algebra e egységelemmel, benne

$$(a + \alpha e) \cdot (b + \beta e) = \underbrace{ab + \alpha b + \beta a}_{\in \mathcal{A}} + \underbrace{\alpha B \cdot e}_{\in \mathbb{K}e}$$

valahányszor $a, b \in \mathcal{A}$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Ennek alapján legyen $\mathcal{A} \times \mathbb{K}$ fölött

$$(a, \alpha) \cdot (b, \beta) := (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta) \qquad \big((a, \alpha), (b, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathbb{K}\big) .$$

Ezzel a művelettel $\mathcal{A} \times \mathbb{K}$ algebra, sőt az $a \mapsto (a, 0)$ leképezés $\mathcal{A} \leftrightarrow A \times \{0\}$ izomorfia, és $(0, 1)$ egység $\in \mathcal{A} \times \mathbb{K}$. Tehát azonosítva az $(a, 0)$ elemet $a \in \mathcal{A}$-val, azaz bevezetve az

$$I(a,\alpha) := \begin{cases} a & \text{ha } \alpha = 0 \\ (a,\alpha) & (\alpha \neq 0) \end{cases}$$

leképezést, megfelelő választás

$$\overline{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \{(a,\alpha) : \ a \in \mathcal{A}\,,\ 0 \neq \alpha \in \mathbb{K}\}$$
$$[I(a,\alpha)] \bullet [I(b,\beta)] := I(ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta) \qquad (a, b \in \mathcal{A}\,,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K})\ .$$

Lemma. *Ha* e egység $\in \mathcal{A}$ *és* $a \in \mathcal{A}$, *akkor a* $\{b \in \mathcal{A} : \ ab = ba = e\}$ *halmaz legfeljebb* 1*-elemű.*

Bizonyítás. Legyen b, b' két, a halmazhoz tartozó elem. Ekkor

$$ab = ba = e = ab' = b'a\ ,\ \Rightarrow$$
$$ab - ab' = 0\ ,\ \Rightarrow\ a(b - b') = 0\ ,\ \Rightarrow\ \underbrace{ba}_{e}(b - b') = 0\ ,\ \Rightarrow\ b - b' = 0\ .$$

Definíció. Az e egységelemes $\mathcal{A}$ algebrában az $a \in \mathcal{A}$ elem **invertálható**, ha $\exists\, b \in \mathcal{A}\ \ ab = ba = e$. Egy invertálható $a \in \mathcal{A}$ elem **inverz**e

$$a^{-1} := [b \in \mathcal{A} : \ ab = ba = e]\ .$$

Propozíció. *Legyen* V *egy vektortér,* $\mathcal{A}$ *pedig olyan részalgebrája* $\mathcal{L}(V)$*-nek, amelyre* $\mathrm{id}_V \in \mathcal{A}$. *Ha* a invertálható $\in \mathcal{A}$, *akkor*

1) $a : V \leftrightarrow V$, 2) $a^{-1} = [av \mapsto v : \ v \in V]$.

Bizonyítás. Az 1) $\Rightarrow$ 2) implikáció triviális.
1) Belátandó: a) $\mathrm{ran}(a) = V$, b) $\ker(a) = \{0\}$.
a) $V = \mathrm{id}_V(V) = aa^{-1}(V) = aV = \mathrm{ran}(V)$.
b) $v \in \ker(a)$, $\Leftrightarrow$ $a(v) = 0$, $\Leftrightarrow$ $v = a^{-1}a(v) = 0$.

Megjegyzés. A Propozícióbeli 1) tulajdonság nem más, mint az a operátor invertálhatósága $\mathcal{L}(V)$-ben. A fordítottja ennek nem igaz általában. Egy $\mathcal{L}(V)$-ben inverálható $a \in \mathcal{A}$ operátor nem biztos, hogy $\mathcal{A}$-ban is invertálható!

Példa. Legyen $V := \{\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények$\}$ és legyen $M_f := [V \ni g \mapsto fg]$ $(f \in V)$. Ekkor az M_f operátor pontosan akkor invertálható $\mathcal{L}(V)$-ben, ha az f függvény sehol sem tűnik el, és ekkor $(M_f)^{-1} = M_{1/f}$. Az $\mathcal{A} := \{M_p : \ p$ polinom$\}$ operátorcsalád részalgebrája $\mathcal{L}(V)$-nek. Az $a := M_{1+x^2}$ operátor $\mathcal{A}$-ba tartozik, és invertálható $\mathcal{L}(V)$-ben, hiszen $1 + x^2 > 0$. Csakhogy a nem lehet invertálható $\mathcal{A}$-ban, hiszen az $1/(1 + x^2)$ függvény nem polinom.

Felcserélhetőség

Definíció. Az $a, b \in \mathcal{A}$ elemek **felcserélhető**k (az $\mathcal{A}$ algebrában), ha $ab = ba$.

Teljes indukciókkal azonnal adódnak a következő azonosságok.

Lemma. *Ha az $a, b \in \mathcal{A}$ elemek felcserélhetők, akkor*

$$a^{k_1}b^{\ell_1}\cdots a^{k_n}b^{\ell_n} = a^{k_1+\cdots+k_n}b^{\ell_1+\cdots+\ell_n} = b^{\ell_1+\cdots+\ell_n}a^{k_1+\cdots+k_n}$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

tetszőleges $n, k_1, \ell_1, \ldots, k_n, \ell_n \geq 0$ mellett. Sőt, az első azonosságban $k_1, \ldots, k_n < 0$ ill. $\ell_1, \ldots, \ell_n < 0$ is lehet, ha a ill. b invertálható.

Lemma. *Legyenek $a, b \in \mathcal{A}$ felcserélhető elemek. Ekkor ab invertálható$\in \mathcal{A} \iff a, b$ invertálható$\in \mathcal{A}$.*

Bizonyítás. Ha a, b invertálható$\in \mathcal{A}$, akkor $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = (b^{-1}a^{-1})(ab) = 1$.

Tegyük fel, hogy ab invertálható$\in \mathcal{A}$. Tudjuk: ekkor $L_{ab} = L_aL_b = L_bL_a : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{A}$. Megmutatjuk, hogy most $L_a : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{A}$ (azaz a invertálható$\in \mathcal{A}$).

Bizonyítás. : $\ker L_a = \{0\}$, mivel $L_ax = 0$ esetén csak $x = (L_bL_a)^{-1}L_bL_ax = 0$ lehet. Másrészt $\operatorname{ran} L_a = \mathcal{A}$, ugyanis $\operatorname{ran} L_a \supset L_a(L_b\mathcal{A}) = (L_aL_b)\mathcal{A} = \mathcal{A}$. A b elem invertáhatósága a gondolatmenetben $a \leftrightarrow b$ cserével bizonyítható.

Következmény. *Egy (akárhány tényezős) kommutatív szorzat pontosan akkor invertálható $\mathcal{A}$-ban, ha mindegyik tényezője invertálható.*

Propozíció. *Legyen V egy vektortér és $A, B \in \mathcal{L}(V)$ felcserélhető operátorok. Ekkor B az A operátor sajátaltereit sajátalterekbe viszi. Azaz*

$$A(BU) \subset BU \qquad (AU \subset U \text{ altér} \subset V)\ .$$

Sőt tetszőleges $\lambda \in \mathbb{K}$ mellett

$$B\{v:\ Av = \lambda v\} \subset \{v:\ Av = \lambda v\}\ .$$

Bizonyítás. Ha U sajátaltere A-nak, $AU \subset U, \Rightarrow A(BU) = B(AU) \subset BU$. Így, ha $U := \{v \in V:\ Av = \lambda v\}$ és $u \in U$, akkor $\lambda Bu = B(\lambda u) = BAu = A(Bu)$.

Definíció. Egy V vektortér $A \in \mathcal{L}(V)$ operátora **diagonális**, ha a sajátvektorai kifeszítik a teret, azaz $\mathrm{Span}\{v \in V : \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \quad Av = \lambda v\} = V$.

> Tétel. *Legyen V egy vektortér, $\{A_i : \ i = 1, \dots, n\} \subset \mathcal{L}(V)$ egy diagonális operátorokból álló kommutatív család ($A_iA_j = A_jA_i$ $(i, j = 1, \dots, n)$). Ekkor létezik olyan E bázis a V térben, amely az A_i $(i = 1, \dots, n)$ operátorok közös sajátvektoraiból áll.*

Bizonyítás. Legyen

$$U(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \{v \in V : \ A_1v = \lambda_1 v, \dots, A_nv = \lambda_n v\} \qquad (\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}) \ .$$

Állítás: $V = \mathrm{Span} \bigcup_{\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}} U(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Bizonyítás. : Indukció n szerint. Az $n = 1$ eset az épp az A_1 operátor diagonalitása.

Tegyük fel, hogy $n - 1$ operátorra beláttuk az állítást. Észrevétel: a Propozíció szerint, tetszőlegesen rögzített $\lambda \in \mathbb{K}$ mellett

$$A_1, \dots, A_n : V(\lambda) \to V(\lambda) \qquad \text{ahol} \quad V(\lambda) := \{v : \ A_nv = \lambda v\} \ .$$

Az indukciós feltevést tehát alkalmazhatjuk az $\{A_i|V(\lambda) \ : \ i = 1, \dots, n-1\}$ operátor-családra minden rögzített $\lambda \in \mathbb{K}$ mellett. Innen

$$\begin{aligned}
V &= \mathrm{Span} \bigcup_{\lambda \in \mathbb{K}} V(\lambda) = \\
&= \mathrm{Span} \bigcup_{\lambda \in \mathbb{K}} \mathrm{Span} \bigcup_{\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1} \in \mathbb{K}} \{v \in V(\lambda) : \ A_1v = \lambda_1 v, \dots, A_{n-1}v = \lambda_{n-1}v\} = \\
&= \mathrm{Span} \bigcup_{\lambda,\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}} V(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda) \ ,
\end{aligned}$$

ami bizonyítja az állítást.

Vegyünk mindegyik olyan $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ altérből, amelyik nem csak egyedül a 0 vektorból áll, egy $E(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ bázist. Az Állítás alapján az

$$E := \bigcup \big\{E(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \ \dim V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) > 0\big\}$$

vektorrendszerre $\mathrm{Span}(E) = V$. Csak E lineárisan függetlenségét kell még belátnunk. Ez pedig azonnal következik az alábbi, önmagában is érdekes lemmából.

> Lemma. *Legyen $\{A_i : \ i \in I\} \subset \mathcal{L}(V)$ operátorok egy családja és az minden $\omega : I \to \mathbb{K}$ függvényhez legyen $U(\omega) := \{v \in V : \ A_iv = \omega(i)v \quad (i \in I)\}$. Ekkor páronként különböző $U(\omega_1), \dots, U(\omega_m)$ alterekből vett $u_1, \dots, u_m \neq 0$ vektorok mindig lineárisan függetlenek.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben az $(u_1,\dots,u_n)$ rendszer lineárisan függő. Legyen ekkor $(u_{k_1},\dots,u_{k_m})$ egy legkisebb lineárisan függő része $(u_1,\dots,u_n)$-nek. Az általánosság megszorítása nélkül vehető $k_1=1,\dots,k_m=m$. Mivel $u_k\neq 0$ mindegyik k indexre, $m>1$. Másrészt m definíciója szerint

$$\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_mu_m=0 \qquad \exists\,\alpha_1,\dots,\alpha_m\neq 0\ .$$

Ekkor mindegyik $i\in I$ indexre

$$0=A_i(\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_mu_m)=\alpha_1\omega_1(i)u_1+\cdots+\alpha_m\omega_m(i)u_m\ .$$

Mivel $\omega_1\neq\omega_m$, van olyan $i\in I$, amelyre $\omega_1(i)\neq\omega_m(i)$. Vehető $\omega_m(i)\neq 0$. Most

$$\begin{aligned}0&=(\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_mu_m)-\frac{1}{\omega_m(i)}(\alpha_1\omega_1(i)u_1+\cdots+\alpha_m\omega_m(i)u_m)=\\&=\alpha_1'u_1+\cdots+\alpha_{m-1}'u_{m-1}\ ,\end{aligned}$$

ahol $\alpha_k':=\alpha_k\big(1-\omega_k(i)/\omega_m(i)\big)$ $(k=1,\dots,m-1)$. Mivel $\alpha_1'\neq 0$, az $(u_1,\dots,u_{m-1})$ rendszer lineárisan függő, ellentmondásban m definíciójával.

Megjegyzés. Végtelen sok operátorra általában nem igaz a Tétel állítása.

Példa. Az $\mathcal{A}:=\big\{\text{véges értékkészletű } \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ fgv-ek}\big\}$ függvény-algebra (a szokásos összeadással és szorzással) szorzás-reprezentációja felcserélhető diagonalizálható operátorokból áll. Ezek közös sajátvektorai az egyetlen ponton kívül eltűnő függvények. Belőlük nem választható ki $\mathcal{A}$-nak bázisa.

Polinom-kalkulus

Ettől kezdve feltesszük, hogy az $\mathcal{A}$ algebra egységelemes. $\mathcal{A}$ egységelemét (hamarosan kiderülő célszerűsége miatt) a félreértés veszélye nélkül 1-gyel jelöljük, ugyanazzal a szimbólummal, mint a $\mathbb{K}$ alaptest multiplikatív egységelemét. Sőt, általában is, $\lambda\in\mathbb{K}$-ra λ-t írunk az $\mathcal{A}$-beli egységelem λ-szorosát jelölendő.

Emlékeztető. Egy $p:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ függvény **polinom-függvény**, ha

$$\exists\,\alpha_0,\dots,\alpha_N\in\mathbb{K} \qquad p:\zeta\mapsto\sum_{k=0}^{N}\alpha_k\zeta^k\ .$$

Tudjuk: $p:\zeta\mapsto\sum_{k=0}^{N_1}\alpha_k\zeta^k$, $q:\zeta\mapsto\sum_{\ell=0}^{N_2}\beta_\ell\zeta^\ell$ esetén

$$\lambda p+\mu q:\zeta\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda\alpha_n+\mu\beta_n)\zeta^n\ ,\quad pq:\zeta\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k+\ell=n}\alpha_k\beta_\ell\Big)\zeta^n\ ,$$

ahol $\alpha_{N_1+1},\alpha_{N_1+2},\ldots:=0$ és $\beta_{N_2+1},\beta_{N_2+2},\ldots:=0$.

Megjegyzés. Általában (ha $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$) egy polinom-függvény nem határozza meg egyértelműen az együtthatóit.

Példa. $\mathbb{K} := \{0,1\}$ fölött $\zeta \mapsto \zeta(1-\zeta) = \zeta - \zeta^2 \equiv 0$.

A polinom-függvények helyett célszerűbb az alábbi formális polinomokat használni.

Definíció. Egy $\mathbb{K}$ test fölötti **polinom** egy formális $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathbf{z}^k$ alakú kifejezés, ahol $\mathbf{z}$ egy **változó-szimbólum**, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \in \mathbb{K}$ és $\exists\, N$ $\alpha_{N+1} = \alpha_{N+2} = \cdots = 0$. A $p(\mathbf{z}) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathbf{z}^k$ és $q(\mathbf{z}) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_\ell \mathbf{z}^\ell$ polinomok közti műveletek

$$[\lambda p + \mu q](\mathbf{z}) := \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \alpha_n + \mu \beta_n) \mathbf{z}^n \ , \quad [pq](\mathbf{z}) := \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k+\ell=n} \alpha_k \beta_\ell \Big) \mathbf{z}^n \ .$$

A p polinom **fokszám**a $\deg(p) := \min\{n : \ \alpha_n = 0\} - 1$. Jelölés:

$$\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}} := \{\mathbb{K}\text{-fölötti polinomok}\} \ , \quad \mathrm{Pol}_{n,\mathbb{K}} := \{p \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}} : \ \deg(p) \leq n\} \ .$$

Megjegyzés. Abban a matematikai felfogásban, amely csak halmazokat (és függvényeket) enged definiálni, szokásosan

$$\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}} \equiv \{(\alpha_0, \alpha_1, \ldots) : \ \alpha_0, \alpha_1, \ldots \in \mathbb{K}\}$$

ellátva a $\lambda(\alpha_0, \ldots) + \mu(\beta_0, \ldots) := (\lambda\alpha_0 + \mu\beta_0, \ldots)$ ill. $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)(\beta_0, \beta_1, \ldots) := \big(\sum_{k+\ell=n} \alpha_k \beta_\ell : \ n = 0, 1, \ldots\big)$ műveletekkel.

Direkt számolással adódik az alábbi alaptény.

Tétel. $\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}$ *algebra a bevezetett formális lineáris kombinációkkal és szorzással.*

Definíció. Mindegyik $p \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}$, $p(\mathbf{z}) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathbf{z}^k$ polinom és $a \in \mathcal{A}$ mellett értelmezzük az a elem

$$p(a) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k a^k$$

polinomját. A $\mathbb{K}$ fölötti a**-polinomok** családja

$$\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}(a) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Pol}_{n,\mathbb{K}}(a) \ , \quad \text{ahol} \quad \mathrm{Pol}_{n,\mathbb{K}}(a) := \{p(a) : \ p \in \mathrm{Pol}_{n,\mathbb{K}}(a)\} \ .$$

Konvenció: A $\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}$ ill.$\mathrm{Pol}_{n,\mathbb{K}}$ jelölés helyett a rövidebb Pol ill.Pol_n-et fogjuk használni, ha az alaptest a kontextusból egyértelmű.

Tétel. *Minden rögzített $a \in \mathcal{A}$ mellett $\Phi : p \mapsto p(a)$ az az egyedüli $\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}} \to \mathcal{A}$ algebra-homomorfizmus, amelyre*

$$\Phi(\mathbf{z}^k) = a^k \qquad (k = 0, 1, \dots) .$$

BIZONYÍTÁS. A $\Phi(\mathbf{z}^k) = a^k$ $(k = 0, 1, \dots)$ követelmény a $\Phi : \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}} \to \mathcal{A}$ leképezés linearitása folytán maga után vonja, hogy

$$\Phi\big(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathbf{z}^k\big) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot a^k \qquad (n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_0, \dots, \alpha_n) .$$

Innen Φ egyértelműsége azonnal adódik. Észrevétel: Φ a fenti formulával egy az egész $\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}$ téren jól-definiált lineáris leképezés. Sőt

$$\begin{aligned}\Phi\big(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathbf{z}^k \sum_{\ell=0}^{m} \beta_\ell \mathbf{z}^\ell\big) &= \Phi\big[\sum_{r=0}^{n+m}\big(\sum_{k=0}^{r} \alpha^k \beta^{r-k}\big)\mathbf{z}^r\big] = \\ &= \sum_{r=0}^{n+m}\big(\sum_{k=0}^{r} \alpha^k \beta^{r-k}\big) a^r = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k \sum_{\ell=0}^{m} \beta_\ell a^\ell = \\ &= \Phi\big(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathbf{z}^k\big) \cdot \Phi\big(\sum_{\ell=0}^{m} \beta_\ell \mathbf{z}^\ell\big) .\end{aligned}$$

Következmény. *Tetszőlegesen rögzített $a \in \mathcal{A}$ mellett*
1) { Az a által generált részalgebra $\mathcal{A}$-ban } $= \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}(a)$,
2) $p : \zeta \mapsto (\zeta - \lambda_1) \cdots (\zeta - \lambda_n)$, $\Rightarrow$ $p(a) = (a - \lambda_1) \dots (a - \lambda_n)$,
3) $p(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} p^{(k)}(\lambda)(a - \lambda)^k$ $\quad (p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{K}),\ \lambda \in \mathbb{K})$.

Megjegyzés. A formális polinomok és a polinom-függvények között kölcsönösen egyértelmű a $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathbf{z}^k \mapsto \big[\zeta \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^k\big]$ megfeletetés, ha a skalárok $\mathbb{K}$ teste algebrailag zárt [mint pl. a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetben], azaz ha $\mathbb{K}$-ban minden nem-0-adfokú polinom gyöktényezős alakú. Ugyanis ilyenkor $p(\mathbf{z}) \neq q(\mathbf{z})$ esetén vagy $p(z) - q(z) = \mathrm{const} \cdot \mathbf{z}^0 \neq 0$, vagy $n := \deg(p - q) > 0$ és $\exists\ \alpha \neq 0\ \exists\ \zeta_1, \dots \zeta_n \in \mathbb{K}$ $p(\mathbf{z}) = \alpha \prod_{j=1}^{n} (\mathbf{z} - \zeta_j)$. Mivel algebrailag zárt test nem lehet véges*, így tetszőleges $\zeta \in \mathbb{K} \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\} \neq \emptyset$ mellett $p(\zeta) \neq q(\zeta)$.

* Ha $\mathbb{K} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, akkor a $p(\mathbf{z}) := 1 + \prod_{k=1}^{m} (\mathbf{z} - \lambda_k)$ polinomnak nincs gyöke $\mathbb{K}$-ban.

Megjegyzés. Minden $p(\mathbf{z}) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathbf{z}^k$ polinomra jól-definiált a

$$p'(\mathbf{z}) := \sum_{k=1}^{\infty} k\, \alpha_k\, \mathbf{z}^{k-1} \ .$$

derivált. Ha a $\mathbb{K}$ test 0-karakterisztikájú (azaz ha $\mathbb{K}$-ban $1 + \cdots + 1 \neq 0$ tetszőleges hosszúságú összegekre), akkor formális algebrai számolással igazolható, a **Taylor formula**:

$$\varphi(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(\lambda) \cdot (\mathbf{z} - \lambda)^k \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Spektrum

Definíció. Legyen $a \in \mathcal{A}$ és $1 \in \mathcal{B}\,\text{alg.}\subset \mathcal{A}$. Az a elem **spektrum**a a $\mathcal{B}$ részalgebra szerint az

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}(a) := \{\lambda \in \mathbb{K} :\ \nexists\, b \in \mathcal{B} \quad (a - \lambda)b = b(a - \lambda) = 1\} \ .$$

Példa. A "Karakterisztikus polinom" alfejezet szerint, ha $\dim V < \infty$ és $A \in \mathcal{L}(V)$, akkor $\mathrm{Sp}_{\mathcal{L}(V)}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} :\ \det(A - \lambda\, \mathrm{id}_V) = 0\}$.

Lemma. *Ha $a \in \mathcal{A}$ és b invertálható$\in \mathcal{A}$, akkor*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(bab^{-1}) = \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a) \ , \quad \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(ab) = \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(ba) \ .$$

BIZONYÍTÁS. Mivel b, b^{-1}invertálható$\in \mathcal{A}$, a $bab^{-1} - \lambda = b(a - \lambda)b^{-1}$ szorzat pontosan akkor invertálható ($\mathcal{A}$-ban), ha $a - \lambda$ invertálható. Tehát $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(bab^{-1}) = \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$. Másrészt $ba = b(ab)b^{-1}$.

Lemma. $\mathrm{Sp}_{\mathcal{B}_1}(a) \supset \mathrm{Sp}_{\mathcal{B}_2}(a) \qquad (a \in \mathcal{B}_1 \text{ alg.} \subset \mathcal{B}_2 \text{ alg.} \subset \mathcal{A})$.

BIZONYÍTÁS. Legyen $\lambda \in \mathbb{K}$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy $\exists b \in \mathcal{B}_1$ $(a - \lambda)b = b(a - \lambda) = 1$. Ekkor triviálisan $\exists b \in \mathcal{B}_2$ $(a - \lambda)b = b(a - \lambda) = 1$.

Következmény. $\mathrm{Sp}_{\mathrm{Pol}(a)}(a) \supset \mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}(a) \quad (a \in \mathcal{B}\,\text{alg.} \subset \mathcal{A})$.

Lemma. *Az $a \in \mathcal{A}$ elem pontosan akkor invertálható $\mathcal{A}$-ban, ha a bal- (ill. jobb-) szorzás-reprezentációja $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{A}$ operátor.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Ha $ab = 1$ valamilyen $b \in \mathcal{A}$ mellett, akkor $L_a L_b = L_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$, ahonnan $\operatorname{ran} L_a \supset L_a(L_b\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, azaz $\operatorname{ran} L_a = \mathcal{A}$. Ha $ba = e$ valamilyen $b \in \mathcal{A}$ mellett, akkor $\ker L_a \subset \ker L_b L_a = \ker L_1 = \ker \mathrm{id}_{\mathcal{A}} = \{0\}$. Tehát ha a invertálható$\in \mathcal{A}$, akkor L_a (analóg módon R_a) injektív ráképezés $\mathcal{A}$-ra $\mathcal{A}$-ról.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy pl. $L_a : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{A}$. Tekintsük ekkor a $b := L_a^{-1}(1)$ elemet. Ezzel $ab = L_a(b) = 1$. Így $L_a L_b = L_{ab} = L_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$, azaz szükségképpen $L_b = L_a^{-1}$. Vagyis $L_{ba} = L_b L_a = L_a^{-1} L_a = \mathrm{id}_{\mathcal{A}} = L_1$. Mivel egységelemes algebra szorzás-reprezentációi hűek, innen $ba = 1$ is áll.

Tétel. Spektrál-leképezési tétel) *Ha a $\mathbb{K}$ alaptest algebrailag zárt, az $a \in \mathcal{A}$ elem tetszőleges $p(\mathbf{z}) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathbf{z}^k$ polinomjára*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\big(p(a)\big) = p\big(\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)\big) \ .$$

Bizonyítás. Akármilyen $\lambda \in \mathbb{K}$ mellett

$$\begin{aligned} p(a) - p(\lambda) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (a^k - \lambda^k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (a - \lambda)[a^{k-1} + \lambda a^{k-2} + \cdots + \lambda^{k-1}] = \\ &= (a - \lambda) q_\lambda(a) \end{aligned}$$

egy alkalmas $(n-1)$-edfokú q_λ polinommal. Mivel az a elem összes polinomjai felcserélhetők, így a $p(a) - p(\lambda)$ elem pontosan akkor invertálható, ha $q_\lambda(a)$ és $a - \lambda$ egyszerre invertálhatók. Tehát, ha $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$, akkor $p(\lambda) \in \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\big(p(a)\big)$, azaz $p\big(\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)\big) \subset \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\big(p(a)\big)$.

Tekintsük végül azt az esetet, amelynél $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\big(p(a)\big)$. Belátandó: $\exists\ \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$ $\mu = p(\lambda)$.

Bizonyítás. : A $\mathbb{K}$ test algebrailag zárt, ezért $p - \mu : \zeta \mapsto \gamma \prod_{k=1}^{n} (\zeta - \lambda_k)$ írható alkalmas $\gamma, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mellett, ahol $\gamma = [p$ főegyütthatója$] \neq 0$. Mivel most a

$$p(a) - \mu = (a - \lambda_1) \cdots (a - \lambda_n)$$

kommutatív szorzat nem invertálható, valamelyik tényezője nem invertálható. Azaz $\exists\ m\ \lambda_m \in \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$. Ezzel azonban $p(\lambda_m) = \mu + \prod_{k=1}^{n} (\lambda_m - \lambda_k) = \mu$.

Propozíció. *Ha a invertáható $\mathcal{A}$-ban, akkor* $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a^{-1}) = \big(\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)\big)^{-1}$.

Bizonyítás. Feltevés szerint $0 \notin \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$. Ha $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ és $a - \lambda$ invertálható$\in \mathcal{A}$, akkor az

$$a^{-1} - \lambda^{-1} = \lambda^{-1} a^{-1} (\lambda - a)$$

kommutatív felbontás mutatja, hogy a $a^{-1} - \lambda^{-1}$ elem invertálható $\mathcal{A}$-ban. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a^{-1}) \subset \big(\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)\big)^{-1}$. Ugyanezt az észrevételt a helyett az a^{-1} elemre alkalmazva kapjuk a fordított tartalmazást.

Projekciók

Definíció. Legyen S egy tetszőleges halmaz. A $P : S \to S$ leképezés **projekció**, ha

$$P(x) = x \qquad\qquad (x \in \mathrm{ran}(P)) \ .$$

Bár a bizonyítása triviális, a következő Lemma alapvető fontosságú, mivel operátor-algebrai kifejezéssel írja le a geometriai jellegű definíciót.

> **Lemma.** *A $P : S \to S$ leképezés pontosan akkor projekció, ha $P \circ P = P$.*

Definíció. A $p \in \mathcal{A}$ elem **projekció** (algebrai értelemben), ha $p^2 = p$.

Megjegyzés. Ha $p \in \mathcal{A}$ projekció algebrai értelemben, akkor tetszőleges $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(V)$ reprezentációjában az $\mathcal{A}$ algebrának a p-t reprezentáló $\Phi(p) : V \to V$ operátor geometriai értelemben is projekció a V tér egy részhalmazára, hiszen $\Phi(p)^2 = \Phi(p^2) = \Phi(p)$.

A projekciók érdekességét algebrai szempontból a következő egyszerű tény adja.

> **Lemma.** *Ha $\mathcal{A}_1$ egységelemes részalgebrája $\mathcal{A}$-nak, akkor $\mathcal{A}_1$ egysége projekció $\mathcal{A}$-ban. Fordítva is, mindegyik $\mathcal{A}$-beli projekció valamilyen egységelemes $\mathcal{A}$-beli részalgebra egysége.*

Bizonyítás. Ha e_1 egység$\in \mathcal{A}_1$, akkor $e_1 a_1 = a_1$ $(a_1 \in \mathcal{A}_1)$ miatt $e_1^2 = e_1$. Ha pedig p proj.$\in \mathcal{A}$, akkor a $\mathcal{P} := \mathbb{K}p$ altér részalgebrája $\mathcal{A}$-nak, és $p(\lambda p) = (\lambda p)p = \lambda p$ $(\lambda p \in \mathcal{P})$.

Gyakorlat. Ha p proj.$\in \mathcal{A}$, akkor a $p\mathcal{A}p (:= \{pap : \ a \in \mathcal{A}\})$ halmaz a legnagyobb olyan részalgebrája $\mathcal{A}$-nak, amelynek p egységeleme.

Tétel. *Legyen p_1, p_2 két $\mathcal{A}$-beli projekció. Ha a skalárok $\mathbb{K}$ testében $1+1 \neq 0$, akkor*

1) $p_1 + p_2$ *projekció* $\iff p_1p_2 = p_2p_1 = 0$,

2) $p_1 - p_2$ *projekció* $\iff p_1p_2 = p_2p_1 = p_2$.

Bizonyítás. 1) Ha $p_1p_2 = p_2 = 0$, akkor $(p_1+p_2)^2 = p_1^2+p_2^2+p_1p_2+p_2p_1 = p_1+p_2$. Tegyük fel, hogy $(p_1+p_2)^2 = p_1+p_2$. Ekkor

$$\begin{aligned}
&p_1 + p_2 = (p_1+p_2)^2 = \underbrace{p_1^2}_{p_1} + p_1p_2 + p_2p_1 + \underbrace{p_2^2}_{p_2} \\
&p_1p_2 + p_2p_1 = 0 \qquad / \, p_1 \cdot \quad \cdot p_1 \\
&p_1p_2p_1 + p_1p_2p_1 = (1+1)p_1p_2p_1 = 0 \\
&p_1p_2p_1 = 0 \qquad (\Leftarrow 1+1 \neq 0) \ .
\end{aligned}$$

A kapott $p_1p_2 + p_2p_1 = 0$ ill. $p_1p_2p_1 = 0$ relációkból

$$\begin{aligned}
&p_1p_2 = -p_2p_1 \qquad / \, p_1 \cdot \quad \cdot p_2 \\
&\underbrace{p_1^2p_2^2}_{p_1p_2} = -\underbrace{p_1p_2p_1}_{0}p_2 = 0 \ .
\end{aligned}$$

2) Ha $p_1p_2 = p_2p_1 = p_2$, akkor $(p_1-p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2 - p_2p_1 = p_1 + p_2 - 2p_2 = p_1 - p_2$. Ha $q := p_1 - p_2$ projekció, akkor a már bizonyított 1) szerint $p_2q = qp_2 = 0$ (mivel $p_1 = p_2 + q$). Azaz most $0 = p_2(p_1 - p_2) = p_2p_1 - p_2$ és $0 = (p_1 - p_2)p_2 = p_1p_2 - p_2$.

Megjegyzés. Ha $\mathbb{K}$ karakterisztikája 2 (azaz $1+1 = 0$ $\mathbb{K}$-ban), akkor $a = -a$ $(a \in \mathcal{A})$. Ekkor $p_1^2 = p_1$, $p_2^2 = p_2$ esetén $(p_1 \pm p_2)^2 = p_1 \pm p_2 \iff p_1p_2 = p_2p_1$.

Tétel. *Legyen V egy vektortér, $P \in \mathcal{L}(V)$. A P operátor pontosan akkor projekció, ha találhatók olyan K, R alterek V-ben, amelyekre*

$$\begin{aligned}
&K \cap R = \{0\} \ , \quad V = K + R \ , \\
&Pv = \big[(v+K) \cap R \text{ egyetlen eleme}\big] \qquad (v \in V) \ .
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $P^2 = P$, és tekintsük a

$$K := \ker(P) \ , \quad R := \operatorname{ran}(P)$$

altereket. Ha $u \in K \cap R$, akkor egyrészt $u = Pu$ (mivel $u \in \operatorname{ran}(P)$), másrészt $Pu = 0$ (mivel $u \in \ker(P)$), tehát csak $u = 0$ lehet. Azaz $K \cap R = \{0\}$. Véve tetszőleges $v \in V$ vektort,

$$
\begin{aligned}
&Pv = P^2 v \ , \ \Rightarrow \ P(v - Pv) = 0 \ , \ \Rightarrow \ v - Pv \in K \ , \ \Rightarrow \\
&v = (v - Pv) + \underbrace{Pv}_{\in R} \in K + R \ \text{ és} \\
&\underbrace{Pv}_{\in R} = v - (\underbrace{v - Pv}_{\in K}) \ , \ \Rightarrow \\
&Pv \in (v + K) \cap R \ .
\end{aligned}
$$

Most $K \cap R = \{0\}$ miatt $(v + K) \cap R = [K \cap R$ eltoltja$]$ is 1-elemű.

Tegyük fel, hogy $\exists\ K, R$ altér $\subset V$ $\ K \cap R = \{0\}$, $V = K + R$, $Pv = [(v + K) \cap R$ egyetlen eleme$]$. Ha most $v \in V$ tetszőleges, akkor

$$
P^2 v = P(Pv) \in R \cap (Pv + K) \subset R \cap ((v + K) + K) = R \cap (v + K) = \{Pv\} \ .
$$

Tehát $P^2 = P$, azaz P projekció.

Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ részalgebrája $\mathcal{L}(V)$-nek, akkor a $P \in \mathcal{A}$ operátor pontosan akkor projekció, ha* $\ker(P) + \operatorname{ran}(P) = V$, $\ker(P) \cap \operatorname{ran}(P) = \{0\}$ *és* $Pv = [(v + \ker(P)) \cap \operatorname{ran}(P)$ egyetlen eleme$]$.

Tétel. *Legyenek a $P_1, P_2 : V \to V$ operátorok projekciók, ahol V egy vektortér egy nem 2-karakterisztikájú testen. Ekkor ekvivalensek*

1) $P_1 + P_2$ *projekció,*

2) $\exists\ R_1, R_2, K$ altér$\subset V \quad V = R_1 \oplus R_2 \oplus K$,
$\operatorname{ran}(P_1) = R_1$, $\operatorname{ran}(P_2) = R_2$, $\ker(P_1) = R_2 \oplus K$, $\ker(P_2) = R_2 \oplus K$.

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2): Legyen

$$
R_i := \operatorname{ran}(P_i) \ , \quad K_i := \ker(P_i) \quad (i = 1, 2) \ , \quad K := K_1 \cap K_2 \ .
$$

Feltevés szerint $P_1 + P_2$ is projekció, így

$$
P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0 \ , \ \Rightarrow \quad R_2 \subset K_1 \ , \quad R_1 \subset K_2 \ .
$$

Az előző tétel szerint

$$
V = R_1 \oplus K_1 = R_2 \oplus K_2 \ , \ \Rightarrow \quad R_1 \cap R_2 \subset R_1 \cap K_1 = \{0\} \ ,
$$

tehát az R_1, R_2 alterek összege direkt. Másrészt a $P_1 + P_2$ projekcióra

$$
\begin{aligned}
&P_i = (P_1 + P_2) P_i \ , \ \Rightarrow \quad R_i = \operatorname{ran}(P_i) \subset \operatorname{ran}(P_1 + P_2) \quad (i = 1, 2) \\
&R_1, R_2 \subset \operatorname{ran}(P_1 + P_2) \subset P_1 V + P_2 V = R_1 \oplus R_2 \ . \\
&P_i = P_i (P_1 + P_2) \ , \ \Rightarrow \quad K_i = \ker(P_i) \supset \ker(P_1 + P_2) \quad (i = 1, 2) \\
&K_1, K_2 \supset \ker(P_1 + P_2) \supset \ker(P_1) \cap \ker(P_2) = K_1 \cap K_2 = K \ .
\end{aligned}
$$

Innen

$$\operatorname{ran}(P_1 + P_2) = R_1 \oplus R_2 \ , \quad \ker(P_1 + P_2) = K_1 \cap K_2 = K \ ,$$
$$V = \operatorname{ran}(P_1 + P_2) \oplus \ker(P_1 + P_2) = R_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus K \ ,$$
$$\ker(P_1 + P_2) \supset \ker(P_1) \cap \ker(P_2) = K_1 \cap K_2 \ .$$

Ugyanakkor $P_1 = P_1^2 + P_1P_2 = P_1(P_1 + P_2)$ miatt $K_1 = \ker(P_1) \supset \ker(P_1 + P_2)$. Hasonlóan $K_2 \supset \ker(P_1 + P_2)$. Azaz $K_1 \cap K_1 \supset \ker(P_1 + P_2)$ is áll. Tehát $\ker(P_1 + P_2) = K_1 \cap K_2$.

2) $\Rightarrow$ 1): Csak annyit kell belátnunk, hogy $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$. Ez most a

$$P_1P_2(V) = P_1R_2 \subset P_1K_1 = \{0\}$$

ill. a hasonló $P_2P_1(V) = \{0\}$ relációból következik.

Következmény. *Ha $P_1, \ldots, P_n : V \to V$ projekciók, $K_i := \ker(P_i)$, $R_i := \operatorname{ran}(P_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor ekvivalensek az alábbiak*
1) $V = (K_1 \cap \cdots \cap K_n) \oplus R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$,
2) $\sum_{i \in I} P_i$ projekció $(I \subset \{1, \ldots, n\})$,
3) $P_iP_j = P_jP_i = 0 \qquad (1 \le i < j \le n)$.

Bizonyítás. Indukciót végzünk n szerint. Az $n = 2$ esetet a Tétellel beláttuk. Az indukciós lépésben $P_1, \ldots, P_{n+1}$ mellett a

$$P_1' := P_1 \ , \ \ldots \ , \ P_{n-1}' := P_{n-1} \ , \ P_n' := P_n + P_{n+1}$$

projekciókra alkalmazzuk az indukciós feltevést.

Algebrai direkt összeg

Emlékeztető. Egy V vektortér direkt összege a $V_1, \ldots, V_n$ altereinek (jelölésben: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$), ha a $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 + \cdots + v_n$ leképezés kölcsönösen egyértelmű $V_1 \times \cdots \times V_n \leftrightarrow V$.

Megjegyzés. Ha $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ algebrák, akkor $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$ a komponensenkénti

$$(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) := (a_1b_1, \ldots, a_nb_n)$$

szorzással algebra. Ezt $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ **szorzatalgebrá**jának nevezzük.

Definíció. Az $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ alg. $\subset \mathcal{A}$ részalgebrák **algebrai direkt összeg**e a $\mathcal{B}$ részalgebra, jelölkésben:

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \dot{\oplus} \cdots \dot{\oplus} \mathcal{A}_n \ ,$$

ha az $(a_1,\dots,a_n)\mapsto a_1+\dots+a_n$ leképezés izomorfizmus az $\mathcal{A}_1\times\dots\times\mathcal{A}_n$ szorzatalgebra és $\mathcal{B}$ között. A definíció részletes kifejtéséből azonnal adódik a következő.

Lemma. *Pontosan akkor áll $\mathcal{B}=\mathcal{A}_1\dot{\oplus}\cdots\dot{\oplus}\mathcal{A}_n$, ha mint vektorterekre $\mathcal{B}=\mathcal{A}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{A}_n$, és*

$$(a_1+\dots+a_n)(b_1+\dots+b_n)=a_1b_1+\dots+a_nb_n \quad (a_1,b_1\in\mathcal{A}_1,\dots,\ a_n,b_n\in\mathcal{A}_n).$$

Definíció. Az $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ részalgebrák **algebrailag direkt összegezhetők**, ha $\mathcal{A}_1+\dots+\mathcal{A}_n=\mathcal{A}_1\dot{\oplus}\cdots\dot{\oplus}\mathcal{A}_n$. Az $a_1,\dots,a_n\in\mathcal{A}$ elemek **direkt összegezhető elemek**, ha találhatók olyan algebrailag direkt összegezhető $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ részalgebrák, amelyekre $a_i\in\mathcal{A}_i$ $(i=1,\dots,n)$. Jelölésben: $b=a_1\dot{\oplus}\cdots\dot{\oplus}a_n$, ha b az $\mathcal{A}$-ban direkt összegezhető $a_1,\dots,a_n$ elemek összege.

Tétel. *Legyenek $a_1,\dots,a_n\in\mathcal{A}$ és $a:=\sum_{i=1}^n a_i$. Ekkor ekvivalensek*

1) $a=a_1\dot{\oplus}\cdots\dot{\oplus}a_n$ *és találhatók olyan algebrailag direkt összegezhető egységelemes $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ részalgebrái $\mathcal{A}$-nak, amelyekre $a_1\in\mathcal{A}_1,\dots,a_n\in\mathcal{A}_n$,*

2) *találhatók olyan $p_1,\dots,p_n\in\mathcal{A}$ projekciók, amelyekre*

$$p_ip_j=0(i\neq j)\ ,\quad a_i=p_ia_ip_i \qquad (i,j=1,\dots,n)\ .$$

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2): Legyenek $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ algebrailag direkt összegezhető részalgebrái $\mathcal{A}$-nak, $a_i\in\mathcal{A}_i$, p_i egység$\in\mathcal{A}_i$ $(i=1,\dots,n)$. Tudjuk: $p_1,\dots,p_n$ projekciók, és $p_ia_i=a_ip_i=a_i$ és így $a_i=p_ia_ip_i$ $(i=1,\dots,n)$. A Lemma szerint

$$p_ip_j=\Big(\sum_{k=1}^n\delta_{ik}p_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^n\delta_{jk}p_k\Big)=\sum_{k=1}^n\underbrace{\delta_{ik}\delta_{jk}}_{0}p_k=0 \qquad (i\neq j)\ .$$

2) $\Rightarrow$ 1): Tegyük fel, hogy $p_1,\dots,p_n$ projekció$\in\mathcal{A}$, $p_ip_j=\delta_{ij}p_i$, $a_i=p_1a_ip_i$ $(i=1,\dots,n)$. Ekkor az $\mathcal{A}_i:=p_i\mathcal{A}p_i$ alterekre $a_i\in\mathcal{A}_i$ alg. $\subset\mathcal{A}$ és p_i egység$\in\mathcal{A}_i$ $(i=1,\dots,n)$. Azt kell még megmutatnunk, hogy $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ algebrailag direkt összegezhetők. Legyenek $b_1,c_1,d_1\in\mathcal{A}_1,\dots,b_n,c_n,d_n\in\mathcal{A}_n$ tetszőlegesen adottak. Belátandó:

a) $b_1=\dots=b_n=0$ ha $b_1+\dots+b_n=0$,

b) $(c_1+\dots+c_n)(d_1+\dots+d_n)=c_1d_1+\dots+c_nd_n$.

Ad a): Ha $\sum_{k=1}^n b_k = 0$, akkor tetszőleges i indexre

$$0 = p_i \sum_{k=1}^n b_k = p_i \sum_{k=1}^n p_k b_k p_k =$$
$$= \sum_{k=1}^n \underbrace{p_i p_k}_{\delta_{ik} p_k} b_k p_k = p_i b_i p_i = b_i \ .$$

Ad b):

$$\Big(\sum_{k=1}^n c_k\Big)\Big(\sum_{\ell=1}^n d_\ell\Big) = \sum_{k,\ell=1}^n c_k d_\ell =$$
$$= \sum_{k,\ell=1}^n p_k c_k \underbrace{p_k p_\ell}_{\delta_{k\ell} p_k} d_\ell p_\ell = \sum_{k=1}^n \underbrace{p_k c_k p_k}_{c_k} \underbrace{p_k d_k p_k}_{d_k} \ .$$

Következmény. *Ha $a_1, \dots, a_n$ direkt összegezhetők, akkor $a_i a_j = 0$ $(i \neq j)$. Ha $p_1, \dots, p_n$* projekció$\in \mathcal{A}$ *és $p_i p_j = 0$ $(i \neq j)$, akkor a $p := \sum_{k=1}^n p_k$ elem projekció és $p = p_1 \dot{\oplus} \cdots \dot{\oplus} p_n$. Projekciók algebrai direkt összege projekció. Ha a $p_1, \dots, p_n$ projekciók direkt összegezhetők, az általuk generált részalgebrája $\mathcal{A}$-nak a $\mathbb{K}p_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}p_n$ altér.*

Példa. Ha V vektortér, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, akkor az

$$\mathcal{A}_i := \{A \in \mathcal{L}(V) : \ AV_i \subset V_i \, , \ AV_j = 0 \ \ (j \neq i)\} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

részalgebrái $\mathcal{L}(V)$-nek algebrailag direkt összegezhetők.

Propozíció. *Az $A_1, \dots, A_n$ operátorok pontosan akkor direkt összegezhetők $\mathcal{L}(V)$-ben úgy, hogy $A_i \in \mathcal{A}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ valamilyen egységelemes algebrailag direkt összegezhető $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ részalgebráival $\mathcal{L}(V)$-nek, ha találhatók olyan $V_1, \dots, V_{n+1}$ alterei V-nek, amelyekre*

$$V = V_1 \oplus \cdot \oplus V_{n+1} \ , \qquad A_i V_i \subset V_i \ , \ \ A_i V_j = 0 \quad (j \neq i) \ .$$

Bizonyítás. Az előbbi Példából látjuk, hogy a V_i alterekre szabott feltétel elegendőségét.

Szükségesség: Tudjuk, hogy az $A_1, \dots, A_n$ operátorok pontosan akkor foglalhatók bele algebrailag direkt összegezhető $\mathcal{L}(V)$-beli egysélemes részalgebrákba, ha

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i \ , \ \ A_i = P_i A_i P_i \qquad (i, j = 1, ldots, n)$$

alkalmas $P_1, \dots, P_n : V \to V$ projekciók mellett. Ha $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$ $(i, j = 1, \dots, n)$, akkor a $P_1 + \dots + P_n$ operátor és így a

$$P_{n+1} := \mathrm{id}_V - (P_1 + \dots + P_n)$$

operátor is projekciója V-nek. Mivel

$$P_{n+1} P_i = P_i P_{n+1} = P_i[\mathrm{id}_V - (P_1 + \dots + P_n)] = P_i - \sum_{k=1}^{n} \underbrace{P_i P_k}_{\delta_{ik} P_i} = P_i - P_i = 0$$

az $i = 1, \dots, n$ indexekre, a "Projekciók" alfejezet utolsó Következménye szerint a

$$V_i := \mathrm{ran}(P_i) \qquad (i = 1, \dots, n+1)$$

alterekre $V = V_1 \oplus V_{n+1}$ és $\ker(P_i) = \sum_{j:\ j \neq i} V_j$ $(i = 1, \dots, n)$. Ha tehát $A_i = P_i A_i P_i$, akkor $A_i : V_i \to V_i,\ V_j \to 0$ $(j \neq i = 1, \dots, n)$.

Félig egyszerű elemek

Definíció. Egy $\mathcal{B}$ algebra **egyszerű**, ha nincs más részalgebrája, mint a triviális $\{0\}$ ill. $\mathcal{B}$. A b eleme az $\mathcal{A}$ algebrának **egyszerű**, ha van b-t tartalmazó egységelemes egyszerű $\mathcal{A}$-beli részalgebra.

> **Lemma.** *Egységelemes egyszerű algebra* 1*-dimenziós.*

BIZONYÍTÁS. Ha $e\,\text{egység} \in \mathcal{B}$, akkor $\{0\} \neq \mathbb{K}e\,\text{alg.}\subset \mathcal{B}$. Ha tehát $\mathcal{B}$ egyszerű, akkor szükségképpen $\mathcal{B} = \mathbb{K}e$.

> **Következmény.** *$\mathcal{A}$ egyszerű egységelemes részalgebrái a $\mathbb{K}p$ alakúak, ahol p tetszőleges $\mathcal{A}$-beli projekció. Tehát egy algebra egyszerű elemei a benne levő projekciók többszörösei.*

BIZONYÍTÁS. Tudjuk: $\mathcal{A}$ részalgebráinak az egységelemei pontosan az $\mathcal{A}$-beli projekciók. Ha pedig $0 \neq p\,\text{projekció} \in \mathcal{A}$ és $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, akkor $\mathbb{K}p$ egy 1-dimenziós egyszerű részalgebrája $\mathcal{A}$-nak a p egységelemmel.

Definíció. Egy $\mathcal{B}$ algebra **félig egyszerű**, ha véges sok egyszerű részalgebrájának az algebrai direkt összege. Az $a \in \mathcal{A}$ **félig egyszerű elem** $\mathcal{A}$-ban (jelölésben: $a\,\text{f-egysz.} \in \mathcal{A}$), ha belefoglalható $\mathcal{A}$-nak egy egységelemes félig-egyszerű részalgebrájába.

Propozíció. *$\mathcal{A}$ egységelemes félig egyszerű részalgebrái pontosan a*

$$(\mathbb{K}p_1)\dot{\oplus}\cdots\dot{\oplus}(\mathbb{K}p_n) \qquad (p_1,\dots,p_n \text{ alg. direkt össz.-hető projekciók})$$

alakúak.

Bizonyítás. A $(\mathbb{K}p_1)\dot{\oplus}\cdots\dot{\oplus}(\mathbb{K}p_n)$ alakú részalgebrák triviálisan félig egyszerűek. Ha $\mathcal{B}$ egységelemes félig-egyszerű részalgebrája $\mathcal{A}$-nak, és

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1\dot{\oplus}\cdots\dot{\oplus}\mathcal{B}_n\ , \quad p\,\text{egység} \in \mathcal{B}\ ,$$

akkor p-nek a

$$p = p_1 + \cdots + p_n\ , \qquad p_1 \in \mathcal{B}_1,\dots,p_n \in \mathcal{B}_n$$

felbontásában szükségképpen

$$p_1\,\text{egység} \in \mathcal{B}_1,\dots,p_n\,\text{egység} \in \mathcal{B}_n\ ,$$

mivel most

$$\begin{aligned} b_1 + \cdots + b_n &= p(b_1 + \cdots + b_n) = \\ &= (p_1 + \cdots + p_n)(b_1 + \cdots + b_n) = \\ &= p_1b_1 + \cdots + p_nb_n\ , \Rightarrow \\ \Rightarrow\ b_1 = p_1b_1,\dots,b_n &= p_nb_n \qquad (b_1 \in \mathcal{B}_1,\dots,b_n \in \mathcal{B}_n)\ . \end{aligned}$$

Következmény. *Az $\mathcal{A}$ algebra félig egyszerű elemei algebrailag direkt összegezhető projekciók véges lineáris kombinációi. Sőt*

$$\begin{aligned} a\ \text{f-egysz.} \in \mathcal{A} \iff &\exists\, p_1,\dots,p_n\,\text{proj.} \in \mathcal{A}\quad \exists\, \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K} \\ &a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i\ , \quad \lambda_i \neq \lambda_j\ , \quad p_ip_j = 0 \\ &(i \neq j = 1,\dots,n). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Csak annyit kell a Tétel után még megmutatnunk, hogy amennyiben $p = \sum_{j=1}^{n} \mu_j q_j$, ahol $q_1,\dots,q_n$ algebrailag direkt összegezhető projekciók $\mathcal{A}$-ban, akkor $a = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_i$ is írható alkalmas páronként különböző λ_i együtthatókkal és algebrailag direkt összegezhető p_i projekciókkal. Véve a $\mu_1,\dots,\mu_n$ sorozatban előforduló *különböző* számok egymás utáni $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ felsorolását (pl. $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ $= (1,1,2,1,2,3,2,3,1)$ esetén $(\lambda_1,\dots,\lambda_N) = (1,2,3)$), megfelel

$$p_i := \sum_{j:\ \mu_j = \lambda_i} q_j \qquad (i = 1,\dots,N)\ .$$

Következmény. *Ha V egy vektortér,*

$$A \text{ f-egysz.} \in \mathcal{L}(V) \iff \exists\, V_1, \ldots, V_n \text{ altér} \subset V \quad \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$
$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n\ , \quad A|V_i = \lambda_i \mathrm{id}_{V_i}$$
$$(i = 1, \ldots, n).$$

Gyakorlat. 1) A egyszerű$\in \mathcal{L}(V) \iff A = 0$ vagy $\exists\, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \quad a(a-\lambda) = 0$.
2) A f-egysz.$\in \mathcal{L}(V)$, $\dim(V) < \infty$, $\Rightarrow\ \exists\, E$ bázis $\ E'AE$ diagonális mátrix.

Lemma. *Legyen $a = \sum_{i=1}^N \lambda_i p_i$, ahol $p_1, \ldots, p_N$ algebrailag direkt összegezhető projekciók $\mathcal{A}$-ban. Ekkor*

$$p(a) = \sum_{i=1}^N p(\lambda_i) p_i \qquad (p \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}})\ .$$

Bizonyítás. Mivel $p_1, \ldots, p_N$ algebrailag direkt összegezhetők $\mathcal{A}$-ban, tetszőleges α_i, β_i együtthatók mellett

$$\Big(\sum_{i=1}^N \alpha_i p_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^N \beta_i p_i\Big) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i p_i^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i p_i\ .$$

Ezt iterálva, $\big(\sum_{i=1}^N \lambda_i p_i\big)^n = \sum_{i=1}^N \lambda_i^n p_i$ $(n = 1, 2, \ldots)$, ahonnan lineáris kombinációk vételével adódik az állítás.

Definíció. Adott $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ páronként különböző számoknál

$$\ell_k(\mathbf{z}) := \prod_{i:\ i \neq k} \frac{\mathbf{z} - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i} \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

a $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ rendszerhez tartozó **Lagrange-féle interpolációs polinomok**.

Megjegyzés. Ha $\eta_1, \ldots, \eta_N \in \mathbb{K}$ tetszőleges számok, $\sum_{k=1}^N \eta_k \ell_k$ egy olyan $(N-1)$-edfokú polinom, amely a λ_k helyen épp az adott η_k értéket veszi föl mindig.

Következmény. *Ha $a = \sum_{k=1}^N \lambda_k p_k$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$ és $p_1, \ldots, p_N$ $\mathcal{A}$-ban algebrailag direkt összegezhető projekciók, akkor*

$$p_k = \ell_k(a) \qquad (k = 1, \ldots, N)\ .$$

Tétel. *Az $a \in \mathcal{A}$ elem pontosan akkor félig egyszerű, ha valamely, csak egyszeres gyökökkek rendelkező polinomja eltűnik.*

BIZONYÍTÁS. $\Rightarrow$: Tudjuk: az $a = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \cdot p_k$ (ahol $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$ és $p_1, \dots, p_N$ $\mathcal{A}$-ban algebrailag direkt összegezhető projekciók) félig egyszerű elem tetszőleges p polinomja $p(a) = \sum_{k=1}^{N} p(\lambda_k)p_k + p(0)[1 - (p_1 + \dots + p_N)]$ alakú. Tehát a csupa egyszeres gyökökkel rendelkező $p(\mathbf{z}) := \prod_{\lambda \in \{0, \lambda_1, \dots, \lambda_N\}} (\mathbf{z} - \lambda)$ polinomra $p(a) = 0$.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy $p(a) = 0$, ahol $p(\mathbf{z}) := (\mathbf{z} - \lambda_1) \dots (\mathbf{z} - \lambda_N)$ és a $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ gyökök páronként különbözők. Tekintsük a

$$p_k := \ell_k(a) = \frac{a - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j} \qquad (k = 1, \dots, N)$$

Lagrange polinomjait a-nak. Megmutatjuk, hogy

$$p_i p_j = 0 \ , \quad p_i^2 = p_i \qquad (i \neq j = 1, \dots, N) \ ,$$

azaz, hogy $p_1, \dots, p_N$ algebrailag direkt összegezhető projekciók $\mathcal{A}$-ban. Vehető $i = 1$, $j = 2$. Használva a $q(\mathbf{z}) := \prod_{k=2}^{N} (\mathbf{z} - \lambda_k)$ segédpolinomot,

$$\begin{aligned}
(a - \lambda_1)q(a) &= p_a(a) = 0 \ , \\
(a - \lambda_k)q(a) &= [(a - \lambda_1) + (\lambda_k - \lambda_1)]q(a) = \\
&= (\lambda_k - \lambda_1)q(a) \qquad (k = 1, \dots, N) \ .
\end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned}
p_1 p_2 &= \text{const} \cdot \underbrace{q(a)(a - \lambda_1)}_{0} \prod_{k=3}^{N} (a - \lambda_k) = 0 \ , \\
p_1^2 &= \prod_{k=2}^{N} (\lambda_k - \lambda_1)^{-2} q(a)^2 = \prod_{k=2}^{N} (\lambda_k - \lambda_1)^{-2} \underbrace{q(a)(a - \lambda_2)}_{(\lambda_2 - \lambda_1)q(a)} \prod_{k=3}^{N} (a - \lambda_k) = \\
&= \prod_{k=2}^{N} (\lambda_k - \lambda_1)^{-2} (\lambda_2 - \lambda_1) q(a) \prod_{k=3}^{N} (a - \lambda_k) = \\
&= \prod_{k=2}^{N} (\lambda_k - \lambda_1)^{-2} (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) q(a) \prod_{k=4}^{N} (a - \lambda_k) = \\
&\ \vdots \\
&= \prod_{k=2}^{N} (\lambda_k - \lambda_1)^{-2} \prod_{k=2}^{N} (\lambda_k - \lambda_1) q(a) = \ell_1(a) = p_1 \ .
\end{aligned}$$

Végül belátjuk, hogy $a = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k p_k$. Most

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k p_k = r(a) \;, \qquad \text{ahol} \quad r := \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \ell_k \;.$$

Csakhogy

$$r(\lambda_k) = \lambda_k = I(\lambda_k) \quad (k = 1, \ldots, N) \;, \quad \text{ahol} \quad I : \zeta \mapsto \zeta \;.$$

Márpedig két N-nél kisebb fokszámú polinom N különböző helyen csak úgy vehet fel azonos értékeket, ha egybeesik.* Tehát valóban $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k p_k = r(a) = I(a) = a$.

Nilpotens elemek és hatványsoraik

Emlékeztető. Egy $A \in \mathcal{L}(V)$ operátort nilpotensnek mondunk, ha valamelyik hatványa eltűnik.

Definíció. Az $a \in \mathcal{A}$ elem **nilpotens** (jelölésben: $a \,\mathrm{nil}\!\in \mathcal{A}$), ha $\exists\, N > 0 \quad a^N = 0$. Egy nilpotens a elem **nilpotencia-fok**a $\deg(a) := \min\{N > 0 : \; a^N = 0\}$.

Lemma. *Ha $a, b \,\mathrm{nil}\!\in \mathcal{A}$ és $ab = ba$, akkor $a + b \,\mathrm{nil}\!\in \mathcal{A}$.*

Bizonyítás. Legyen $a^N = b^M = 0$. Mivel $ab = ba$, az $(a + b)^{M+N}$ hatvány kiszámítására alkalmazhatjuk a binomiális tételt.

$$\begin{aligned}(a+b)^{M+N} &= \sum_{k=0}^{M+N} \binom{M+N}{k} a^k b^{M+N-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{N} \binom{M+N}{k} a^k \underbrace{b^{M+N-k}}_{0} + \sum_{k=N+1}^{M+N} \binom{M+N}{k} \underbrace{a^k}_{0} b^{M+N-k} = 0 \;.\end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha $\mathbb{K}$ fölött nincs topológia adva, a $\zeta \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \zeta^n$ hatványsor-függvények nem értelmezhetők általában a $\zeta \neq 0$ helyeken. Ezzel szemben akármilyen $a \,\mathrm{nil}\!\in \mathcal{A}$ mellett a $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n$ összeg jól-definiálható, hiszen most csak véges sok tag nem-zéró ebben a végtelen összegben.

* Ez következik a Vandermonde-féle $\det\big(\lambda_k^m\big)_{k=1\, m=0}^{N\;\; N-1}$ nem-zéró voltából.

Definíció. Tetszőleges $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \in \mathbb{K}$ sorozatra bevezetjük a $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathbf{z}^n$ **formális hatványsort**, a formális hatványsorok között pedig a lineáris műveleteket és a szorzatot a következő módon:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathbf{z}^n := \Big(\big[\zeta \mapsto \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \zeta^n\big] : \ N = 0, 1, 2, \ldots \Big)$$

$$\lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathbf{z}^n + \mu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \mathbf{z}^n := \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \alpha_n + \mu \beta_n) \mathbf{z}^n \ ,$$

$$\big(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathbf{z}^k\big) \cdot \big(\sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_\ell \mathbf{z}^\ell\big) := \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{(k,\ell):\ k+\ell=n} \alpha_k \beta_\ell \Big) \mathbf{z}^n \ .$$

A ($\mathbb{K}$-beli együtthatós) formális hatványsorok családját $\mathrm{Pol}_{\infty,\mathbb{K}}$-val fogjuk jelölni.

Azonnal adódik a polinomok szorzás-azonosságából az alábbi.

Propozíció. *A fenti műveletekkel a* $\mathrm{Pol}_{\infty,\mathbb{K}}$ *tér algebra, mégpedig az* $1 = 1 \cdot \mathbf{z}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \mathbf{z}^n$ *egységelemmel.*

Lemma. *Az* $1 - \mathbf{z}$ *formális hatványsor invertálható* $\mathrm{Pol}_{\infty,\mathbb{K}}$*-ban, és*

$$(1 - \mathbf{z})^{-1} = 1 + \mathbf{z} + \mathbf{z}^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{z}^n \ .$$

Bizonyítás. $(1 - \mathbf{z}) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{z}^n = (1 + \mathbf{z} + \mathbf{z}^2 + \cdots) - (\mathbf{z} + \mathbf{z}^2 + \cdots) = 1.$

Definíció. Minden $a \,\mathrm{nil}\!\in \mathcal{A}$ és $p(\mathbf{z}) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{z}^n \in \mathrm{Pol}_{\infty,\mathbb{K}}$ mellett

$$p(a) := \Big[\sum_{n=0}^{N} \alpha_n a^n : \ N \geq \deg(a)\Big] \ .$$

Könnyen adódik az alábbi fontos tény.

Tétel. *Legyen az* $a \,\mathrm{nil}\!\in \mathcal{A}$ *elem tetszőlegesen rögzítve. Ekkor a* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathbf{z}^n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n$ *leképezés egy* $\mathrm{Pol}_{\infty,\mathbb{K}} \to \mathcal{A}$ *algebra-homomorfizmus.*

Példa. 1) Az $\exp(\mathbf{z}) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{z}^n$ exponenciális függvény analízisből megismert tulajdonságai valójában a formális sorfejtésének az algebrai tulajdonságain alapulnak. Nevezetesen, az analízisbeli ismert bizonyítást lemásolva kapjuk, hogy

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b) \qquad (ab = ba \ , \quad a, b \,\mathrm{nil} \in \mathcal{A}) \ .$$

2) Az $(1-\mathbf{z})^{-1}$ formális sorfejtését egy a/λ alakú nilpotens elemre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(a-\lambda)^{-1} &= -\lambda^{-1}\big[1-(a/\lambda)\big]^{-1} = -\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(a/\lambda)^n = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-(n+1)}a^n \qquad (a\,\mathrm{nil}\in\mathcal{A}\ , \quad \lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\})\ .\end{aligned}$$

Tehát az $(a-\lambda)^{-1}$ elem egy $(\deg(a)-1)$-edfokú **polinom**ja a nilpotens a-nak.

ALGEBRAI OPERÁTOROK

Az egész fejezeten át feltesszük, hogy az $\mathcal{A}$ algebra egységelemes és a $\mathbb{K}$ alaptest *algebrailag zárt*. Szokásos módon, az $\mathcal{A}$-beli egységet és $\mathbb{K}$ multiplikatív egységelemét 1-gyel jelöljük.

Algebrai elemek

Definíció. Az $a \in \mathcal{A}$ elem **algebrai**, ha $\dim \mathrm{Pol}(a) < \infty$. Jelölés: a alg.$\in \mathcal{A}$.

Megjegyzés. Az elnevezés eredete: Ezek a véges algebrai eszközökkel leírható elemek.

Lemma. *Felcserélhető algebrai elemek összege és szorzata algebrai.*

Bizonyítás. Legyen a, b alg.$\in \mathcal{A}$ és $ab = ba$. Ekkor valamilyen $N > 0$ mellett

$$a^{N+1}, a^{N+2}, \ldots \in \mathrm{Span}\{1, a, \ldots, a^N\}\ , \quad b^{N+1}, b^{N+2}, \ldots \in \mathrm{Span}\{0, b, \ldots, b^N\}\ .$$

Mivel $ab = ba$, most minden n-re

$$(ab)^n = a^n b^n \in \mathrm{Span}\{a^k b^\ell :\ k, \ell = 0, \ldots, N\}\ ,$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \in \mathrm{Span}\{a^k b^\ell :\ k, \ell = 0, \ldots, N\}\ .$$

Vagyis $\dim \mathrm{Pol}(ab), \dim \mathrm{Pol}(a+b) \leq (N+1)^2 < \infty$.

Következmény. *Felcserélhető algebrai elemek (többváltozós) polinomjai algebraiak.*

Lemma. *Algebrai elem inverze mindig polinomja az illető elemnek.*

Bizonyítás. Ha a alg.$\in \mathcal{A}$ invertálható $\mathcal{A}$-ban, akkor $L_a L_{a^{-1}} = L_{a^{-1}} L_a = L_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$, azaz $L_{a^{-1}} = L_a^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Másrészt $L_a : \mathrm{Pol}(a) \to \mathrm{Pol}(a)$. Mivel $\dim \mathrm{Pol}(a) < \infty$ és mivel az L_a (és így $L_a|\mathrm{Pol}(a)$ is) injektív, a véges dimenziós $L_a|\mathrm{Pol}(a)$ operátor invertálható. Azaz

$$\begin{aligned} L_a : \mathrm{Pol}(a) \leftrightarrow \mathrm{Pol}(a)\ , \Rightarrow \quad & L_{a^{-1}} = L_a^{-1} : \mathrm{Pol}(a) \leftrightarrow \mathrm{Pol}(a)\ , \\ \Rightarrow \quad & a^{-1} = L_{a^{-1}} 1 \in L_a^{-1}(\mathrm{Pol}(a)) = \mathrm{Pol}(a)\ . \end{aligned}$$

Példa. 1) Ha $\dim(V) < \infty$, akkor $\mathcal{L}(V)$ minden eleme algebrai.

2) Általában is, véges dimenziós algebra csupa algebrai elemekből áll.

3) A félig-egyszerű és a nilpotens elemek algebraiak.

Minimál-polinom

Tétel. 1) *Az $a \in \mathcal{A}$ elem pontosan akkor algebrai, ha valamely $p \neq 0$ polinomra $p(a) = 0$.*

2) *Legyen a alg. $\in \mathcal{A}$. Ekkor van egy egyértelműen meghatározott 1 főegyütthatójú $p_a \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}$ polinom, amelyre*

$$\{p \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}} :\ p(a) = 0\} = p_a \cdot \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}\ (= \{p_a \cdot q :\ q \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}\}\ )\ .$$

Bizonyítás. 1) Tegyük fel, hogy $\dim \mathrm{Pol}(a) < \infty$. Ekkor az $(1, a, a^2, a^3, \ldots)$ rendszer nem lineárisan független. Ezért létezik egy legkisebb $N > 0$, amelyre lineárisan függő az $(1, a, \ldots, a^N)$ rendszer. Ezzel $\{1, a, \ldots, a^{N-1}\}$ lin.fgtlen $\subset \mathcal{A}$. Vagyis

$$a^N = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k a^k$$

valamely egyértelműen meghatározott $\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{K}$ együtthatókkal.

Észrevétel: $\mathrm{Pol}(a) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{K} \cdot a^k$.

Bizonyítás. : Belátjuk indukcióval, hogy $a^n \in \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{K} \cdot a^k$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Az $n \leq N$ esetekre ez triviálisan igaz. Másrészt

$$\begin{aligned} a^n \in \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{K} \cdot a^k\ , \Rightarrow \quad a^{n+1} & \in \sum_{k=1}^{N} \mathbb{K} \cdot a^k = \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{K} \cdot a^k + \mathbb{K} \cdot a^N \subset \\ & \subset \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{K} a^k + \mathbb{K} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{K} \cdot a^k = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{K} \cdot a^k\ . \end{aligned}$$

2) Legyen az előbb bevezetett (egyértelmű) $\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}$ együtthatókkal $p_a(\mathbf{z}) := \mathbf{z}^N - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \mathbf{z}^k$. Most

$$p_a(a) = a^N - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k a^k = 0 \ , \Rightarrow \quad [p_a \cdot q](a) = P_a(a) \cdot q(a) = 0 \quad (q \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}) \ .$$

Tegyük fel, hogy $p \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}$ és $p(a) = 0$. Ekkor

$$\exists \ q \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}, \ r \in \mathrm{Pol}_{N-1,\mathbb{K}} \qquad p = p_a \cdot q + r \ .$$

(Nevezetesen q a p/p_a Euklideszi osztás hányadosa, r pedig a maradéka). Ezzel

$$0 = p(a) = [p_a \cdot q](a) + r(a) = r(a) \ .$$

Az r polinom $r(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \mathbf{z}^k$ alakú. Mivel az $(1, a, a^2, \dots, a^{N-1})$ rendszer lineárisan független, az $r(a) = \sum_{k=o}^{N-1} \beta_k a^k = 0$ reláció maga után vonja, hogy $\beta_0 = \dots = \beta_{N-1} = 0$, azaz $r = 0$.

Definíció. Az $a \in \mathcal{A}$ algebrai elem **rang**ja ill. **minimál-polinom**ja

$$\mathrm{rank}(a) := \dim \mathrm{Pol}(a) \ ,$$

$$p_a := \big[p \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}} : \ [p \text{ foka}] = \mathrm{rank}(a) \, , \ [p \text{ fő együtthatója}] = 1 \, , \ p(a) = 0\big] \ .$$

Következmény. *Ha* a alg. $\in \mathcal{A}$*, akkor* $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{Pol}(a)}(a) = \{p_a \text{ gyökei}\}$.

Bizonyítás. Tudjuk: $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{Pol}(a)}(a)$. A spektrál-leképezési tétel szerint

$$0 = \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(0) = \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\big(p_a(a)\big) = p_a\big(\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)\big) \ .$$

Innen $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a) \subset \{p_a \text{ gyökei}\}$.

Tegyük fel, hogy $p_a(\lambda) = 0$, de $\lambda \notin \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$. Ekkor egy p_a-nál 1-gyel alacsonyabb fokú q polinommal $p_a(\mathbf{z}) = (\mathbf{z} - \lambda) q(\mathbf{z})$ és $q(a) = (a - \lambda)^{-1} p(a) = 0$ volna, ami ellentmond p_a minimál-polinom voltának.

Megjegyzés. 1) A Tétel alapján a p_a minimál-polinom minden algebrai elemre jól-definiált.

2) $\{p : \ p(a) = 0\} = p_a \mathrm{Pol}(a) \big(:= \{p_a q : \ q \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}\}\big)$.

3) Konstans faktortól eltekintve p_a az egyetlen legkisebb fokszámú polinom, amely nullázza a-t. Innen az **minimál-polinom** elnevezés.

4) A $\mathrm{Pol}(a)$ algebra KOMMUTATÍV. Ezért $L_a | \mathrm{Pol}(a) = R_a | \mathrm{Pol}(a)$

5) A minimál-polinomot

$$p_a(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^N - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \mathbf{z}^k$$

alakban felírva,

$$E := \{1, a, a^2, \ldots, a^{N-1}\} \text{ bázis} \subset \mathrm{Pol}(a) \ .$$

Az E bázison a hatása L_a : $1 \mapsto a \mapsto a^2 \mapsto a^3 \mapsto \cdots \mapsto a^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k a^k$. Vagyis L_a mátrixa E szeint

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \alpha_0 \\ 1 & 0 & & & & \alpha_1 \\ & 1 & \ddots & & & \alpha_2 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & \alpha_{N-2} \\ & & & & 1 & \alpha_{N-1} \end{pmatrix} .$$

Mivel ennek a mátrixnak a karakterisztikus polinomja $\lambda \mapsto \lambda - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \lambda^k$, vagyis éppen $\lambda \mapsto p_a(\lambda)$, az $L_a - \lambda\,\mathrm{id}|\mathrm{Pol}(a)$ operátor és így az a elem spektruma a p_a polinom gyökeinek halmaza akkor is, ha nem tesszük fel a $\mathbb{K}$ test algebrai zártságát.

Gyakorlat. Az $I := p_a \cdot \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}$ altér ideál $\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}$-ban, és $\mathrm{Pol}(a) \simeq \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}/I$.

Jordan bázis

Ettől kezdve, egészen a fejezet végig a egy tetszőlegesen rögzített algebrai eleme $\mathcal{A}$-nak, amelynek minimál-polinomja

$$p_a(\mathbf{z}) = (\mathbf{z} - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\mathbf{z} - \lambda_N)^{n_N} \ ,$$

ahol a $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ gyökök páronként különbözők.

Megjegyzés. Mivel feltevés szerint az $\mathcal{A}$ algebra egységelemes, az L_a, R_a reprezentációk hűek és egybeesnek a kommutatív $\mathrm{Pol}(a)$ részalgebrán. Tekintve, hogy $\dim \mathrm{Pol}(a) = [p_a \text{ foka}] = n_1 + \cdots + n_N$, innen könnyen következik a ”Jordan normálforma” alfejezetből, hogy $\mathrm{Pol}(a)$ alkalmas bázisában $L_a|\mathrm{Pol}(a)$ mátrixa $J(n_1, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(n_N, \lambda_N)$ alakú lehet csak. Most a p_a polinom osztóiból megadunk egy ilyen bázist.

Definíció. A továbbiakban legyen

$$q_{m,k}(\mathbf{z}) := (\mathbf{z} - \lambda_m)^{k-1} \prod_{j:\ j \neq m} (\mathbf{z} - \lambda_j)^{n_j} \ ,$$

$$e_{m,k} := q_{m,k}(a) \qquad (m = 1, \ldots, N\,; \quad k = 1, \ldots, n_m) \ .$$

Minthogy az $e_{m,k}$ elemek a p_a minimál-polinomnál alacsonyabb fokú polinomjai a-nak, azonnal adódik a következő.

Lemma. *Minden m index mellett $e_{m,n_m} \neq 0$, és*

$$L_a - \lambda_m \ : \ e_{m,1} \mapsto e_{m,2} \mapsto \cdots \mapsto e_{m,n_m} \mapsto 0 \ .$$

Propozíció. *Az $E := \big(e_{m,k} : \ 1 \leq m \leq N \,, \ 1 \leq k \leq n_m\big)$ vektorrendszer (rendezett) bázis* $\mathrm{Pol}(a)$*-ban.*

Bizonyítás. Mivel $\#E = \sum_{m=1}^{N} n_m = \dim \mathrm{Pol}(a)$, elég csak megmutatni E lineáris függetlenségét.

Tegyük fel, hogy $\sum_{m,k} \gamma_{m,k} e_{m,k} = 0$. Belátandó: $\gamma_{1,1} = \cdots = \gamma_{N,n_N} = 0$.

Tegyük fel indirekte, hogy $\tilde{m}$ egy olyan index, amelyre $\{i : \ \gamma_{\tilde{m},i} \neq 0\} \neq \emptyset$, és legyen

$$\tilde{k} := \min\{i : \ \gamma_{\tilde{m},i} \neq 0\} \ .$$

Észrevétel:

$$(a-\lambda_m)^r e_{m,k} = \underbrace{p_a(a)}_{0} \cdot (a-\lambda_m)^{k+r-n_m} = 0 \qquad \text{ha} \quad r > n_m - k \geq 0 \ .$$

Az észrevétel alapján

$$\begin{aligned} 0 &= \Big(\sum_{m,k} \gamma_{m,k} e_{m,k}\Big) \prod_{j:\ j\neq\tilde{m}} (a-\lambda_j)^{n_j} (a-\lambda_{\tilde{m}})^{n_{\tilde{m}}-\tilde{k}} = \\ &= \gamma_{\tilde{m},\tilde{k}} e_{\tilde{m},\tilde{k}} \prod_{j:\ j\neq\tilde{m}} (a-\lambda_j)^{n_j} (a-\lambda_{\tilde{m}})^{n_{\tilde{m}}-\tilde{k}} =^{\text{LEMMA}} \\ &= \gamma_{\tilde{m},\tilde{k}} e_{\tilde{m},n_{\tilde{m}}} \prod_{j:\ j\neq\tilde{m}} (a-\lambda_j)^{n_j} \ . \end{aligned}$$

Mivel $(a-\lambda_{\tilde{m}}) e_{\tilde{m},n_{\tilde{m}}-1} = 0$, fennáll

$$\begin{aligned} (a-\mu) e_{\tilde{m},n_m m-1} &= [(a-\lambda_{\tilde{m}}) + (\lambda_{\tilde{m}} - \mu)] e_{\tilde{m},n_{\tilde{m}}-1} = \\ &= (\lambda_{\tilde{m}} - \mu) e_{\tilde{m},n_{\tilde{m}}} \ . \end{aligned}$$

Ezt használva,

$$e_{\tilde{m},n_{\tilde{m}}} \prod_{j:\ j\neq\tilde{m}} (a-\lambda_j)^{n_j} = \prod_{j:\ j\neq\tilde{m}} \underbrace{(\lambda_{\tilde{m}} - \lambda_j)^{n_j}}_{\neq 0} \underbrace{e_{\tilde{m},n_{\tilde{m}}}}_{\neq 0} \neq 0 \ .$$

Innen a $0 = \gamma_{\tilde{m},\tilde{k}} e_{\tilde{m},\tilde{k}} \neq 0$ ellentmondásra jutunk.

Definíció. A $\mathrm{Pol}(a)$ tér

$$E_a := \big(e_{m,k} : \ 1 \le m \le N\ ,\ 1 \le k \le n_m\big)$$

rendezett bázisát **Jordan bázis**nak nevezzük. A Lemmából azonnal következik az alábbi.

Propozíció. *A kommutatív* $\mathrm{Pol}(a)$ *részalgebrán az* a *elem szorzás-reprezentációjának a Jordan bázis szerinti mátrixa*

$$E'_a[L_a|\mathrm{Pol}(a)]E_a = J(n_1, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(n_N, \lambda_N)\ .$$

Töpliz bázis

Definíció. Egy négyzetes $\tau \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K})$ mátrix **Töpliz mátrix**, ha a főátlójával párhuzamos vonalain ugyanazok az értékei, azaz ha $\tau_{ij} = \tau_{k\ell}$ valahányszor $i-k = j-\ell$. Az $n \times n$-es Töpliz mátrixok halmazát $\mathrm{Töp}(n, \mathbb{K})$, az alsó-trianguláris Töpliz mátrixokét $\mathrm{Töp}_L(n, \mathbb{K})$ fogja jelölni.

Példa. 1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Töp}(3, \mathbb{R})$. 2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Töp}_L(3, \mathbb{R})$.

3) $J(n, \lambda)^r \in \mathrm{Töp}_L(n, \mathbb{K})$ mindig.

Bizonyítás. : A $J(n, 0)$ Jordan blokk olyan A operátor mátrixa egy $(e_1, \ldots, e_n)$ bázis szerint, amelynek hatása $A : e_1 \mapsto e_2 \mapsto \cdots \mapsto e_n \mapsto 0$. Mivel $A^k e_i = [e_{i+k}$ ha $i + k \le n$, 0 ha $i + k > n]$, a $J(n, 0)^k$ mátrix főátló alatti k-adik, a főátlóval párhuzamos vonalában 1-esek állnak, a többi helyen 0. Tehát $J(n, 0)^k \in \mathrm{Töp}_L(n, \mathbb{K})$ mindig. Így

$$J(n, \lambda)^r = [\lambda \cdot \mathbf{1}_n + J(n, 0)]^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \lambda^{n-k} \underbrace{J(n, 0)^k}_{\in \mathrm{Töp}_L(n, \mathbb{K})} \in \mathrm{Töp}_L(n, \mathbb{K})\ .$$

Következmény. *A* $\mathrm{Pol}(a)$*-beli elemek Jordan bázis szerinti mátrixa alsó-trianguláris* $n_1 \times n_1, \ldots n_N \times n_N$*-es Töpliz mátrixok direkt összege.*

Tétel. *Minden* $\beta^{(1)} \in \mathrm{Töp}_L(n_1, \mathbb{K})$,..., $\beta^{(N)} \in \mathrm{Töp}_L(n_N, \mathbb{K})$ *mátrixhoz található pontosan egy* $b \in \mathrm{Pol}(a)$, *amely szorzás-reprezentációjának a mátrixa a Jordan bázis szerint*

$$E_a' L_b E_a = \beta^{(1)} \oplus \cdots \oplus \beta^{(N)} \ .$$

BIZONYÍTÁS. Tudjuk: mivel a $\mathrm{Pol}(a)$ algebra egységelemes, rajta a $b \mapsto L_b$ szorzás-reprezentáció hű, azaz egy injektív lineáris $\mathrm{Pol}(a) \to \mathcal{L}(\mathrm{Pol}(a))$ leképezés. Az előző Következmény szerint

$$\begin{aligned} &\{L_b|\mathrm{Pol}(a) \ : \ b \in \mathrm{Pol}(a)\} \text{ altér} \subset \\ &\qquad \subset \{B \in \mathcal{L}(\mathrm{Pol}(a)) : \ E_a' B E_a \in \mathrm{Töp}_L(n_1, \mathbb{K}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Töp}_L(n_N, \mathbb{K})\} \ . \end{aligned}$$

Csakhogy itt mindkét tér dimenziószáma $n_1 + \cdots + n_N$, így egybeesnek. Vagyis az a $b \mapsto L_b$ reprezentáció $\mathrm{Pol}(a)$ és közöttük $1-1$-megfeleltetést létesít.

Definíció. Jelölés: $k = 0, 1, \ldots, n$-re $T(n, k)$ az az $n \times n$-es Töpliz mátrix, amelynek a főátló alatti k-adik vonalában 1-esek állnak, a többi helyein 0.

A továbbiaban $m = 1, \ldots, N$ és $0 \le k < n_m$ mellett

$$\begin{aligned} \tau_{m,k} &:= \underbrace{0 \oplus \cdots \oplus 0}_{m-1} \oplus T(n_m, k) \oplus \underbrace{0 \oplus \cdots \oplus 0}_{N-m} \in \mathrm{Töp}_L(n_1, \mathbb{K}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Töp}_L(n_N, \mathbb{K}) \\ t_{m,k} &:= \left[b \in \mathrm{Pol}(a) : \ E_a' L_b E_a = \tau_{m,k}\right] \ . \end{aligned}$$

A $T_a := \big(t_{m,k} : \ m = 1, \ldots, N\,; \ k = 0, \ldots, n_m - 1\big)$ rendszert a $\mathrm{Pol}(a)$ tér **Töpliz bázis**ának nevezzük.

Megjegyzés. Az őket reprezentáló $\tau_{m,k}$ mátrixokból azonnal kiolvashatók a következő relációk:

1) T_a bázis $\mathrm{Pol}(a)$-ban,

2) $t_{1,0}, \ldots, t_{N,0}$ algebrailag direkt összegezhető projekciók,

3) $t_{m,1}$ nil $\in \mathrm{Pol}(a)$, és $t_{m,k} = t_{m,1}^k$ az összes lehető indexekre,

4) $\mathrm{Pol}(a) = \big(\mathrm{Span}_{k=0}^{n_1} t_{1,k}\big) \dot{\oplus} \cdots \dot{\oplus} \big(\mathrm{Span}_{k=0}^{n_N} t_{N,k}\big)$.

5) $a = (\lambda_1 t_{1,0} + t_{1,1}) + \cdots + (\lambda_N t_{N,0} + t_{N,1})$.

Chevalley tétele

Tétel. *Minden a algebrai elem egyértelműen felbontható $\mathcal{A}$-ban egy egymással felcserélhető nilpotens n_a és félig-egyszerű s_a elem összegére. Szükségképpen, $n_a, s_a \in \mathrm{Pol}(a)$.*

Bizonyítás. Az előző alfejezet Megjegyzése alapján

$$a = (\lambda_1 t_{1,0} + t_{1,1}) + \cdots + (\lambda_N t_{N,0} + t_{N,1})$$

és az

$$s_a := \lambda_1 t_{1,0} + \cdots + \lambda_N t_{N,0} \ , \quad n_a := t_{1,1} + \cdots + t_{N,1}$$

polinomjai a-nak megfelelnek.

Tegyük fel, hogy $a = s + n$, ahol s f-egysz.$\in \mathcal{A}$, n nil$\in \mathcal{A}$ és $ns = sn$. Most n, s felcserélhető $a(= s + n)$-val, és így a bármely polinomjával is. Tehát az s, n, s_a, n_a elemek kommutálnak (bármely kettő közülük felcserélhető). Triviálisan

$$n - n_a = s_a - s \ .$$

Tudjuk: Felcserélhető nilpotens elemek összege nilpotens, felcserélhető félig-egyszerű elemek összege féleg-egyszerű. Vagyis $s_a - s$ nilpotens féleg-egyszerű elem. Így a tétel következik az alábbi, önmagában is érdekes lemmából.

Lemma. *Ha b nil, f$-$egysz. $\in \mathcal{A}$, akkor $b = 0$.*

Bizonyítás. Alkalmas algebrailag direkt összegezhető $p_1, \dots, p_\ell \in \mathcal{A}$ projekciókkal és $\beta_1, \dots, \beta_\ell \in \mathbb{K}$ konstansokkal

$$b = \beta_1 p_1 + \cdots + \beta_\ell p_\ell \ .$$

Mivel b nilpotens is, valamilyen $r > 0$ mellett

$$0 = b^r = \beta_1^r p_1 + \cdots + \beta_\ell^r p_\ell \ ,$$

Így $p_1, \dots, p_\ell$ lineáris függetlensége miatt $\beta_1^r = \cdots = \beta_\ell^r = 0$, azaz $\beta_1 = \cdots = \beta_\ell = 0$.

Következmény. *Végtelen dimenziós V vektortér esetén is áll az algebrai operátorok következő, Jordan-típusú leírása. Ha A alg. $\in \mathcal{L}(V)$, $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ és $q(A) := (A-\lambda_1)^{n_1} \cdots (A-\lambda_N)^{n_N} = 0$, akkor van olyan*

$$E = \bigcup_{m=1}^{N} \bigcup_{i \in I_m} \{e_1^{(i)}, e_2^{(i)} \ldots, e_{r(i)}^{(i)}\}$$

bázisa a V térnek, amelyen az A operátor hatása

$$\begin{aligned} A : e_1^{(i)} &\mapsto \lambda_m e_1^{(i)} + e_2^{(i)} \\ e_2^{(i)} &\mapsto \lambda_m e_2^{(i)} + e_3^{(i)} \\ &\vdots \\ e_{r(i)-1}^{(i)} &\mapsto \lambda_m e_{r(i)-1}^{(i)} + e_{r(i)}^{(i)} \\ e_{r(i)}^{(i)} &\mapsto \lambda_m e_{r(i)}^{(i)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &(i \in I_m\ , \\ &\ m = 1, \ldots, N)\ . \end{aligned}$$

Itt $\max\{r(i) :\ i \in I_m\} \leq n_m$ $(m = 1, \ldots, N)$.

Bizonyítás. Vegyük az A operátor $A = s_A + n_A$ felbontását Chevalley tétele szerint. Most valamely algebrailag direkt összegezhető $P_1, \ldots, P_N \in \mathcal{L}(V)$ projekciókkal

$$s_A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_N P_N\ , \quad \mathrm{id}_V = P_1 + \cdots + P_N\ .$$

Legyen $V_m := P_m V$ $(m = 1, \ldots, N)$. Ekkor

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_N\ , \quad V_m = \{v \in V :\ Av = \lambda_m v\} \quad (m = 1, \ldots, N)\ .$$

Mivel az n_A operátor felcserélhető s_A-val, annak sajátvektorait azonos sajátértékhez tartozó sajátvektorokba viszi

$$n_A : V_m \to V_m \qquad (m = 1, \ldots, N)\ .$$

Mivel n_A nil$\in \mathcal{L}(V)$, az $n_A|V_m$ operátorok is mind nilpotensek. Ezért mindegyik m index mellett van olyan

$$\bigcup_{i \in I_m} \{e_1^{(i)}, \ldots, e_{r(i)}^{(i)}\} \text{ bázis} \subset V_m\ ,$$

amelyen

$$n_A : e_1^{(i)} \mapsto e_2^{(i)} \mapsto \cdots \mapsto e_{r(i)}^{(i)} \mapsto 0 \qquad (i \in I_m)\ .$$

Másrészt $s_A|V_m = \lambda_m \mathrm{id}_{V_m}$, azaz

$$s_A : e_j^{(i)} \mapsto \lambda_m e_j^{(i)} \qquad (i \in I_m\,;\ j = 1, \ldots, r(i))\ .$$

Az $A = s_A + n_A$ relációból $Ae_j^{(i)} = \lambda_m e_j^{(i)} + (1 - \delta_{j,r(i)+1}) e_{j+1}^{(i)}$ $(j = 1, \ldots, r(i))$, vagyis a $\mathrm{Span}\{e_1^{(i)}, \ldots, e_{r(i)}^{(i)}\}$ alteret A önmagába viszi,és rajta az $(e_1^{(i)}, \ldots, e_{r(i)}^{(i)})$ rendezett bázis szerinti mátrixa a $J(r(i), \lambda_m)$ Jordan blokk valahányszor $i \in I_m$. Tehát a $q(A) = 0$ reláció csak úgy teljesülhet, ha $q(J(r(i), \lambda_m)) = 0$ $(i \in I_m)$ is mindig. Ez pedig csak úgy lehet, ha $r(i) \leq n_m$ $(i \in I_m)$.

Megjegyzés. Explicit módon: $t_{m,k} = q_{m,k}(a)$ a

$$q_{m,k}(\mathbf{z}) := (\mathbf{z} - \lambda_m)^k \prod_{j:j^* \neq m} \Big[\sum_{d=0}^{n_j - 1} \Big(\frac{\mathbf{z} - \lambda_m}{\lambda_m - \lambda_j} \Big)^{d+1} \Big]^{n_j}$$

$(m = 1, \ldots, N\,;\ k = 1, \ldots, n_m)$ polinomokkal.

Ugyanis, mátrix-alakban, ha $\alpha := J(n_1, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(n_N, \lambda_N)$, akkor tetszőlegesen rögzített m indexnél

$$\prod_{j:\ j \neq m} (\alpha - \lambda_j) = \underbrace{0 \oplus \cdots \oplus 0}_{m-1} \oplus \Big[\prod_{j:\ j \neq m} J(n_m, \lambda_m - \lambda_j)^{n_j} \Big] \oplus \underbrace{0 \oplus \cdots \oplus 0}_{M-m}\ .$$

A formális sorfejtést használva,

$$J(n_m, \lambda_m - \lambda_j)^{-n_j} = [J(n_m, \lambda_m - \lambda_j)^{-1}]^{-n_j} = \Big[\frac{1}{\lambda_m - \lambda_j} \sum_{d=0}^{n_j - 1} \Big(\frac{J(n_m, 0)}{\lambda_m - \lambda_j} \Big)^d \Big]^{n_j}\ .$$

Ezért $\tau_{m,0} = \prod_{j:j^* \neq m} (\alpha - \lambda_j)^{n_j} \prod_{j:j^* \neq m} \big[\frac{1}{\lambda_m - \lambda_j} \sum_{d=0}^{n_j - 1} \big(\frac{\alpha - \lambda_m}{\lambda_m - \lambda_j} \big)^d \big]^{n_j}$, hiszen az $\alpha - \lambda_m$ mátrix direkt összeg alakjában az m-edik komponens a $J(n_m, 0)$ Jordan blokk. Végül az általános formula a $\tau_{m,k} = (\alpha - \lambda_m)^k \tau_{m,0}$ relációból adódik.

ORTONORMÁLT RENDSZEREK

Ettől kezdve a $\mathbb{K}$ test a valós számok $\mathbb{R}$ vagy a komplex számok $\mathbb{C}$ teste. Ezeknek az általános esettel szemben két fontos specialitásuk van:

1) $\mathbb{R}$-en adott a $<$ Dedekind-teljes rendezés,

2) $\mathbb{C}$-n adott a $^{-}$ konjugálás.

Ez a struktúra egyben az analízis integrál- és differenciál-kalkulusának az alapja, amelynek a trigonometrikus függvényeit alkalmazni fogjuk.

Belső-szorzat terek

Definíció. Legyen H egy vektortér. A kétváltozós $\langle\ ,\ \rangle\ :\ H \times H \to \mathbb{K}$ művelet **belső-szorzat** H fölött, ha

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \alpha_1 \langle x_1, y\rangle + \alpha_2 \langle x_2, y\rangle && (x_1, x_2, y \in H,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K})\\
&\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle^{-} && (x, y \in H)\\
&\langle x, x\rangle > 0\ . && (0 \neq x \in H)
\end{aligned}$$

Itt $\langle x, y\rangle^{-}$ az $\langle x, y\rangle$ szám konjugáltját jelöli (a nehézkesebb $\overline{\langle x, y\rangle}$ helyett).
A belső-szorzattal ellátott $\mathbb{R}$ ill. $\mathbb{C}$ fölötti vektortereket valós ill. komplex **belső-szorzat ter**eknek, közülük a véges dimenziósokat **Euklideszi ter**eknek nevezzük.

Emlékeztető. A H vektortér véges dimenziós, ha

$$\exists\, N \quad \exists\, x_1, \ldots, x_N \in H \qquad H = \mathrm{Span}\{x_1, \ldots, x_N\}\ \left(:= \left\{\textstyle\sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k :\ \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{K}\right\}\right).$$

Minden $\zeta \in \mathbb{K}$ skalárra $\zeta\overline{\zeta} = |\zeta|^2 \in \mathbb{R}_+ (:= \{\xi \in \mathbb{R} :\ \xi \geq 0\})$. A $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben minden szám konjugáltja önmaga. Egy $\zeta \in \mathbb{C}$ komplex szám valós része $\mathrm{Re}\,\zeta := (\overline{\zeta} + \zeta)/2$, komplex része $\mathrm{Im}\,\zeta := i(\overline{\zeta} - \zeta)/2$.

Példa. $\mathbb{K}^n$-en a $\langle(\xi_1, \ldots, \xi_n), (\eta_1, \ldots, \eta_n)\rangle := \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta_k}$ művelet belső-szorzat.

Megjegyzés. Ha V egy $\mathbb{K}$ fölötti vektortér és E bázis$\subset V$, akkor a következő kanonikus módon lehet megadni egy $\langle\ ,\ \rangle_E$ belső-szorzatot V fölött:

$$\langle u, v\rangle_E := \sum_{e'\in E'} e'(u)\overline{e'(v)} \qquad (u, v \in V)\ ,$$

ahol E' az E bázis duálisa. Tudjuk: ezekben a formálisan végtelen összegekben csak véges sok tag $\neq 0$.

Lemma. $\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \sum_{\ell=1}^{m} \beta_\ell y_\ell \rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m} \alpha_k \overline{\beta}_\ell \langle x_k, y_\ell\rangle$.

Bizonyítás. Azonnal adódik a belső-szorzat első két tulajdonságából n és m szerinti indukcióval.

Következmény. $\langle 0, H\rangle = \langle H, 0\rangle = \{0\}$.

Valós realizáció, komplex kiterjesztés

Mostantól $H, \langle\ ,\ \rangle$ egy tetszőlegesen rögzített belső-szorzat tér.

Emlékeztető. Mivel $\mathbb{R}$ részteste $\mathbb{C}$-nek, a H komplex vektorteret felfoghatunk valós vektortérként is (a konstanssal való szorzások $\{[H \ni x \mapsto \lambda x] : \lambda \in \mathbb{C}\}$ családja helyett csak $\{[H \ni x \mapsto \lambda x] : \lambda \in \mathbb{R}\}$-rel ellátva a H alaphalmazt). Szokásosan $H_{\mathbb{R}}$ jelöli a H tér valós vektortérként felfogottját.

Propozíció. *A $H_{\mathbb{R}}$ téren a* $\mathrm{Re}\langle\ ,\ \rangle$ *művelet belső-szorzat.*

Bizonyítás. Minden $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ konstansra és $x, x_1, x_2, y \in H$ vektorokra

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle &= \mathrm{Re}(\alpha_1\langle x_1, y\rangle) + \mathrm{Re}(\alpha_2\langle x_2, y\rangle) = \\
&= \alpha_1 \mathrm{Re}\langle x_1, y\rangle + \alpha_2 \mathrm{Re}\langle x_2, y\rangle\ , \\
\mathrm{Re}\langle x, y\rangle &= \mathrm{Re}(\langle x, y\rangle^-) = \mathrm{Re}\langle y, x\rangle\ , \\
\mathrm{Re}\langle x, x\rangle &= \langle x, x\rangle > 0 \quad (x \neq 0)\ .
\end{aligned}$$

Definíció. A $\mathrm{Re}\langle\ ,\ \rangle$ belső-szorzattal ellátott $H_{\mathbb{R}}$ tér neve: a $H, \langle\ ,\ \rangle$ tér **valós realizációja**.

Megjegyzés. Ha $H, \langle\ ,\ \rangle$ eleve $\mathbb{R}$-fölötti belső-szorzat tér, akkor $H_{\mathbb{R}}, \mathrm{Re}\langle\ ,\ \rangle$ azonos $H, \langle\ ,\ \rangle$-val.

Kérdés. Egy $\mathbb{R}$-fölötti $H, \langle\ ,\ \rangle$ belső-szorzat tér kibővíthető-e $\mathbb{C}$-fölötti belső-szorzat térré?

Megjegyzés. Ha $\widehat{H}, \langle\ ,\ \rangle$ egy komplex ($\mathbb{C}$-fölötti) belső-szorzat tér és H valós altér$\subset \widehat{H}$ (azaz $\mathbb{R}H + \mathbb{R}H \subset H$), akkor az összes $u_1, u_2, v_1, v_2 \in H$ ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett

$$\begin{aligned}
(u_1 + iu_2) + (v_1 + iv_2) &= \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in H} + i\underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in H} , \\
(\alpha + i\beta)(v_1 + iv_2) &= \underbrace{(\alpha v_1 - \beta v_2)}_{\in H} + i\underbrace{(\beta v_1 + \alpha v_2)}_{\in H} , \\
\langle u_1 + iu_2, v_1 + iv_2\rangle &= \langle u_1, v_1\rangle + i\langle u_2, v_1\rangle - i\langle u_1, v_2\rangle + \langle u_2, v_2\rangle \ .
\end{aligned}$$

Ez az észrevétel motiválja az alábbi definíciót.

Definíció. Egy $\mathbb{R}$-fölötti $H, \langle\ ,\ \rangle$ belső-szorzat tér mellett

$$H \oplus iH := \{v_1 \oplus iv_2 :\ v_1, v_2 \in H\} ,$$

ahol a $v_1 \oplus iv_2$ alakú kifejezések formális szimbólumok ellátva a következő $+, \lambda\cdot$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ műveletekkel:

$$\begin{aligned}
(u_1 \oplus iu_2) + (v_1 \oplus iv_2) &:= (u_1 + v_1) \oplus i(u_2 + v_2) \\
(\alpha + i\beta)(v_1 \oplus iv_2) &:= (\alpha v_1 - \beta v_2) \oplus (\beta v_1 + \alpha v_2)
\end{aligned}$$

az összes $u_1, u_2, v_1, v_2 \in H$ vektorokkal ill. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstansokkal.
A $H \oplus iH$ elempárjaira bevezetjük a

$$\langle u_1 \oplus iu_2, v_1 \oplus iv_2\rangle_{\mathbb{C}} = \langle u_1, v_1\rangle + i\langle u_2, v_1\rangle - i\langle u_1, v_2\rangle + \langle u_2, v_2\rangle$$

kiterjesztését a $\langle\ ,\ \rangle$ belső-szorzatnak.

Tétel. *A $H \oplus iH$ tér $\mathbb{C}$-fölötti vektortér a $+, \lambda\cdot$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ műveletekkel. Ebben $H \oplus 0$ valós altér, amely izomorf H-val (a triviális $h \mapsto h \oplus 0$ leképezéssel) és $H \oplus iH = (H \oplus 0) + i(H \oplus 0)$. A $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$ művelet ($\mathbb{C}$-fölötti) belső-szorzat $H \oplus iH$-n, amelyre $\langle\ ,\ \rangle = \langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}} | H \times H$.*

Bizonyítás. Közvetlen verifikálás, amely imitálja a Megjegyzés formuláinak levezetését.

Definíció. Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, a $H, \langle\ ,\ \rangle$ valós belső-szorzat tér **komplex kiterjesztés**e a $H \oplus iH, \langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$ komplex belső-szorzat tér, amelyet egyszerűen $H_{\mathbb{C}}, \langle\ ,\ \rangle$-val jelölünk (a félreértés veszélye nélkül). Minden $h \in H$ vektort azonosítunk a $H_{\mathbb{C}}$-beli $h \oplus 0$-val.

Megjegyzés. A $H = H \oplus 0$ azonosítás szerint $iH = i(H \oplus 0) = (0 \oplus H)$, és így $H_{\mathbb{C}} = H + iH$.

Propozíció. *Ha H, K valós vektorterek, minden lineáris $A : H \to K$ leképezésnek van egy egyértelmű komplex-lineáris $A_{\mathbb{C}} : H_{\mathbb{C}} \to K_{\mathbb{C}}$ kiterjesztése.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\widetilde{A} : H_{\mathbb{C}} \to K_{\mathbb{C}}$ olyan komplex-lineáris leképezés, amelyre
$\widetilde{A}x = Ax$ $(x \in H = H \oplus 0)$. Ekkor szükségképpen

$$\widetilde{A}(x + iy) = \widetilde{A}x + i\widetilde{A}y = Ax + iAy(= (Ax) \oplus i(Ay)) \qquad (x, y \in H)$$

lehet csak. Ez mutatja $\widetilde{A}$ egyértelműségét, mivel

$$\forall\, \widetilde{h} \in H_{\mathbb{C}} \quad \exists! x, y \in H \qquad \widetilde{h} = x + iy(= x \oplus iy)\ .$$

Másrészt az $A_{\mathbb{C}} : x \oplus iy \mapsto (Ax) \oplus i(Ay)$ leképezés valóban $\mathbb{C}$-lineáris $H \oplus iH \to K \oplus iK$.

Pythagoras tétel, Schwarz egyenlőtlenség

Definíció. Az $x, y \in H$ vektorok **merőleges**ek egymásra, ha a belső-szorzatuk 0. Az $x \in H$ vektor **normá**ja (vagy **hossz**a) az önmagával vett belső-szorzatának gyöke. Jelölésben:

$$x \perp y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \langle x, y\rangle = 0\ ,$$
$$\|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2}\ .$$

Lemma. (Pythagoras tétel). $x \perp y \;\Rightarrow\; \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Bizonyítás. Ha $\langle x, y\rangle = 0$, akkor $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle^- = \overline{0} = 0$ és

$$\langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \underbrace{\langle x, y\rangle}_{0} + \underbrace{\langle y, x\rangle}_{0} + \langle y, y\rangle\ .$$

Tétel. *Fennállnak a következő alapvető relációk:*

$$\begin{array}{cr}
\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| & (\text{HOMOGENITÁS}) \\
|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\| & (\text{SCHWARZ EGYENLŐTLENSÉG}) \\
\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| & (\Delta - \text{EGYENLŐTLENSÉG})
\end{array}$$

minden $x, y \in H$ *és* $\alpha \in \mathbb{K}$ *mellett.*

BIZONYÍTÁS. 1) $\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle = |\alpha|^2\|x\|^2$.

2) Az $x = 0$ ill. $y = 0$ esetek triviálisak. Tegyük fel, hogy $x, y \ne 0$. Tekintsük az

$$e_1 := \|x\|^{-1}x \ , \quad e_2 := \|y\|^{-1}y$$

vektorokat. A belső-szorzat harmadik tulajdonsága (definit volta) miatt $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle > 0$, azaz $\|x\| > 0$, és hasonlóan $\|y\| > 0$. Így e_1, e_2 jól-definiált, sőt

$$\|e_k\| = 1 \qquad (k = 1, 2)$$

a már bizonyított 1) alapján. Észrevétel:

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\| \ \Leftrightarrow\ |\langle e_1, e_2\rangle| \le 1 \ .$$

Az $|\langle e_1, e_2\rangle| \le 1$ reláció bizonyításához legyen

$$p_1 := \langle e_2, e_1\rangle e_1 \ , \quad p_2 := e_2 - p_1 \ .$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
p_1 + p_2 = e_2 \ , \quad p_1 \perp p_2 \ \Leftarrow\ \langle p_2, e_1\rangle &= \langle e_2 - p_1, e_1\rangle = \\
&= \langle e_2, e_1\rangle - \langle p_1, e_1\rangle = \\
&= \langle e_2, e_1\rangle - \big\langle \langle e_2, e_1\rangle e_1, e_1\big\rangle = \\
&= \langle e_2, e_1\rangle - \langle e_2, e_1\rangle \underbrace{\|e_1\|^2}_{1} = 0 \ .
\end{aligned}$$

A Pythagoras tételt alkalmazva,

$$|\langle e_1, e_2\rangle|^2 = \|p_1\|^2 \le \|p_1\|^2 + \|p_2\|^2 = \|e_2\|^2 = 1 \ .$$

3) Fennáll

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \underbrace{\langle y, x\rangle}_{\langle x,y\rangle^-} + \langle y, y\rangle = \\
&= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \le \\
&\le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \ .
\end{aligned}$$

Távolság, a műveletek folytonossága

Definíció. Az $x, y \in H$ pontok **távolsága** $d(x, y) := \|x - y\|$.

Emlékeztető. Általában is, egy $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ függvény **metrika** az X halmazon, ha

$$
\begin{aligned}
&d(x, y) = d(y, x) \geq 0 \ , \\
&d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \ , \\
&d(x, y) = 0 \iff x = y \qquad (x, y, z \in X) \ .
\end{aligned}
$$

Egy vektortér **transzlációi** az $x \mapsto x + a$ alakú eltolások.

Tétel. *d transzláció-invariáns metrika H-n.*

Bizonyítás. Minden $a, x, y, z \in H$ esetén

$$
\begin{aligned}
&d(x + a, y + a) = \|(x + a) - (y + a)\| = \|x - y\| = d(x, y) \ , \\
&x \neq y \ \Rightarrow \quad d(x, y) = \|x - y\| = \langle x - y, x - y\rangle^{1/2} = \langle y - x, y - x\rangle = d(y, x) > 0 \ , \\
&d(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = 0 \ , \\
&d(x, y) + d(y, z) = \|x - y\| + \|y - z\| \geq \|(x - y) + (y - z)\| = \|x - z\| = d(x, z) \ .
\end{aligned}
$$

Emlékeztető. Ha X, d és X', d' metrikus terek, egy $f : X \to X'$ leképezés **folytonos** a d, d' metrikák topológiája szerint, ha minden $x, x_1, x_2, \ldots \in X$ sorozatra

$$d(x_n, x) \to 0 \ \Rightarrow \ d'(f(x_n), f(x)) \qquad (n \to \infty) \ .$$

Tétel. *A H-beli $(x, y) \mapsto x+y$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ műveletek folytonosak*.*

Bizonyítás. Legyen $x, x_1, x_2, \ldots \in H$, $y, y_1, y_2, \ldots \in H$ ill. $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathbb{K}$ sorozatok. Tegyük fel, hogy

$$d(x_n, x), d(y_n, y), |\alpha_n - \alpha| \to 0 \qquad (n \to \infty) \ .$$

Ekkor az $u_n := x_n - x$, $v_n := y_n - y$, $\delta_n := \alpha_n - \alpha$ sorozatokra

$$\|u_n\|, \|v_n\|, |\delta_n| \to 0 \qquad (n \to \infty) \ .$$

Ezekkel $n \to \infty$ mellett

$$\begin{aligned}
d(x_n + y_n, x + y) &= \|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|u_n + v_n\| \leq \\
&\leq \|u_n\| + \|v_n\| \to 0 \ , \\
d(\alpha_n x_n, \alpha x) &= \|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|(\alpha + \delta_n)(x + u_n) - \alpha x\| = \\
&= \|\delta_n x + \alpha u_n + \delta_n u_n\| \leq \\
&\leq \|\delta_n x\| + \|\alpha u_n\| + \|\delta_n u_n\| = \\
&= |\delta_n| \cdot \|x\| + |\alpha| \cdot \|u_n\| + |\delta_n| \cdot \|u_n\| \to 0 \ , \\
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x + u_n, y + v_n\rangle - \langle x, y\rangle| = \\
&= |\langle x, v_n\rangle + \langle u_n, y\rangle + \langle u_n, v_n\rangle| \leq \\
&\leq |\langle x, v_n\rangle| + |\langle u_n, y\rangle| + |\langle u_n, v_n\rangle| \leq \\
&\leq \|x\| \cdot \|v_n\| + \|u_n\| \cdot \|y\| + \|u_n\| \cdot \|v_n\| \to 0 \ .
\end{aligned}$$

Következmény. *A norma és a távolságfüggvény folytonos H-n.*

Bizonyítás. A Tétel szerint $x \mapsto \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$, $(x, y) \mapsto d(x, y) = \|x + (-1)y\|$ folytonos leképezések összetételei.

Ortogonális rendszerek

Definíció. Az $E \subset H$ vektorrendszer **ortogonális** (rövidítve: ORT), ha $e \perp f$ $(e \neq f, e \in E)$. Az egységnyi hosszú vektorokból álló ortogonális rendszereket **ortonormált**nak (rövidítve: ORTN) nevezzük. Azaz

$$\frac{\{e_1, \ldots, e_n\} \ \text{ORTN} \subset H \ \text{def}}{\Leftrightarrow \ \langle e_j, e_k\rangle = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, \ldots, n) \ .}$$

Lemma. *Ha $0 \notin S := \{x_1, \ldots, x_n\}$ ORT $\subset H$ és minden $x_k \in S$ vektorhoz $\kappa_k \in \mathbb{K}$ olyan konstans, hogy $|\kappa_k| = 1/\|x\|$, akkor $E := \{\kappa_1 x_1, \ldots, \kappa_n x_n\}$ olyan ortonormált rendszer H-ban, amelyre* $\operatorname{Span} E = \operatorname{Span} S$.

Bizonyítás. Az E rendszer ortonormált, ugyanis

$$\|\kappa_j x_j\| = |\kappa_j| \cdot \|x_j\| = 1 \ , \quad \langle \kappa_j x_j, \kappa_k x_k\rangle = \kappa_j \overline{\kappa_k} \underbrace{\langle x_j, x_k\rangle}_{0} = 0 \qquad (j \neq k = 1, \ldots, n).$$

Másrészt $\operatorname{Span} E = \sum_{j=1}^n \mathbb{K} \cdot (\kappa_j x_j) = \sum_{j=1}^n (\mathbb{K} \cdot \kappa_j) x_j = \sum_{j=1}^n \mathbb{K} x_j = \operatorname{Span} S$.

Lemma. *Legyen $E := \{e_1, \ldots, e_n\}$ ORTN $\subset H$ és $x \in H$. Ekkor az $U := \operatorname{Span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ altérbeli vektorok E szerinti felbontása egyértelmű. Nevezetesen*

$$h = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \;\Rightarrow\; \alpha_k = \langle h, e_k \rangle \quad (1 \le k \le n) \ .$$

Bizonyítás. Bármelyik k indexre

$$\begin{aligned} \langle h, e_k \rangle &= \Big\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, e_k \Big\rangle = \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \underbrace{\langle e_j, e_k \rangle}_{\delta_{jk}} = \alpha_k \ . \end{aligned}$$

Következmény. *Ortonormált rendszerek lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. Ha $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ORTN$\subset H$ és $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$, akkor $\lambda_k = \langle 0, e_k \rangle = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Propozíció. (Parseval-formula). *Ha E $ORTN \subset H$ és $x, y \in \operatorname{Span} E$, akkor*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{e \in E} \langle x, e \rangle \cdot \langle y, e \rangle^- \ .$$

Bizonyítás. Legyen $x, y \in \operatorname{Span} E$. Ekkor van olyan $n (\in \mathbb{N})$ és vannak olyan $e_1, \ldots, e_n \in E$ páronként különböző vektorok, hogy

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \quad , \quad y = \sum_{k=1}^n \eta_k e_k \ ,$$
$$\text{ahol} \quad \xi_k = \langle x, e_k \rangle \quad , \quad \eta_k = \langle y, e_k \rangle \qquad (1 \le k \le n) \ .$$

Ha $e \in E \setminus \{e_1, \ldots, e_n\}$, akkor $\langle x, e \rangle = \sum_{k=1}^n \xi_k \langle e_k, e \rangle = \sum_{k=1}^n \xi_k 0 = 0$, és hasonlóan $\langle y, e \rangle = 0$. Ezért

$$
\begin{aligned}
\sum_{e\in E}\langle x,e\rangle\cdot\langle y,e\rangle^- &= \sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle\cdot\langle y,e_k\rangle^- = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\xi_k\overline{\eta_k} = \sum_{k,\ell=1}^{n}\xi_k\overline{\eta_\ell}\delta_{k\ell} = \sum_{k,\ell=1}^{n}\xi_k\overline{\eta_\ell}\langle e_k,e_\ell\rangle = \\
&= \Big\langle\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k,\sum_{\ell=1}^{n}\eta_\ell e_\ell\Big\rangle = \langle x,y\rangle\ .
\end{aligned}
$$

Megjegyzés. Az elmélet úgy is felépíthető, hogy lineárisan független rendszerek helyett ortonormáltakat használunk, mint látni fogjuk.

Kérdés. A $\sum_k\langle h,e_k\rangle e_k$ vektor nemcsak a $h\in \mathrm{Span}_k e_k$ esetben képezhető. Mit jelent általában?

> **Tétel.** *Legyen* $\{e_1,\dots,e_n\}_{\text{ORTN}}\subset H$, $U:=\mathrm{Span}_k e_k$ *és* $h\in H$. *Ekkor az* $u:=\sum_k\langle h,e_k\rangle e_k$ *vektor a következő módokon jellemezhető:*
>
> $$
> \begin{aligned}
> &1)\quad u=\big[v\in U:\ d(h,v)=\min d(h,U)\big]\ ,\\
> &2)\quad u=\big[v\in U:\ h-v\perp U\big]\ .
> \end{aligned}
> $$
>
> *Azaz geometriai szempontból u az U altér egyedüli legközelebbi pontja h-hoz, ill. az az egyedüli pont U-ból, amelyből a h-ba mutató vektor merőleges minden U-beli vektorra.*

Bizonyítás. Legyen $v:=\sum_k\beta_k e_k$ az U altér egy tetszőleges eleme.

2)
$$
\begin{aligned}
\langle h-u,e_k\rangle &= \langle h,e_k\rangle-\langle u,e_k\rangle = \\
&= \langle h,e_k\rangle-\Big\langle\textstyle\sum_j\langle h,e_j\rangle\underbrace{e_j,e_k}_{\delta_{jk}}\Big\rangle = \\
&= \langle h,e_k\rangle-\langle h,e_k\rangle = 0 \qquad \forall\,k\ ,\\
\langle h-u,v\rangle &= \textstyle\sum_j\overline{\beta_k}\langle h-u,e_k\rangle = 0\ .
\end{aligned}
$$

1) Mivel $u,v\in U$, az U altér volta miatt $u-v\in U$, és így a bizonyított 2) szerint $h-u\perp u-v$. Vagyis a Pythagoras tételt használva,

$$
\begin{aligned}
d(h,v)^2 &= \|h-v\|^2 = \|(h-u)+(u-v)\|^2 = \\
&= \|(h-u)\|^2+\|(u-v)\|^2 > |(h-u)\|^2 \qquad (u\neq v)\ .
\end{aligned}
$$

Gram-Schmidt ortogonalizáció

Tétel. *Legyen* $z_1, \dots, z_n \in H$. *Tegyük fel, hogy*

$$z_1 \neq 0 \ , \quad z_k \notin \mathrm{Span}_{j=1}^{k-1} z_j \quad (k = 2, \dots, n) \ .$$

Ekkor

$$\exists! \ \{e_1, \dots, e_n\}_{\text{ORTN}} \subset H \qquad \begin{array}{l} \mathrm{Span}_{j=1}^{k} e_j = \mathrm{Span}_{j=1}^{k} z_j \ \text{ és} \\ \langle e_k, z_k \rangle > 0 \qquad (k = 1, \dots, n) \ . \end{array}$$

Bizonyítás. Legyen (a $\sum_{j \in \emptyset} u_j := 0$ konvencióval) $k = 1, 2, \dots, n$ mellett rendre

$$(*) \qquad e_k := \|\widehat{z}_k\|^{-1} \widehat{z}_k \quad \text{ahol} \quad \widehat{z}_k := z_k - \sum_{j:\ j<k} \langle z_k, e_j \rangle e_j \ .$$

Indukcióval megmutatjuk, hogy az e_k vektor jól-definiált (azaz $\widehat{z}_k \neq 0$) mindig, és hogy e_k az egyedüli olyan vektor, amelyre

$$\begin{array}{l} \|e_k\| = 1 \ , \quad e_k \perp e_1, \dots, e_{k-1} \ , \quad \langle e_k, z_k \rangle > 0 \ , \quad \mathrm{Span}_{j=1}^{k} e_j = \mathrm{Span}_{j=1}^{k} z_j \ , \\ \text{ha már} \quad \{e_j : \ j < k\}\, ORTN \subset H \ \text{ és } \ \mathrm{Span}_{j:\ j<k} e_j = \mathrm{Span}_{j:\ j<k} z_j \ . \end{array}$$

A $k = 1$ eset követelménye e_1-re az, hogy ($\mathrm{Span}\, e_1 = \mathrm{Span}\, z_1$ miatt) valamilyen $\alpha \in \mathbb{K}$-ra $e_1 = \alpha z_1$ legyen, és ezzel $1 = \|e\| = |\alpha| \cdot \|z_1\|$ ill. $0 < \langle e_1, z_1 \rangle = \alpha \|z_1\|^2$. Ezek a feltételek pontosan $\alpha := \|z_1\|^{-1}$-re, vagyis az $e_1 := \|z_1\|^{-1} z_1 = \|\widehat{z}_1\|^{-1} \widehat{z}_1$ választára teljesülnek.
Tegyük fel, hogy $\{e_j : \ j < k\}\, ORTN \subset H$ és $\mathrm{Span}_{j=1}^{k-1} z_j = U_{k-1} := \mathrm{Span}_{j=1}^{k-1} e_j$. Legyen $u_k := \sum_{j=1}^{k-1} \langle z_k, e_j \rangle e_j$. Mivel definíció szerint $u_k \in U_{k-1}$ és mivel $z_k \notin \mathrm{Span}_{j=1}^{k-1} z_j = U_{k-1}$, szükségképpen $u_k \neq z_k$, azaz $\|\widehat{z}_k\| = \|z_k - u_k\| > 0$, és így az e_k vektor jól-definiált és $\|e_k\| = 1$. Az "Ortogonális rendszerek" alfejezet Tétele szerint

$$\widehat{z}_k = z_k - u_k \perp U_{k-1} \ .$$

Tehát, mivel $\{e_1, \dots, e_{k-1}\}\, ORTN \subset U_{k-1}$, innen $\{e_1, \dots, e_k\}\, ORTN \subset H$. Másrészt

$$\langle e_k, z_k \rangle = \|\widehat{z}_k\|^{-1} \langle \widehat{z}_k, \widehat{z}_k + u_{k-1} \rangle = \langle \widehat{z}_k, \widehat{z}_k \rangle = \|\widehat{z}_k\| > 0 \ .$$

Mivel pedig $e_k = \|z_k - u_k\|^{-1}(z_k - u_k) \in \mathrm{Span}(\{z_k\} \cup U_{k-1})$ és $z_k = u_{k-1} + \|z_k - u_k\| e_k \in \mathrm{Span}(U_{k-1} \cup \{e_k\})$, fennáll

$$\begin{aligned} \mathrm{Span}_{j=1}^{k} e_j &= \mathrm{Span}(\{e_k\} \cup \mathrm{Span}_{j=1}^{k-1} e_j) = \mathrm{Span}(\{e_k\} \cup U_{k-1}) = \\ &= \mathrm{Span}(\{z_k\} \cup U_{k-1}) = \mathrm{Span}(\{z_k\} \cup \mathrm{Span}_{j=1}^{k-1} z_j) = \mathrm{Span}_{j=1}^{k} e_j \ . \end{aligned}$$

Tehát az e_k vektor teljesíti a kívánalmakat. Tegyük fel, hogy e'_k szintén teljesíti a kívánalmakat. Mivel most $e'_k \in \mathrm{Span}_{j=1}^k z_j = \mathrm{Span}_{j=1}^k e_j$, és az $\{e_1, \dots, e_n\}$ rendszer ortonormált, $e'_k = \sum_{j=1}^n \langle e'_k, e_j \rangle e_j$. Az $e'_k \perp e_1, \dots, e_{k-1}$ feltétel így azt jelenti, hogy $e'_k = \alpha_k e_k$, ahol $\alpha_k := \langle e'_k, e_k \rangle$. Az $\|e'_k\| = 1$ feltétel szerint $|\alpha_k| = 1$. Végül, mivel $z_k = \|z_k - u_k\| e_k + u_k$, a $\langle e'_k, z_k \rangle > 0$ feltételből $0 < \alpha_k \langle e_k, z_k \rangle = \alpha_k \|z_k - u_k\|$. Tehát $\alpha_k > 0$ és innen $\alpha_k = 1$, azaz $e'_k = e_k$ lehet csak.

> Következmény. *Teszőleges $x_1, \dots, x_m \in H$ sorozathoz található olyan legfeljebb m elemű E $ORTN \subset H$, amelyre* $\mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_m\} = \mathrm{Span}\, E$.

Bizonyítás. Elhagyva az $x_1, \dots, x_m$ sorozatból azokat a tagokat, amelyek az őket megelőző tagok lineáris kombinációi, a maradó $z_1 := x_{k_1}, \dots, z_n := x_{k_n}$ részsorozatra alkalmazhatjuk a Tételt.

Gyakorlat. A $\{v_1, \dots, v_n\}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha $v_1 \neq 0$ és $v_k \notin \mathrm{Span}_{j=1}^{k-1} v_j$ $(2 \leq k \leq n)$.

Definíció. A $z_1, \dots, z_n \in H$ vektorsorozatból a $(*)$ rekurzív formulával képzett $(e_1, \dots, e_n)$ ortonormált rendszer$(z_1, \dots, z_n)$ **Gram-Schmidt ortogonalizált**ja. Maga a $(*)$ rekurzió végrehajtása a **Gram-Schmidt ortogonalizáció**.

Megjegyzés. A Gram-Schmidt ortogonalizáció lehetővé teszi, hogy a belsőszorzattal ellátott vektortérben a lineárisan független rendszereket velük algebrai szempontból ekvivalens ortonormált rendszerekkel helyettesítsük. Ugyanis, ha $\{z_1, \dots, z_n\}$ lin.fgtlen$\subset H$, akkor a $(z_1, \dots, z_n)$ sorozat$(e_1, \dots, e_n)$ Gram-Schmidt ortogonalizáltját véve, a $h \mapsto \sum_{k=1}^n \langle h, e_k \rangle e_k$ leképezés lineáris és $\mathrm{Span}_{k=1}^n z_k = \mathrm{Span}_{k=1}^n e_k \leftrightarrow \mathrm{Span}_{k=1}^n z_k$.

Példa. Legyen $w : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ egy tetszőlegesen rögzített pozitív értékű folytonos függvény. A valós polinomok $\mathrm{Pol}_{\mathbb{R}}$ terén a

$$\langle p, q \rangle_w := \int_{-1}^{1} p(\xi) q(\xi) w(\xi) d\xi \qquad (p, q \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{R}})$$

művelet belsőszorzat. Az $\{1, \mathbf{z}, \mathbf{z}^2, \dots\}$ sorozatra mindig alkalmazhatjuk a Gram-Schmidt ortogonalizációt $\langle\ ,\ \rangle_w$ szerint. Következésképpen létezik (pontosan egy) olyan $p_{0,w}, p_{1,w}, p_{2.w}, \dots$ polinonsorozat, amelyre

$$\int_0^1 p_{n,w}(\xi) p_{m,w}(\xi) w(\xi) d\xi = \delta_{nm} \ , \quad \deg(p_{n,w}) = n$$

minden $n, m = 0, 1, 2, \dots$ indexre. A $p_{n,w}$ polinom neve a w súlyfüggvény szerinti n-edfokú **ortogonális polinom**.

Gyakorlat. Határozzuk meg az $S : \xi \mapsto 1$ súlyfüggvény szerinti $p_{S,k}$ $k = 0, \dots, 5$ ún. **Legendre polinom**okat.

Teljes ortonormált rendszerek

Definíció. Az E $ORTN \subset H$ rendszer **teljes** (H-ban), ha tovább nem bővíthető ortonormált módon, azaz ha $\not\exists\ e \in H \setminus E \quad E \cup \{e\}\ ORTN \subset H$. A "teljes ortonormált rendszer" kifejezésre a TON rövidítést fogjuk használni.

> **Lemma.** *Pontosan akkor $E\ TON \subset H$, ha $\nexists\ f \in H \quad 0 \neq f \perp E$.*

Bizonyítás. Ha $E\ ORTN \subset H$ és $0 \neq f \perp E$, akkor az $e := \|f\|^{-1} f$ vektor jól-definiált, $\|e\| = 1$ és $e \perp E$. Tehát ilyenkor $E \neq E \cup \{e\}\ ORTN \subset H$.

> **Következmény.** *Ha $E\ ORTN \subset H$ és $\operatorname{Span} E = H$, akkor $E\ TON \subset H$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $H = \operatorname{Span} E$ és $x \perp E$. Ekkor $x \in \operatorname{Span} E$, és így a Parseval formula szerint $\|x\|^2 = \sum_{e \in E} |\langle x, e\rangle e|^2 = \sum_{e \in E} 0 = 0$, azaz $x = 0$.

> **Tétel.** *Belső-szorzat térben bármely ortonormált rendszer teljessé bővíthető.*

Bizonyítás. Egy vektorrendszer pontosan akkor ortonormált, ha bármely 1- és 2-elemű részrendszere ortonormált. Tehát a H tér részhalmazainak ortonormáltsága **végesen meghatározott** tulajdonság.* Így a Teichmüller-féle logikai axióma szerint (ami a Kiválasztási Axióma egyik ekvivalense) a H tér minden ortonormált részhalmaza belefoglalható egy maximális ortonormált részhalmazba.

Kérdés. Igaz-e hogy $E\ TON \subset H$ esetén mindig $H = \operatorname{Span} E$?

Válasz: Általában NEM.

Példa. A négyzetesen összegezhető számsorozatok

$$\ell^2 := \{(\xi_1, \xi_2, \dots) : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty\}$$

* Ld. a "Lineáris függetlenség, bázis" alfejezetben.

tere a koordinátánkénti lineáris kombinációkkal vektortér, amelyen (a Schwarz egyenlőtlenség következtében) jól-definiált és belső-szorzat a

$$\big\langle(\xi_1,\ldots),(\eta_1,\ldots)\big\rangle := \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\overline{\eta_n}$$

művelet. Itt az egységvektorok

$$E := \{\underbrace{(1,0,0,\ldots)}_{e_1},\ \underbrace{(0,1,0,\ldots)}_{e_2},\ldots\}$$

családja TON. Bizonyítás: Ha $(\xi_1,\xi_2,\ldots)\perp E$, akkor minden k mellett $0 = \langle(\xi_1,\xi_2,\ldots),e_k\rangle = \xi_k$. Ugyanakkor

$$\operatorname{Span} E = \{(\xi_1,\xi_2,\ldots):\ \exists\, m \quad \xi_{m+1}=\xi_{m+2}=\cdots=0\}\neq \ell^2\ .$$

Lemma. *Ha $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ és E TON $\subset H$, akkor $E\cap(iE)=\emptyset$ és $E\cup(iE)$ TON $\subset H_{\mathbb{R}}$.*

Bizonyítás. Ha $e\neq f, e\in E$, akkor

$$\operatorname{Re}\langle e,ie\rangle = \operatorname{Re}(-i)=0\ ,\operatorname{Re}\langle e,f\rangle=\operatorname{Re}(0)=0=\operatorname{Re}\langle e,if\rangle\ ,$$
$$\operatorname{Re}\langle e,e\rangle=\operatorname{Re}\langle ie,ie\rangle=\operatorname{Re}\langle if,if\rangle=\operatorname{Re}(1)=1\ .$$

Ez mutatja, hogy az $E\cup(iE)$ rendszer ortonormált
Tegyük fel, hogy $x\perp_{\mathbb{R}} E\cup(iE)$ a $H_{\mathbb{R}}$ térben. Ekkor $0=\operatorname{Re}\langle x,e\rangle=\operatorname{Re}\langle x,ie\rangle$ $e\in E$, ahonnan $\langle x,e\rangle=0$ $e\in E$. Azaz $x\perp E$ H-ban, és így $x=0$.

Euklideszi tér ekvivalenciája $\mathbb{K}^N$-nel

Lemma. *Ha E véges ORTN $\subset H$, akkor ekvivalensek:*
1) E TON $\subset H$, 2) $\operatorname{Span} E = H$.

Bizonyítás. Legyen $E:=\{e_1,\ldots,e_n\}$.
1) $\Rightarrow$ 2): Tegyük fel, hogy $x\in H\setminus \operatorname{Span} E$. Ekkor az $\widetilde{x}:=x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k$ vektorra $0\neq\widetilde{x}\perp e_1,\ldots,e_n$, vagyis az E ortonormált rendszer nem teljes H-ban.
2) $\Rightarrow$ 1): A "Teljes ortonormált rendszerek" alfejezetbeli első Következmény.

Tétel. *Euklideszi térben mindig van véges teljes ortonormált rendszer.*

Bizonyítás. Feltevés szerint van olyan véges $0 \neq x_1, x_2, \ldots, x_N \in H$ sorozat, amelyre $H = \text{Span}\{x_1, \ldots, x_N\}$. Elhagyva közülük azokat a tagokat, amelyek az előzőek lineáris kombinációi, vehető $x_k \notin \text{Span}_{j=1}^{k-1} x_j$ $(2 \leq k \leq N)$. Gram-Schmidt ortogonalizációt végrehajtva az $x_1, \ldots, x_N$ sorozaton, kapunk egy olyan ortonormált $e_1, \ldots, e_N \in H$ vektorsorozatot, amelyre $x_k = \sum_{j=1}^{k} \langle x_k, e_j \rangle e_j$ $(k = 1, \ldots, N)$. Ezzel $H = \text{Span}_{k=1}^{N} x_k = \text{Span}_{j=1}^{N} e_j$, és így a Lemma szerint $\{e_1, \ldots, e_N\}$

$TON \subset H$.

Kérdés. Ugyanannyi elemből állnak-e mindig egy Euklideszi tér TON rendszerei? Válasz: IGEN, mint látni fogjuk a "Householder tétele" alfejezetben.

Definíció. Legyen $E := (e_1, \ldots, e_N)$ $ORTN \subset H$. Az $X_k^E : h \mapsto \langle h, e_k \rangle$ függvények a H belső-szorzat tér E-szerinti k-adik **koordinátá**ja $(k = 1, \ldots, N)$.

> **Propozíció.** *Legyen H Euklideszi tér és $E := (e_1, \ldots, e_N)$ $TON \subset H$. Ekkor az E-szerinti $X^E : h \mapsto \big(X_1^E(h), \ldots, X_N^E(h)\big)$ koordinátázás távolságtartó lineáris $H \leftrightarrow \mathbb{K}^N$ leképezés, amelynek inverze $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \mapsto \sum_{k=1}^{N} \xi_k e_k$.*

Bizonyítás. A koordináta-függvények lineáris $H \to \mathbb{K}$ funkcionálok, így $X^E : H \to \mathbb{K}^N$ lineáris. A Parseval-formula szerint

$$\|h\|^2 = \langle h, h \rangle = \sum_{k=1}^{N} \langle h, e_k \rangle \langle h, e_k \rangle^- = \sum_{k=1}^{N} |\langle h, e_k \rangle|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} |X_k^E(h)|^2 = \|X^E(h)\|^2 \qquad (h \in H) .$$

Tehát X^E normatartó, és ezért távolságtartó is. Távolságtartó leképezés injektív (különböző pontokat különbözőkbe visz). Legyen $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{K}^N$ tetszőleges. Ekkor a $h := \sum_{k=1}^{N} \xi_k e_k$ vektorra $X_k^E(h) = \langle h, e_k \rangle = \xi_k$ $(\forall k)$, mivel az E rendszer ortogonális.

> **Tétel.** 1) *Lineáris leképezés Euklideszi téren folytonos.*

2) Euklideszi téren folytonos valós függvénynek van maximuma és minimuma az egységgömbön.

Bizonyítás. 1) Legyen $\{e_1, \ldots, e_N\}$ $TON \subset H$ és $A : H \to K$ lineáris. Ekkor

$$Ax = A\Big(\sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k \rangle e_k\Big) = \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k \rangle A e_k \qquad (x \in H) .$$

Vagyis a belső-szorzat és a vektorműveletek folytonossága miatt A véges sok folytonos leképezés összetétele.

A Propozíció szerint az egységgömb topológiailag ekvivalens a $\mathbb{K}^N$ tér $\{\xi : |\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_N|^2 = 1\}$ egységgömbjével (a bevezetett távolságok szerinti topológiában), tehát **kompakt**. Így rajta a folytonos függvények fölveszik szélső-értékeiket.

Tükrözések

Emlékeztető. Az Euklideszi síkot egy Descartes koordinátarendszer segítségével $\mathbb{R}^2$-vel azonosítva, az u egységvektorra merőleges és origón áthaladó egyenesre való tükrözés az $x \mapsto x - 2\langle x, u\rangle u$ transzformáció (ahol a belső-szorzat $\big\langle(\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2)\big\rangle := \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2$).

Definíció. Az $u \in H$, $\|u\| = 1$ egységvektorra a

$$T_u : \ x \mapsto x - 2\langle x, u\rangle u$$

leképezés ($H \to H$) az u-**tükrözés**.

Lemma. *A tükrözések reflexív belső-szorzat tartó transzformációk. Azaz $u \in H$, $\|u\| = 1$ esetén*

1) $\mathrm{id}_H = T_u^2 (:= T_u \circ T_u)$, 2) $\langle T_u x, T_u y\rangle = \langle x, y\rangle \qquad (x, y \in H)$.

Bizonyítás. 1) Tetszőleges $x \in H$ mellett

$$\begin{aligned} T_u^2(x) &= T_u(x) - 2\langle T_u(x), u\rangle u = \\ &= x - 2\langle x,u\rangle u - 2\big\langle x - 2\langle x,u\rangle u, u\big\rangle u = \\ &= x - 2\big[\langle x,u\rangle + \langle x,u\rangle - 2\langle x,u\rangle \underbrace{\|u\|^2}_{1}\big] = x \ . \end{aligned}$$

2) Legyen $x, y \in H$. Ekkor

$$\begin{aligned} \langle T_u(x), T_u(y)\rangle &= \big\langle x - 2\langle x,u\rangle u, y - 2\langle y,u\rangle u\big\rangle = \\ &= \langle x,y\rangle - 2\langle x,u\rangle \underbrace{\langle u,y\rangle}_{\langle y,u\rangle^-} - 2\langle y,u\rangle^- \langle x,u\rangle + 4\langle x,u\rangle\langle y,u\rangle^- \underbrace{\|u\|^2}_{1} = \\ &= \langle x,y\rangle \ . \end{aligned}$$

Következmény. *$T_u : H \leftrightarrow H$ és $T_u^{-1} = T_u$. Tehát ha $u_1, \ldots, u_m$ egységvektorok, $T_{u_1} \cdots T_{u_m} : H \leftrightarrow H$ és $(T_{u_1} \cdots T_{u_m}^{-1} = T_{u_m}^{-1} \cdots T_{u_1}^{-1}$.*

Lemma. $\langle T_u(x), x\rangle \in \mathbb{R} \quad (x \in H)$.

Bizonyítás. Fennáll

$$\begin{aligned}\langle T_u(x), x\rangle &= \big\langle x - 2\langle x,u\rangle u, x\big\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x,u\rangle\langle u,x\rangle = \\ &= \|x\|^2 - 2|\langle x,u\rangle| \in \mathbb{R}\ .\end{aligned}$$

Propozíció. *Az egymától különböző $x, y \in H$ vektorok pontosan akkor vihetők át egymásba tükrözéssel, ha $\|x\| = \|y\|$ és $\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}$. Ez utóbbi esetben az $u := \|y-x\|^{-1}(y-x)$ egységvektorral $T_u : x \leftrightarrow y$.*

Bizonyítás. A feltétel szükségességét már tudjuk.
Tegyük fel, hogy $x \neq y$, $\|x\| = \|y\|$ és $\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\begin{aligned} u &:= \frac{y-x}{\|y-x\|} \quad \text{mellett} \\ T_u(x) &= x - 2\Big\langle x, \frac{y-x}{\|y-x\|}\Big\rangle \frac{y-x}{\|y-x\|} = \\ &= \Big(1 + 2\frac{\langle x, y-x\rangle}{\|y-x\|^2}\Big)x - \frac{2\langle x, y-x\rangle}{\|y-x\|^2}y\ .\end{aligned}$$

Itt

$$\begin{aligned} \frac{\langle x, y-x\rangle}{\|y-x\|^2} &= \frac{\langle x,y\rangle - \|x\|^2}{\|y\|^2 - \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle + \|x\|^2} \underset{\|x\|=\|y\|}{=}^{\langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}} \\ &= \frac{\langle y,x\rangle - \|x\|^2}{2\|x\|^2 - 2\langle y,x\rangle} = -\frac{1}{2}\ ,\end{aligned}$$

ahonnan $T_(x) = \big(1 - 2\cdot\frac{1}{2}\big)x - 2\big(-\frac{1}{2}\big)y = y$.

Következmény. *Ha $\|e\| = \|f\| = 1$, akkor létezik $\kappa \in \mathbb{K}$, amelyre $|\kappa| = 1$ és e átvihető κf-be egy olyan T_u tükrözéssel, ahol az u egységvektor e és f lineáris kombinációja.*

Bizonyítás. Ha $e = f$, akkor $-f = T_e(e)$. Az $e \neq f$, $\langle e,f\rangle \in \mathbb{R}$ eset ismert.
Ha $e \neq f$, $\langle e,f\rangle \notin \mathbb{R}$, akkor

$$\langle e, \kappa f\rangle = -|\langle e, \kappa f\rangle| < 0 \quad \text{ahol} \quad \kappa := -\langle e,f\rangle/|\langle e,f\rangle|\ .$$

Mivel most $\|\kappa f\| = |\kappa|\cdot\|f\| = 1 = \|e\|$ és $\langle e,\kappa f\rangle < 0$ miatt $e \neq \kappa f$, a Propozíció szerint $T_u(e) = \kappa f$, ahol $u := (e - \kappa f)/\|e - \kappa f\|$.

Householder tétele

Kérdés. Tükrözések egymásutánjával átvihető-e egy ortonormált rendszer egy másik, ugyanannyi tagú ortonormált rendszer vektorainak a többszöröseibe?

> **Tétel.** (Householder). *Legyen $a_1, \ldots, a_n \in H$ egy tetszőleges vektorsorozat és $E := (e_1, \ldots, e_n)$ $ORTN \subset H$. Ekkor*
>
> $$\exists\, u_1, \ldots, u_N \qquad T_{u_n} \cdots T_{u_1} a_k \in \mathrm{Span}_{j=1}^{k} e_j \quad (k = 1, \ldots, n)\ .$$
>
> *Sőt, itt $u_k \perp e_1, \ldots, e_{k-1}$ $(k = 2, \ldots, N)$ is választható.*

Bizonyítás. Az előző Következmény szerint minden $a \in H$ vektor átvihető egy tetszőlegesen adott $e \in H$ egységvektor valamilyen $\|a\|$ abszolut értékű többszörösébe T_u, $u \in \mathrm{Span}\{a, e\}$ alakú tükrözéssel. Ezért

$$\exists\, u_1 \in H \ \ \exists\, \kappa_1 \in \mathbb{K} \qquad \|u_1\| = |\kappa_1| = 1 \ \ T_{u_1}(a_1) = \kappa_1 \|a_1\| e_1\ .$$

Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk az $u_1, \ldots, u_k$ egységvektorokat úgy, hogy

$$u_\ell \perp e_j \quad (j < \ell)\,, \quad T_{u_\ell} \cdots T_{u_1}(a_t) = T_{u_t} \cdots T_{u_1}(a_t) \in \mathrm{Span}_{j=1}^{t} e_j \qquad (1 \le t \le \ell \le k).$$

Vegyük ezután az

$$(*) \qquad \widehat{a}_{k+1} := T_{u_k} \cdots T_{u_1} a_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle T_{u_k} \cdots T_{u_1} a_{k+1}, e_j \rangle e_j \ \perp e_1, \ldots, e_k$$

vetületét a $T_{u_k} \cdots T_{u_1} a_{k+1}$ vektornak (amely geometriailag nem más, mint a $\mathrm{Span}_{j=1}^{k} e_j$ altérre merőleges komponense). Ekkor

$$\begin{aligned} &\exists\, u_{k+1} \in \mathrm{Span}\{\widehat{a}_{k+1}, e_{k+1}\} \quad \exists\, \kappa_2 \in \mathbb{K} \\ &\|u_{k+1}\| = |\kappa_{k+1}| = 1 \ \ , \quad T_{u_2}(\widetilde{a}_{k+1}) = \kappa_{k+1} \|\widetilde{a}_{k+1}\| e_{k+1}\ . \end{aligned}$$

Mivel $\widehat{a}_{k+1} \perp e_1, \ldots, e_k$,

$$\begin{aligned} &u_{k+1} \perp e_1, \ldots, e_k, T_{u_\ell} \cdots T_{u_1}(a_t) \ \ (1 \le t \le \ell \le k)\ ,\ \Rightarrow \\ &T_{u_{k+1}} \cdots T_{u_1}(a_t) = T_{u_t} \cdots T_{u_1}(a_t) \in \mathrm{Span}_{j=1}^{t} e_j \ \ (1 \le t \le k)\ , \\ &T_{u_{k+1}} \cdots T_{u_1}(a_{k+1}) = \underbrace{T_{u_{k+1}}(\widetilde{a}_{k+1})}_{\in \mathbb{K} e_{k+1}} + \sum_{j=1}^{k} \langle \widehat{a}_{k+1}, e_j \rangle \underbrace{T_{u_{k+1}} \cdots T_{u_1}(e_j)}_{= e_j} \in \mathrm{Span}_{j=1}^{k+1} e_j\ . \end{aligned}$$

Householder tételének döntő fontosságú következménye az alábbi tény.

> Tétel. *Euklideszi térben minden teljes ortonormált rendszer azonos számú véges sok elemből áll. Sőt, ha* $(e_1, \ldots, e_N)$ *TON* $\subset H$*, akkor minden* N*-elemű ortonormált rendszer teljes* H*-ban.*

Bizonyítás. Legyen H egy Euklideszi tér. Tudjuk: H-ban van egy véges TON rendszer, mondjuk $E := \{e_1, \ldots, e_N\}$. Legyen $F := (f_1, \ldots, f_n)$ $ORTN \subset H$. Belátandó: 1) ha $n < N$, akkor F nem teljes H-ban , 2) ha $n = N$, akkor F $TON \subset H$, 3) $n > N$ lehetetlen.

Ad 1) Householder tétele szerint

$$n < N \Rightarrow \quad \exists\, u_1, \ldots, u_n \quad T_{u_n} \cdots T_{u_1}(F) \subset \mathrm{Span}_{k=1}^{n} e_k \neq H \ .$$

Tudjuk: $T_{u_k} : H \leftrightarrow H$ $(\forall\, k)$. Ezért

$$T :\ H \leftrightarrow H \quad \text{ahol} \quad T := T_{u_n} \cdots T_{u_1} \ ,$$
$$\mathrm{Span}\, F \subset T^{-1}\big(\mathrm{Span}_{k=1}^{n} e_k\big) \neq H \ .$$

Így $\mathrm{Span}\, F \neq H$, vagyis az F rendszer nem teljes H-ban.

Ad 2) Az $n = N$ esetben

$$\exists\, v_1, \ldots, v_N \quad T_{v_N} \cdots T_{v_1}(E) \subset \mathrm{Span}\, F \ .$$

Mivel $U := T_{v_N} \cdots T_{v_1} : H \leftrightarrow H$, most $H = U(\mathrm{Span}\, E) \subset \mathrm{Span}\, F$. Tehát $H = \mathrm{Span}\, F$, vagyis F $TON \subset H$.

Ad 3) A belátott 2) szerint már az $(f_1, \ldots, f_N)$ részrendszere teljes F-nek. Tehát $f_{N+1} \perp f_1, \ldots, f_n$ lehetetlen.

Definíció. A H Euklideszi tér TON rendszereinek tagszáma a tér **dimenzió**ja. Jelölés: $\dim(H)$.

Megjegyzés. A fenti TON rendszereken alapuló definíció nincs ellentmondásban a "Dimenzió" alfejezet bázisokon alapuló definíciójával. Ugyanis az ortonormált rendszerek lineárisan függetlenek, a teljes ortonormált rendszerek olyan lineárisan független rendszerek, amelyek kifeszítik H-t tehát H bázisai.

Householder tétele automatikusan adja az IGEN választ a Kérdésre:

> Propozíció. *Ha* $(a_1, \ldots, a_n)$ *és* $(e_1, \ldots, e_n)$ *ORTN rendszerek* H*-ban, akkor a Householder tételében megkonstruált* $T_{u_1}, \ldots, T_{u_n}$ *tükrözések mellett*
>
> $$\exists\, \kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \mathbb{K} \qquad T_{u_n} \cdots T_{u_n}(a_k) = \kappa_k e_k \ , |\kappa_k| = 1 \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Bizonyítás. A tükrözések belső-szorzat tartók az első Lemma szerint. Így a $T_{u_n} \cdots T_{u_n}$ összetétel is belső-szorzat tartó. Ezért

$$(f_1, \ldots, f_n)\ ORTN \subset H \quad \text{ahol} \quad f_k := T_{u_n} \cdots T_{u_n}(a_k) \qquad (k = 1, \ldots, n)\ .$$

Tudjuk: $f_k \in \mathrm{Span}_{j \le k} e_j$ ($\forall\ k$). Speciálisan, $f_1 \in \mathrm{Span}\, e_1$. Azaz $\exists\ \kappa_1 \in \mathbb{K}$ $f_1 = \kappa_1 e_1$. Mivel $\|a_1\| = \|f_1\| = \|e_1\| = 1$, itt $|\kappa_1| = \|\kappa_1 e_1\| = \|f_1\| = 1$.
Tegyük fel, hogy $f_j \kappa_j e_j$, $|\kappa_j| = 1$ ($j < k$). Mivel $f_k \in \mathrm{Span}_{j \le k} e_j$, írható

$$f_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{jk} e_j$$

alkalmas $\alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{kk} \in \mathbb{K}$ együtthatókkal. Csakhogy

$$\begin{aligned}
&f_k \perp f_1, \ldots, f_{k-1}\ , \Rightarrow \\
&0 = \langle f_k, \kappa_j e_j \rangle = \alpha_{jk} \overline{\kappa_j}\ , \quad \alpha_{jk} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k-1)\ , \\
&f_k = \alpha_{kk} e_k\ .
\end{aligned}$$

Ekkor $\|f_k\| = 1$ miatt $|\alpha_{kk}| = 1$, vagyis a $\kappa_1 := \alpha_{kk}$ választás megfelel.

Mátrixok teljes ortonormált rendszerek szerint

Ettől kezve H már nem általános belső-szorzat teret, hanem egy tetszőlegesen rögzített N-dimenziós Euklideszi teret jelöl.

Emékeztető Az $m \times n$-es $\mathbb{K}$-fölötti mátrixok $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$ függvények, amelyekre a következő speciális jelölést használjuk: $\alpha \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K})$-ra

$$\alpha : (k, \ell) \mapsto \alpha_{k\ell} \qquad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \left(\alpha_{jk}\right)_{j=1}^{m}{}_{k=1}^{n}\ .$$

Mint a számértékű függvényeknél általában, természetes módon vehetjük mátrixok összegét és számmal való szorzatát.

Definíció. Legyen $E := (e_1, \ldots, e_N)$ egy (rendezett) TON rendszer H-ban. Az $x \in H$ **vektor mátrixa** E szerint az

$$E^*(x) := \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_N \rangle \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(N, 1, \mathbb{K})$$

$N \times 1$-es $\mathbb{K}$ fölötti mátrix.

Megjegyzés. Tudjuk: $x = \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_K \rangle e_k$. Azaz $x = \sum_{k=1}^{N} [E^*(x)]_k e_k$.

Definíció. Legyenek H, K Euklideszi terek*, $E := (e_1, \dots, e_N)$ $TON \subset H$, $F := (f_1, \dots, f_M)$ $TON \subset K$. Egy K-beli $(g_1, \dots, g_n)$ (rendezett) **vektorrendszer mátrixa**

$$F^*(g_1, \dots, g_n) := \big(F^*(g_1) \cdots F^*(g_n)\big) = \big(\langle g_k, f_j \rangle\big)_{j=1}^{M}{}_{k=1}^{n} \in \mathrm{Mat}(M, n, \mathbb{K}) \ .$$

Ha $A : H \to K$ egy lineáris leképezés, az A **operátor mátrixa** az E, F koordinátarendszerek szerint

$$\begin{aligned} F^*AE &:= F^*(AE) = F^*(Ae_1, \dots, Ae_N) = \\ &= \big(F^*(Ae_1) \cdots F^*(Ae_N)\big) = \\ &= \big(\langle Ae_k, f_j \rangle\big)_{j=1}^{M}{}_{k=1}^{N} \in \mathrm{Mat}(M, N, \mathbb{K}) \ . \end{aligned}$$

Példa. 1) Az $\mathrm{id}_H : x \to x$ mátrixa tetszőleges E TON szerint az egységmátrix: $E^* \mathrm{id}_H E = \big(\delta_{jk}\big)_{j,k=1}^{N}$.

2) Ha az $u \in H$ egységvektor mátrixa $E^*(u) = \big(u_k\big)_{k=1}^{N} \in \mathrm{Mat}(N, 1, \mathbb{K})$, akkor az $P_u : x \mapsto \langle x, u \rangle u$ vetítés E-szerinti mátrixa

$$E^* P_u E = \big(u_j \overline{u_k}\big)_{j,k=1}^{N} \ .$$

3) A $T_u : x \mapsto x - 2\langle x, u \rangle u$ tükrözés E szerinti mátrixa 1) és 2) alapján

$$E^* T_u E = \big(\delta_{jk} - 2u_j \overline{u_k}\big)_{j,k=1}^{N} \ .$$

Lemma. *Ha $x \in H$, $A \in \mathcal{L}(H, K)$ és $\xi := E^*(x)$, $\alpha := F^*AE$, akkor*

$$F^*(Ax) = \big(\textstyle\sum_{k=1}^{N} \alpha_{jk} \xi_k\big)_{j=1}^{M} \ .$$

Bizonyítás. Amint megjegyeztük, $x = \sum_{k=1}^{N} \xi_k e_k$. Így

$$\begin{aligned} \big[F^*(Ax)\big]_j &= \langle Ax, f_j \rangle = \Big\langle A \sum_{k=1}^{N} \xi_k e_k, f_j \Big\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^{N} \xi_k \langle Ae_k, f_j \rangle = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{jk} \xi_k \ . \end{aligned}$$

* A $\mathbb{K}$ test fölött. A belső-szorzatot minden előforduló térben a félreértés veszélye nélkül ugyanazzal a $\langle \ , \ \rangle$ szimbólummal jelöljük a továbbiakban.

Tétel. *Legyenek H_1, H_2, H_3 Euklideszi terek, $E_r := (e_1^{(r)}, \dots, e_{N_r}^{(r)})$ $TON \subset H_r$ $(r = 1, 2, 3)$. Ekkor az*

$$A : H_3 \leftarrow H_2 \quad , \quad B : H_2 \leftarrow H_1 \quad , \quad AB : H_3 \leftarrow H_1$$

lineáris operátorok

$$\alpha := E_3^* A E_2 \quad , \quad \beta := E_2^* A E_1 \quad , \quad \gamma := E_3^*(AB)E_1$$

mátrixai között az alábbi összefüggés van:

$$\gamma_{j\ell} = \sum_{k=1}^{N_2} \alpha_{jk}\beta_{k\ell} \qquad (j = 1, \dots, N_3 \ ; \ \ell = 1, \dots, N_1) \ .$$

Bizonyítás. Tetszőleges j, ℓ indexpárra

$$\gamma_{j\ell} = \big\langle (AB)e_\ell^{(1)}, e_j^{(3)} \big\rangle = \big\langle A(Be_\ell^{(1)}, e_j^{(3)} \big\rangle \ ,$$

$$\text{ahol} \quad Be_\ell^{(1)} = \sum_{k=1}^{N_2} \langle Be_\ell^{(1)}, e_k^{(2)} \rangle e_k^{(2)} = \sum_{k=1}^{N_2} \beta_{k\ell} e_k^{(2)} \ .$$

Innen

$$\gamma_{j\ell} = \big\langle A \sum_{k=1}^{N_2} \beta_{k\ell} e_k^{(2)}, e_j^{(3)} \big\rangle = \sum_{k=1}^{N_2} \beta_{k\ell} \underbrace{\big\langle Ae_k^{(2)}, e_j^{(3)} \big\rangle}_{\alpha_{k\ell}} \ .$$

Emlékeztető. Az $\alpha \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K})$ mátrix szorzata $\beta \in \mathrm{Mat}(n, p, \mathbb{K})$-val az $\alpha\beta := \big(\sum_{k=1}^n \alpha_{jk}\beta_{k\ell}\big)_{j=1}^{m}{}_{\ell=1}^{p}$ mátrix.

Kérdés. Mi a kapcsolat ugyanannak az operátornak a különböző TON rendszerek szerinti mátrixai között?

Legyen $A : H \to K$, $E^{(r)} := (e_1^{(r)}, \dots, e_N^{(r)})$ $TON \subset H$, $F^{(r)} := (f_1^{(r)}, \dots, f_N^{(r)})$ $TON \subset K$ és $\alpha^{(r)} := F^{(r)*} A E^{(r)}$ $(r = 1, 2)$. Ekkor

$$\alpha_{jk}^{(2)} = \langle Ae_k^{(2)}, f_j^{(2)} \rangle = \Big\langle A \sum_t \langle e_k^{(2)}, e_t^{(1)} \rangle e_t^{(1)}, \sum_s \langle f_k^{(2)}, f_t^{(1)} \rangle f_t^{(1)} \Big\rangle =$$

$$= \sum_{s,t} \langle e_k^{(2)}, e_t^{(1)} \rangle \langle f_j^{(2)}, f_s^{(1)} \rangle^- \underbrace{\langle Ae_t^{(1)}, f_s^{(1)} \rangle}_{\alpha_{st}^{(1)}} =$$

$$= \sum_{s,t} \langle f_j^{(2)}, f_s^{(1)} \rangle^- \alpha_{st}^{(1)} \langle e_k^{(2)}, e_t^{(1)} \rangle \ .$$

Mátrix-szorzással is meg tudjuk adni a kapott kifejezést.

Propozíció. *Legyen* $\sigma := F^{(1)^*}F^{(2)} = \left(\langle f_j^{(2)}, f_s^{(1)}\rangle\right)_{s,j=1}^N$ *ill.* $\tau := E^{(1)^*}E^{(2)} = \left(\langle e_k^{(2)}, e_t^{(1)}\rangle\right)_{t,k=1}^N$ *a* (2) *indexű koordináta-vektorok együtthatói az* (1) *indexűek szerint. Ekkor*

$$\begin{aligned} \alpha_{jk}^{(2)} &= \sum_{s,t} \overline{\sigma_{sj}}\alpha_{st}^{(1)}\tau_{tk} = \sum_{s,t} \overline{\sigma'_{js}}\alpha_{st}^{(1)}\tau_{tk} = \\ &= \left[\overline{\sigma'}\alpha^{(1)}\tau\right]_{jk} \qquad (j,k = 1,\ldots,N)\ , \\ \alpha^{(2)} &= \overline{\sigma'}\alpha^{(1)}\tau\ . \end{aligned}$$

Vektorok operátori szorzata

A mátrixok és a leképezések közötti kapcsolat az alábbi operátorokon alapszik.

Definíció. Az $e \in H$ és $f \in K$ vektorok **operátori szorzat**a az

$$f \otimes e^* :\ x \mapsto \langle x, e\rangle f$$

lineáris $H \to K$ leképezés.

Propozíció. *Ha* α *egy* $M \times N$*-es* $\mathbb{K}$ *fölötti mátrix, pontosan* $\sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \alpha_{jk} f_j \otimes e_k^*$ *az lineáris* $H \to K$ *operátor amelynek az* $E := (e_1,\ldots,e_N)$ *TON* $\subset H$ *ill.* $F := (f_1,\ldots,f_M)$ *TON* $\subset K$ *rendszerek szerinti mátrixa* α.

Bizonyítás. Legyen $A := \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \alpha_{jk} f_j \otimes e_k^*$. Ekkor

$$\langle Ae_k, f_j\rangle = \Big\langle \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \alpha_{mn} \underbrace{f_m \otimes e_m^*(e_k)}_{\langle e_k, e_m\rangle f_n}, f_j \Big\rangle = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \alpha_{mn} \underbrace{\langle e_k, e_m\rangle}_{\delta_{km}} \underbrace{\langle f_n, f_j\rangle}_{\delta_{nj}} = \alpha_{jk}$$

minden j, k indexpárra, azaz $F^*AE = \alpha$.
Ha egy B operátorra szintén $F^*BE = \alpha$, akkor

$$\begin{aligned} F^*(B-A)E = &\alpha - \alpha = 0 \quad ,\Rightarrow \quad \langle (B-A)e_k, f_j\rangle = 0 \quad (\forall\, j,k) \\ &\Rightarrow \quad (B-A)e_k = 0 \quad (\forall\, k) \quad ,\Rightarrow \quad B - A = 0\ . \end{aligned}$$

Lemma. *Ha* $e \in H_1$, $f_1, f_2 \in H_2$ *és* $g \in H_3$,

$$(e \otimes f_1^*)(f_2 \otimes g^*) = \langle f_2, f_1 \rangle e \otimes g^* \ .$$

BIZONYÍTÁS. $(e \otimes f_1^*)(f_2 \otimes g^*)x = (e \otimes f_1^*)(\langle x, g\rangle f_2) = \langle x, g\rangle \langle f_2, f_1\rangle = \langle f_2, f_1\rangle e \otimes g^*(x)$ $(x \in H_3)$.

Megjegyzés. 1) Általában is, ha H, K Euklideszi terek az $E := (e_1, \ldots, e_N)$ ill. $F := (f_1, \ldots, f_m)$ TON rendszerekkel, és az $e \in H$, $f \in K$ vektorok mátrixai $E^*(e) := \big(\varepsilon_k\big)_{k=1}^N$ ill. $F^*(f) := \big(\varphi_j\big)_{j=1}^M$, akkor

$$F^*(f \otimes e^*)E = \big(\varphi_j \overline{\varepsilon_k}\big)_{j=1\,k=1}^{M\ \ N} \ .$$

Vegyük észre, hogy ez mátrix szorzással

$$F^*(f \otimes e^*)E = \begin{pmatrix} \varphi_1\overline{\varepsilon_1} & \ldots & \varphi_1\overline{\varepsilon_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_M\overline{\varepsilon_1} & \ldots & \varphi_M\overline{\varepsilon_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix} \big(\overline{\varepsilon_1} \ldots \overline{\varepsilon_N}\big) \ .$$

Vagyis a transzponálást $'$-vel jelölve,

$$F^*(f \otimes e^*)E = F^*(f) \cdot \overline{E^*(e)'} \ .$$

2) Speciálisan, a P_u projekció ill. T_u tükrözés mátrixa (az $\mathbf{1}_N := \big(\delta_{jk}\big)_{j,k=1}^N$ egységmátrixszal)

$$E^* P_u E = E^*(u) \cdot \overline{E^*(u)'} \ , \quad E^* T_u E = \mathbf{1}_N - 2E^*(u) \cdot \overline{E^*(u)'} \ .$$

Householder elimináció

Emlékeztető. Geometriai szempontból a $\mathbb{K}$-fölötti

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & + \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + \cdots & + a_{nn}x_n & = b_n \end{array}$$

egyenletrendszer jelentése: Keresendő olyan $x \in \mathbb{K}^n$ vektor, amelyet egy $\big(a_{jk}\big)_{j,k=1}^n$ mátrixú $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lineáris leképezés egy adott $b \in \mathbb{K}^n$ vektorba visz.

A Gauss elimináció ebben a kontextusban a következőképpen interpretálható: Ha V egy $\mathbb{K}$ fölötti véges dimenziós vektortér, minden lineáris $A : V \to V$ operátorhoz található olyan lineáris $L : V \leftrightarrow V$, amellyel LA mátrixa felső-trianguláris egy adott bázis szerint.

Megjegyzés. A $B \in \mathcal{L}(H)$ operátor mátrixa az $E := (e_1, \dots, e_n)$ TON rendszer szerint pontosan akkor felső-trianguláris, ha a főátló alatti $[E^*BE]_{jk}$ $(j > k)$ elemek eltűnnek. Azaz

$$\begin{aligned} E^*BE \ \text{ felső-trianguláris} \quad &\iff \quad \langle Be_k, e_j\rangle = 0 \quad (j > k) \\ &\iff \quad e_j \perp Be_k \qquad (j > k) \\ &\iff \quad Be_k \in \operatorname{Span}_{j=1}^k e_j \quad (\forall\, k)\ . \end{aligned}$$

Propozíció. *Legyen $A \in \mathcal{L}(H)$ és $E := (e_1, \dots, e_N)$ $TON \subset H$. Ekkor*

$$\exists\, u_1, \dots, u_N \qquad E^*\big(T_{u_N} \cdots T_{u_1} A\big)E \ \text{ felső-trianguláris}\ .$$

Sőt, itt $u_k \perp e_1, \dots, e_{k-1}$ $(k = 2, \dots, N)$ is választható.

Bizonyítás. Householder tétele az $a_k := Ae_k$ $(k = 1, \dots, N)$ vektorokra.

Algoritmus. (Householder elimináció).

A Householder tétel bizonyítása konstruktív. Az $u_{k+1} \in \operatorname{Span}\{\widehat{a}_{k+1}, e_{k+1}\}$ egységvektort (amelynek csak a létezését használtuk ki a bizonyítás során) explicite a következő módon adhatjuk meg: Formálisan $\widehat{a}_1 := a_1$-ből indulunk ki. Egymás után a $k = 0, 1, \dots, N-1$ indexeknél $\widehat{a}_{k+1}$-et $(*)$ szerint definiáljuk, és

1) ha eleve $\widehat{a}_{k+1} \in \operatorname{Span} e_{k+1}$, akkor $u_{k+1} := e_{k+1}$ megfelel (sőt nincs is szükség a $T_{u_{k+1}}$ tükrözés használatára, helyette id_H is vehető),
2) ha $\widehat{a}_{k+1} \notin \operatorname{Span} e_{k+1}$, akkor a $\kappa_{k+1} := \langle \widehat{a}_{k+1}, e_{k+1}\rangle / |\langle \widehat{a}_{k+1}, e_{k+1}\rangle|$ konstans mellett*

$$u_{k+1} := \frac{\kappa_{k+1}\|\widehat{a}_{k+1}\|e_{k+1} - \widehat{a}_{k+1}}{\big\|\kappa_{k+1}\|\widehat{a}_{k+1}\|e_{k+1} - \widehat{a}_{k+1}\big\|}\ .$$

Ennek alapján az $Ax = b$ egyenletrendszert a következő eliminációs eljárással oldhatjuk meg:

1. **lépés)** Képezzük az u_1 vektort az E szerinti $\alpha := E^*AE$ mátrix első oszlopa alapján. Kiszámítjuk a $T_{u_1}A$ operátort és a $T_{u_1}b$ vektort az $\alpha_1 := (E^*T_{u_1}E)\alpha$ ill. $\beta_1 := (E^*T_{u_1}E)E * (b)$ mátrix szorzatok kpzésével. Az $\alpha_1 = E^*(T_{u_1}A)E$ mátrix első oszlopában a 2. helytől kezdve csupa 0 áll.

* A $0/0 := 1$ konvencióval.

$(k+1)$-ik lépés) A már kiszámított $\alpha_k := E^*(T_{u_k} \cdots T_{u_1} A)E$ mátrix $(k+1)$-ik oszlopa alapján képezzük az u_{k+1} vektort. Kiszámítjuk a $T_{u_{k+1}} \cdots T_{u_1} A$ operátort és a $T_{u_{k+1}} \cdots T_{u_1} b$ vektort az $\alpha_{k+1} := (E^* T_{u_{k+1}} E)\alpha_k$ ill. $\beta_{k+1} := (E^* T_{u_{k+1}} E)\beta_k$ mátrix szorzások alapján. Az α_{k+1}-hez vezető szorzásnál az első k oszlop már nem változik, és a főátló alatti elemei 0-k. Az $\alpha_{k+1} = E^*(T_{u_{k+1}} \cdots T_{u_1} A)E$ mátrix $(k+1)$-ik oszlopában is csupa 0 áll a főátló alatti helyeken.

Befejezés. A felső-trianguláris mátrixú $\alpha_N \xi = \beta_N$ egyenletrendszert visszahelyettesítéssel megoldjuk ξ-re (mint a Gauss elimináció végén). Az $Ax = b$ egyenlet megoldása az az x vektor, amelyre $E^*(x) = \xi$ (azaz $x = \sum_{j=1}^{N} \xi_j e_j$).

Megjegyzés. A "Mátrixok teljes ortonormált rendszerek szerint" alfejezet utolsó Példája szerint az $E^* T_{u_k} E$ mátrixok könnyen kiszámíthatók. Ennek ellenére a Householder elimináció kézi számolásra nehézkes. Ennek ellenére gyakorlatilag nagyon jelentős az eljárás a sok (30-nál több) ismeretlenes valós ill, komplex együtthatós egyenletrendszerek gépi megoldásánál. Ugyanis, szemben a Gauss eliminációval, a Householder elimináció **numerikusan stabil**. A legtöbb számítógépes programcsomag a valós lineáris egyenletrendszereket Householder eliminációval oldja meg. Így a jobb numerikus stabilitás érdekében egy N ismeretlenes komplex egyenletrendszert célszerű lehet $2N$ ismeretlenes valós egyenletrendszerként kezelni.

OPERÁTOROK EUKLIDESZI TEREKEN

Hermite-formák

Emlékeztető. Ha $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ egy 2-szer folytonosan differenciálható függvény, akkor a Taylor formula szerint

$$f(x) = f(0) + ,\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_0 x_j \ , + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k x_\ell}\Big|_0 x_k x_\ell \ + \ o\big(\|x\|^2\big) \ .$$

Kérdés. Hogyan lehet az itt fellépő objektumokat koordinátafüggetlenül tárgyalni, ill. milyen célszerű koordinátarendszereket lehet itt bevezetni?

Az $x \mapsto \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_0 x_j$ függvény egyszerűen egy lineáris funkcionál. A második tagnak is van lineáris eredete: az

$$A : x \mapsto \Big(\sum_{t=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k x_t}\Big|_0 x_t : \ k = 1, \ldots, N \Big)$$

lineáris $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ operátorral

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{k,\ell=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k x_\ell}\Big|_0 x_k x_\ell \qquad (x \in \mathbb{R}^N) \ .$$

Megjegyzés. Az $(x, y) \mapsto \langle Ax, y \rangle$ funkcionál lineáris x-ben, y-ban azonban a konjugáltja lineáris.

Definíció. A $\Phi : H \times K \to \mathbb{K}$ leképezés **Hermite-forma** a H, K tereken, ha

$$\begin{aligned} &\Phi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 \Phi(x_1, y) + \alpha_2 \Phi(x_2, y) && (x, x_1, x_2 \in H \ , \ y, y_1, y_2 \in K \\ &\Phi(\ x\ , \ \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \overline{\beta_1} \Phi(x, y_1) + \overline{\beta_2} \Phi(x, y_2) && \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}). \end{aligned}$$

Ugyanúgy, mint a belső-szorzatnál (ami maga is egy Hermite-forma) áll az alábbi disztributivitás.

Lemma. *Ha* Φ *egy Hermite forma, akkor mindig*

$$\Phi(\textstyle\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k, \sum_{j=1}^{m} \eta_j y_j) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta_j} \Phi(x_k, y_j) \ .$$

Tétel. *Legyen* $\Phi : H \times K \to \mathbb{K}$ *Hermite-forma a* H, K *Euklideszi tereken. Ekkor*

$$\exists!\ A \in \mathcal{L}(H,K) \qquad \Phi(x,y) = \langle Ax, y\rangle \qquad (x \in H\ ,\ y \in K)\ .$$

Bizonyítás. Legyen $E := (e_1, \ldots, e_n)$ $TON \subset H$, $F := (f_1, \ldots, f_M)$ $TON \subset K$. Ha van ilyen A operátor, akkor a mátrixa szükségképpen

$$F^*AE = \big(\Phi(e_k, f_j)\big)_{j=1}^{M}{}_{k=1}^{N} \ .$$

Másrészt az

$$A := \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} \Phi(e_k, f_j) e_j \otimes e_k^*$$

operátorral a Lemma szerint az $x := \sum_k \xi_k e_k \in H$, $y := \sum_j \eta_j f_j \in K$ vektorokra

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= \big\langle \textstyle\sum_k \xi_k A e_k, \sum_j \eta_j f_j \big\rangle = \displaystyle\sum_{j,k} \xi_k \overline{\eta_j} \underbrace{\langle A e_k, f_j\rangle}_{F^*AE} = \\ &= \sum_{j,k} \xi_k \overline{\eta_j} \Phi(e_k, f_j) = \Phi\big(\textstyle\sum_k \xi_k e_k, \sum_j \eta_j f_j\big) = \\ &= \Phi(x,y)\ .\end{aligned}$$

Megjegyzés. A Tétel bizonyítása mutatja, hogy az A operátor $F^*AE : (j,k) \mapsto \langle Ae_k, f_j\rangle$ mátrixa mintegy "csontváza" a $\Phi : (x,y) \mapsto$ formának.

Kvadratikus alakok

Definíció. Egy $Q : H \to \mathbb{K}$ függvény **kvadratikus alak** a H (belső-szorzat) téren, ha

$$\exists\ \Phi : H \times H \to \mathbb{K} \ \text{ Hermite} \qquad Q : x \mapsto \Phi(x,x)\ .$$

Propozíció. (Polarizációs formula). *Ha* $\Phi : H \times H \to \mathbb{C}$ *egy Hermite-forma és* $Q : x \mapsto \Phi(x,x)$, *akkor*

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{4} \sum_{\omega^4=1} \overline{\omega} Q(\omega x + y) \qquad (x,y \in H)\ .$$

Bizonyítás. Az $\{\omega \in \mathbb{C} :\ \omega^4 = 1\} = \{\pm 1, \pm i\}$ egységyök-halmaz az $i(=\sqrt{-1})$ szám hatványaiból áll.

$$Q(i^k x+y) = \Phi(i^k x+y, i^k x+y) = i^k \overline{i^k} \Phi(x,x) + \Phi(y,y) + i^k \Phi(x,y) + \overline{i^k} \Phi(y,x) =$$
$$= Q(x) + Q(y) + i^k \Phi(x,y) + \overline{i^k} \Phi(y,x) \qquad (k = 0,1,2,3)\ .$$

Innen

$$\sum_{k=0}^{3} \overline{i^k} Q(i^k x + y) = \underbrace{\left(\textstyle\sum_{k=0}^{3} \overline{i^k}\right)}_{0} (Q(x) + Q(y)) + 4\Phi(x,y) + \underbrace{\left(\textstyle\sum_{k=0}^{3} (-1)^k\right)}_{0} \Phi(y,x)\ .$$

Következmény. *Komplex téren egy kvadratikus alak egyértelműen meghatározza azt a Hermite-formát, amelynek a* **diagonalizálás***ából (a két változója egybefogásából) adódik. Speciálisan*

$$\langle x,y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^{-k} \|i^k x + y\|^2 \qquad (x,y \in H).$$

Megjegyzés. A $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben kellemetlenebb a helyzet: Pl. $\mathbb{R}^2$ fölött a $\Phi : (x,y) \mapsto x_1 y_2$ ill. $\Psi : (x,y) \mapsto x_2 y_1$ formákra $\Phi(x,x) = \Psi(x,x) = x_1 x_2$ $(x \in \mathbb{R}^2)$.

Definíció. A $\Psi : H \times H \to \mathbb{K}$ Hermite-forma **szimmetrikus**, ha

$$\Psi(y,x) = \Psi(x,y)^- \qquad (x,y \in H)\ .$$

Példa. A $\langle\ ,\ \rangle$ belső-szorzat mindig szimmetrikus Hermite-forma.

Lemma. *Szimmetrikus Hermite-forma diagonalizáltja valós-értékű.*

Bizonyítás. Ha Ψ szimmetrikus, $\Psi(x,x) = \Psi(x,x)^-, \Rightarrow \Psi(x,x) \in \mathbb{R}$ $(x \in H)$.

Propozíció. *Kvadratikus alak pontosan akkor valós-értékű, ha szimmetrikus Hermite-forma diagonalizáltja.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy $\Psi(x,y) = \Psi(y,x)^-$ és $Q(x) = \Psi(x,x)$ $(x,y \in H)$. Ekkor $Q(x) = \Psi(x,x) = \Psi(x,x)^- = Q(x)^-$, azaz $Q(x) \in \mathbb{R}$ $(x \in H)$.

Tegyük fel, hogy $Q : H \to \mathbb{R}$ a Ψ Hermite-forma diagonalizáltja.

1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esete. Ekkor

$$Q(x) = \Psi_s(x,x) \qquad (x \in H)\ , \quad \text{ahol}$$
$$\Psi_s:\ (x,y) \mapsto \frac{1}{2}\Psi(x,y) + \frac{1}{2}\Psi(y,x)$$

szimmetrikus Hermite-forma.

2) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esete. Polarizációval

$$\begin{aligned}
4\Psi(x,y)^- &= \sum_{\omega^4=1} \omega \underbrace{Q(\omega x + y)}_{\in\mathbb{R}}{}^- = \sum_{\omega^4=1} \omega Q(\omega x + y)\ , \\
4\Psi(y,x) &= \sum_{\omega^4=1} \overline{\omega} Q(\omega y + x) =^{Q(\alpha z)=|\alpha|^2 Q(z)} \\
&= \sum_{\omega^4=1} \omega Q\big(\omega(\omega y + x)\big) = \sum_{\omega^4=1} \overline{\omega} Q(y + \overline{\omega} x) =^{\alpha:=\overline{\omega}} \\
&= \sum_{\alpha^4=1} \alpha Q(\alpha x + y) = \Psi(x,y)^- \qquad (x,y \in H)\ .
\end{aligned}$$

Megjegyzés. A $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben

$$\begin{aligned}
Q(x+y) &= \Psi(x+y,x+y) = \Psi(x,x) + \Psi(x,y) + \Psi(y,x) + \Psi(y,y) = \\
&= Q(x) + \Psi(x,y) + \Psi(y,x) + Q(y) = \\
Q(-x+y) &= Q(x) - \Psi(x,y) - \Psi(y,x) + Q(y) \\
Q(x+y) - Q(-x+y) &= 2\Psi(x,y) + 2\Psi(y,x) = 4\Psi_s(x,y) \qquad (x,y \in H)\ .
\end{aligned}$$

Mivel $\{\omega \in \mathbb{R} :\ \omega^4 = 1\} = \{\pm 1\}$, a szimmetrizált Ψ_s forma pontosan a komplex eset formulájával kapható meg:

Következmény. (Valós polarizáció). *Ha $Q : H \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak, akkor*

$$Q^{(2)}(x,y) := \frac{1}{4} \sum_{\omega \in \mathbb{K}:\ \omega^4=1} \overline{\omega} Q(\omega x + y) \qquad (x,y \in H)$$

szimmetrikus Hermite-forma, melynek diagonalizáltja $Q: x \mapsto Q^{(2)}(x,x)$.

Kérdés. Hogyan mutatható ki közvetlenül, hogy egy $Q : H \to \mathbb{K}$ függvény kvadratikus alak?

Emlékeztető. Az $\mathbb{R}^3$ térben érvényes az

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R}^3)$$

ún. **Paralellogramma-szabály**.

> **Tétel.** (Neumann-Jordan). *Egy $Q : H \to \mathbb{R}$ folytonos függvény pontosan akkor kvadratikus alak, ha*
>
> $$Q(\alpha x) = |\alpha|^2 Q(x) \qquad (\alpha \in \mathbb{K},\ x \in H)\ ,$$
> $$Q(x+y) + Q(x-y) = 2Q(x) + 2Q(y) \qquad (x, y \in H)\ .$$

Bizonyítás. VÁZLAT. Ha Q egy Ψ szimmetrikus Hermite-forma diagonalizáltja, akkor a két azonosság azonnal következik az alfejezet első Lemmájából.

Tegyük fel, hogy a Q függvény teljesíti a két azonosságot. Verifikáljuk, hogy a $Q^{(2)}$ valós polarizált szimmetrikus Hermite forma.

1) A $Q^{(2)}(y,x) = Q^{(2)}(x,y)^-$, $Q^{(2)}(ix,y) = iQ^{(2)}(x,y)$ és $Q^{(2)}(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|^2 Q^{(2)}(x,y)$ $(\alpha \in \mathbb{K},\ x, y \in H)$ relációk rögtön adódnak.

2) Indukcióval belátjuk: tetszőlegesen rögzített x, y-ra

$$Q(mx+ny) = m^2 Q(x) + 2mn \mathrm{Re}\, Q^{(2)}(x,y) + n^2 Q(y) \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)\ .$$

3) Innen az 1)-beli tulajdonságokkal

$$Q(\alpha x + \beta y) = |\alpha|^2 Q(x) + 2\alpha\overline{\beta} Q^{(2)}(x,y) + |\beta|^2 Q(y) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\ ,\ x, y \in H)\ .$$

4) A Q függvény folytonossága miatt a fenti formula áll minden $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ együtthatóval. Vagyis Q minden 2 vektor által kifeszített altéren kvadratikus alak.

5) Legyen V egy 3 vektor által kifeszített altér, és legyen u_1 olyan egységvektor, ahol a Q függvény felveszi a maximumát az $S := \{x \in V :\ \|x\| = 1\}$ gömbön. A "Főtengely-tétel" alfejezet tételét a $\mathrm{Span}\{u_1, v\}$ $(u_1 \perp v \in V)$ 2-dimenziós altereken a Q immár kvadratikus alakra alkalmazva,

$$\forall\, v \in V :\ v \perp u_1,\ \|v\| = 1 \quad \exists\, \lambda_v, \mu_v \in \mathbb{R}$$
$$Q(\alpha u_1 + \beta v) = \lambda_v |\alpha^2| + \mu_v |\beta^2| \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{K})\ .$$

6) Választva olyan $u_2 \in V$ egységvektort, amelynél Q felveszi maximumát a $\{v \in V : v \perp u_1,\ \|v\| = 1\}$ gömbön, és egy u_1, u_2-re merőleges $u_3 \in V$ egységvektort, 5) szerint

$$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \qquad Q(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3) = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k |\xi_k|^2 \qquad (\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{K})\ .$$

7) Vagyis Q minden 3-dimenziós altéren kvadratikus alak 6) alapján. Ennyi már elegendő: $Q^{(2)}$ teljesíti az

$$Q^{(2)}(\alpha x + \beta y, z) = \alpha Q^{(2)}(x,z) + \beta Q^{(2)}(y,z) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{K}\,,\ x,y,z \in H)$$

azonosságot is az 1)-beliek mellett, vagyis Hermite-forma.

Főtengely-tétel

Kérdés. Milyen TON rendszer szerinti koordinátákkal a legegyszerűbb alakú egy **valós értékű** kvadratikus alak felírása?

Példa. Az $\mathbb{R}^2$-beli

$$Q : (x,y) \mapsto 5x^2 + 6xy + 5y^2$$

kvadratikus alak az

$$E := (e_1, e_2)\ , \quad e_1 := \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\ , \quad e_1 := \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$$

TON rendszer szerinti koordinátákkal

$$\begin{aligned} Q\underbrace{(x,y)}_{\mathbf{z}} &= 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 4(x+y)^2 + (-x+y)^2 = \\ &= 4\big(\sqrt{2}\langle \mathbf{z}, e_1\rangle^2 + \big(\sqrt{2}\langle \mathbf{z}, e_2\rangle^2 = \\ &= 8X_1^E(\mathbf{z})^2 + 2X_2^E(\mathbf{z})^2 \qquad (\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2)\ , \\ Q &= 8\widehat{x}^2 + 2\widehat{y}^2 \qquad \text{ahol } \widehat{x} := X_1^E\ ,\ \ \widehat{y} := X_2^E\ . \end{aligned}$$

Emlékeztető. Minden valós-értékű kvadratikus alak egy szimmetrikus Hermite forma diagonalizáltja.

Az egész alfejezeten át H egy N-dimenziós Euklideszi tér, $\Psi : H \times H \to \mathbb{K}$ egy Hermite-forma és

$$Q(x) := \Psi(x,x)\ , \quad \Psi(y,x) = \Psi(x,y)^- \qquad (x,y \in H)\ .$$

Megjegyzés. Mint látni fogjuk, a legkevesebb nem-zéró vegyes koordinátaszorzatot tartalmazó felíráshoz vezető E TON rendszerek szoros kapcsolatban vannak az alábbi szélső-érték feladattal:

Keresendő olyan $e \in H$ vektor, amelyre

$$\|e\| = 1 \ , \quad Q(e) = \max_{\|x\|=1} Q(x) \ .$$

Lemma. *Ha* $e \in H$, $\|e\| = 1$ *és* $Q(e) = \max_{\|x\|=1} Q(x)$, *akkor*

$$\Psi(e, f) = 0 \qquad (\xi \in \mathbb{K} \ , \ f \perp e) \ .$$

Bizonyítás. Legyen $f \in H$, $f \perp e$ tetszőlegesen rögzítve. Vehető $\|f\| = 1$. Tekintsük az

$$e(\varphi) := \cos\varphi \cdot e + \sin\varphi \cdot f \ , \quad \|e(\varphi)\| = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \qquad (\varphi \in \mathbb{R})$$

egységvektorokat. Ezekkel

$$\begin{aligned} Q\big(e(\varphi)\big) &= \Psi\big(\cos\varphi \cdot e + \sin\varphi \cdot f, \cos\varphi \cdot e + \sin\varphi \cdot f\big) = \\ &= \cos^2\varphi\Psi(e,e) + \cos\varphi\sin\varphi \cdot \big[\Psi(e,f) + \Psi(f,e)\big] + \sin^2\varphi\Psi(f,f) = \\ &= \cos^2\varphi \cdot Q(e) + 2\cos\varphi\sin\varphi \cdot \mathrm{Re}\Psi(e,f) + \sin^2\varphi Q(f) \qquad (\varphi \in \mathbb{R}) \ . \end{aligned}$$

Mivel feltevés szerint $\varphi \mapsto Q\big(e(\varphi)\big)$ maximum-helye $0 = \varphi$ (hiszen $e = e(0)$),

$$\frac{d}{d\varphi}\Big|_0 Q\big(e(\varphi)\big) = 2\mathrm{Re}\,\Psi(e,f) = 0 \ .$$

A komplex esetben, azaz $\mathbb{K} = \mathbb{C}$-nél $if \perp e$, ahonnan $\mathrm{Re}\,\Psi(e, if) = 0$ is, azaz $\mathrm{Re}\,\Psi(e,f) = \mathrm{Im}\,\Psi(e,f) = 0$.

Következmény. *Az egységgömbön a* Q *formát maximalizáló* e *vektorra*

$$Q(\xi e + f) = |\xi|^2 Q(e) + Q(f) \qquad (\xi \in \mathbb{K} \ , \ f \perp e) \ .$$

Bizonyítás. Ha $f \perp e$ és $\xi \in \mathbb{K}$, akkor

$$Q(\xi e + f) = \Psi(\xi e + f, \xi e + f) = |\xi|^2\Psi(e,e) + 2\mathrm{Re}\big(\xi \underbrace{\Psi(e,f)}_{0}\big) + Q(f,f) \ .$$

Lemma. *Euklideszi tér egységgömbjén valós-értékű kvadratikus alak felveszi maximumát.*

Bizonyítás. Tudjuk: $\Psi : (x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle$ írható valamely lineáris $A : H \to H$ operátorral. A belső-szorzat és a lineáris operátorok folytonosak Euklideszi téren, így a $Q : x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ függvény folytonos. Másrészt Euklideszi tér egységgömbjén folytonos függvények felveszik szélső értékeiket.

Tétel. (Főtengely-tétel). *Legyen $Q : H \to \mathbb{R}$ egy kvadratikus alak, a $\Psi(= Q^{(2)}) : H \times H \to \mathbb{K}$ szimmetrikus Hermite-forma diagonalizáltja. Ekkor*

$$\begin{aligned}
&\exists\, E := (e_1, \ldots, e_N)\ TON \subset H \quad \exists\, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N \in \mathbb{R} \\
&Q = \lambda_1 (X_1^E)^2 + \cdots + \lambda_N (X_N^E)^2 \ , \\
&\Psi(e_j, e_j) = \lambda_j \ , \quad \Psi(e_j, e_k) = 0 \qquad (j \neq k\ ,\ j, k = 1, \ldots, N) \ .
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen

$$H^{(1)} := H \ , \quad S^{(1)} := \{x \in H^{(1)} :\ \|x\| = 1\} \ .$$

Az előző Lemma szerint

$$\exists\, e_1 \in S^{(1)} \qquad Q(e_1) = \max_{e \in S^{(1)}} Q(e) \ .$$

Legyen egy ilyen extremális e_1 egységvektorral

$$H^{(2)} := \{x \in H^{(1)} :\ x \perp e_1\} \ , \quad S^{(2)} := \{e \in H^{(2)} :\ \|e\| = 1\} \ .$$

Észrevétel: $\dim H^{(2)} = \dim H^{(2)} - 1 = N - 1$, és $H^{(1)}$ helyett $H^{(2)}$-re is alkalmazhatjuk az előző gondolatmenetet. Innen

$$\exists\, e_2 \in S^{(2)} \qquad Q(e_2) = \max_{e \in S^{(2)}} Q(e) \ .$$

Folytatva ezt az eljárást, kapunk egy

$$H = H^{(1)} \supset H^{(2)} \supset \cdots \supset H^{(N)} \supset H^{(N+1)} = \{0\}$$

altérsorozatot és vele egy olyan

$$e_k \in S^{(k)} := \{e \in H^{(k)} :\ \|e\| = 1\} \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

egységvektor sorozatot, amelyre

$$\begin{aligned}
&e_k \perp H^{(k+1)} \ , \quad Q(e_k) = \lambda_k \ , \quad \text{ahol} \\
&\lambda_k := \max\{Q(e) : \exists\, \in S^{(k)}\} \qquad (k = 1, \ldots, N) \ .
\end{aligned}$$

Mivel $e_k \perp e_\ell$ $(k < \ell)$ és $\dim H = N$,

$$(e_1, \ldots, e_N)\ TON \subset H\ .$$

Mivel pedig $S^{(1)} \supset S^{(2)} \supset \cdots \supset S^{(N)}$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N (\in \mathbb{R})$. Mivel e_k a Q függvény maximumhelye a $H^{(k)}$ tér egységgömbjén, és mivel $e_k \perp e_\ell$ $(k < \ell)$, az első Lemma szerint

$$\Psi(e_k, e_\ell) = 0 \qquad (k < \ell)\ .$$

Innen

$$\begin{aligned} Q(x) &= \Psi(x,x) = \\ &= \Psi\big(\textstyle\sum_{j=1}^N X_j^E(x) e_j, \sum_{k=1}^N X_k^E(x) e_k\big) = \\ &= \sum_{j,k=1}^N X_j^E(x) \overline{X_k^E(x)} \cdot \Psi(e_j, e_k) =^{\Psi(e_j,e_k)=0 \quad (j \neq k)} \\ &= \sum_{k=1}^N \big|X_k^E(x)\big|^2 \underbrace{\Psi(e_k, e_k)}_{\lambda_j} \qquad (x \in H)\ . \end{aligned}$$

Definíció. Egy olyan $E := (e_1, \ldots, e_N)$ TON rendszer, amelyben a $Q : H \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak $Q = \sum_{k=1}^N \lambda_k (X_k^E)^2$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_N \in \mathbb{R}$ alakú, Q egy **főtengely-rendszer**e.

Megjegyzés. Bár a főtengely-rendszerek többféleképpen választhatók, a $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_N \geq 0$ értékek **egyértelműen** meghatározottak. Ugyanis, k szerinti indukcióval belátható Főtengely-tétel bizonyítása közben az alábbi, úgynevezett **Rayleigh-Ritz minimax elv**:

$$\max_{v \in V:\ \|v\|=1} Q(v) \geq \max_{e \in S^{(k)}} \|Ae\| \quad \text{ha} \quad \dim V = N{+}1{-}k\,,\ V \text{ altér} \subset H$$

$$\lambda_k = \min_{\substack{\dim V = \\ = N+1-k}} \max\{Q(v) :\ v \in V\,,\ \|v\| = 1\}\ .$$

Algoritmus. A tétel bizonyítás a következő *analitikus* eljárást kínálja Q egy $(e_1, \ldots, e_N)$ főtengely-rendszere szerkesztésére.

1. lépés) e_1 egy megoldása a $Q(x) \longrightarrow \text{MAX}$, $(\|x\|^2 = 1)$ szélső-érték feladatnak. Véve egy tetszőleges $(e_1^{(1)}, \ldots, e_N^{(1)})$ TON rendszert H-ban, ez a

$$Q(\xi_1 e_1^{(1)} + \cdots + \xi_N e_N^{(1)}) \longrightarrow \text{MAX} \qquad (|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_N|^2 - 1 = 0)$$

numerikus feladatotot jelenti. Iterációs gépi eljárások léteznek az $f(x) \to \text{MAX}$, $(c_1(x) = 0, \ldots, c_s(x) = 0)$ típusú $\mathbb{R}^m$-beli problémák megoldására.

$(k+1)$. lépés$\big)$ Ha már megkonstruáltuk az $e_1, \ldots, e_k \in H$ vektorokat, e_k egy megoldása a $Q(x) \longrightarrow \text{MAX}$, $(\|x\|^2 = 1,\ x \perp e_1, \ldots, e_k)$ szélső-érték feladatnak. Gram-Schmidt eljárással létrehozunk olyan $e_1^{(k)}, \ldots, e_{(N-k)}^{(k)}$ vektorokat, amelyekkel

$$(e_1, \ldots, e_k, e_1^{(k)}, \ldots, e_{(N-k)}^{(k)})\ TON \subset H\ ,$$

és az $(N-k)$-változós numerikus

$$Q(\xi_1 e_1^{(k)} \ldots, \xi_{N-k} e_{N-k}^{(k)}) \longrightarrow \text{MAX} \qquad (|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_{N-k}|^2 = 1)$$

probléma egy $(\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_{N-k}^{(k)})$ megoldásával $e_k := \sum_{j=1}^{N-k} \xi_j^{(k)}$.

Gyakorlat. 1) Ha az A operátor mátrixa α az E rendszer szerint, akkor

$$Q_A := \big[x \mapsto \langle Ax, x\rangle\big] = \sum_{j,k} \alpha_{jk} X_j^E X_k^E\ .$$

2) Ha $B : H \to K$ mátrixa $\beta := F^* BE$, akkor

$$\Phi_B :\ (x, y) \mapsto \sum_{j,k} \beta_{jk} X_j^F(y)^- X_k^E(x)\ .$$

Adjungálás

Emlékeztető. Egy vektortér duálisa a lineáris funkcionáljainak a tere, azaz

$$H' := \mathcal{L}(H, \mathbb{K}) = \{\text{lineáris } H \to \mathbb{K} \text{ leképezések}\}\ .$$

Definíció. Minden $h \in H$ vektorhoz legyen

$$h^* : x \mapsto \langle x, h\rangle\ .$$

A $h^* \in H'$ lineáris funkcionál a h **vektor adjungáltja**.

Lemma. (Riesz). *Euklideszi tér minden lineáris funkcionálja egy egyértelműen meghatározott vektor adjungáltja.*

Bizonyítás. Legyen $(e_1, \ldots, e_N)$ $TON \subset H$. A Parseval formula szerint

$$h^*(x) = \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k \rangle \langle h, e_k \rangle^- \qquad (h, x \in H) \ .$$

Legyen a $\phi \in H'$ funkcionál tetszőlegesen adott. Ekkor

$$\phi(x) = \phi\big(\textstyle\sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k \rangle e_k\big) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k \rangle \phi(e_k) \qquad (x \in H) \ .$$

Következésképpen

$$\begin{aligned}
\phi = h^* \iff & \phi(x) = h^*(x) \quad (x \in H) \\
\iff & \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k \rangle \phi(e_k) = \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k \rangle \langle h, e_k \rangle^- \quad (x \in H) \\
\iff & \sum_{k=1}^{N} \xi_k \phi(e_k) = \sum_{k=1}^{N} \xi_k \langle h, e_k \rangle^- \quad (\xi \in \mathbb{K}) \\
\iff & \langle h, e_k \rangle^- = \phi(e_k) \quad (1 \le k \le N) \\
\iff & \langle h, e_k \rangle = \overline{\phi(e_k)} \quad (1 \le k \le N) \\
\iff & h = \sum_{k=1}^{N} \overline{\phi(e_k)} e_k \ .
\end{aligned}$$

Definíció. Ha V_1, V_2 vektorterek, az $A : V_1 \to V_2$ leképezés **konjugált-lineáris**, ha

$$A(\alpha u + \beta v) = \overline{\alpha} A(u) + \overline{\beta} A(v) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{K}) \ .$$

Példa. 1) A $h \mapsto h^*$ adjungálás konjugált-lineáris, mivel minden $x \in H$-ra

$$(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)^*(x) = \langle x, \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 \rangle = \overline{\alpha_1} \langle x, h_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle x, h_2 \rangle = \overline{\alpha_1} h_1^*(x) + \overline{\alpha_2} h_2^*(x) \ .$$

2) A $\Phi : (x, y) \mapsto \Phi(x, y)$ Hermite-forma lineáris x-ben és konjugált-lineáris az y változójában.

Következmény. *$H' = H^* (= \{h^* : \ h \in H\}$, sőt a $* : h \mapsto h^*$ adjungálás konjugált-lineáris $H \leftrightarrow H'$ leképezés. Tetszőleges $(e_1, \ldots, e_N)$*

$ORTN \subset H$ rendszert véve, a $H \to H'$ adjungálás inverze a

$$\phi \mapsto \sum_{k=1}^{N} \overline{\phi(e_k)} e_k$$

konjugált-lineáris leképezés.

Definíció. A félreértés veszélye nélkül

$$\phi^* := \big[h \in H: \ h^* = \phi\big] \qquad (\phi \in H') \ .$$

Megjegyzés. Ha U, V vektorterek és $A : U \to V$ egy lineáris operátor, a V', U' funkcionál tereken van A-nak egy természetes reprezentációja, az

$$A': \ \psi \mapsto \psi \circ A$$

operátor, amely tehát a fordított irányban, V'-ből U'-be hat. Mivel a vektor-adjungálással azonosíthatjuk bármelyik Euklideszi teret a duálisával, ilyen módon minden Euklideszi terek közt ható $A : H \to K$ lineáris operátorhoz társíthatunk egy olyan $K \to H$ operátort, amely A' hatását reprezentálja.

Definíció. Legyenek H, K Euklideszi terek. Az $A : H \to K$ lineáris operátor **adjungált operátor**a az

$$\begin{aligned} A^*: \ y &\mapsto \big(A'(y^*)\big)^* \\ K &\to H \end{aligned}$$

leképezés.

Lemma. *Két konjugált-lineáris leképezés összetettje lineáris. Lineáris és konjugált-lineáris ill. konjugált-lineáris és lineáris leképezések összetettje konjugált-lineáris.*

Bizonyítás. Legyenek A_1, A_2 konjugált-lineáris ill. B_1, B_2 lineáris leképezések (valamilyen vektorterek között). Ekkor

$$A_1A_2(\alpha x + \beta y) = A_1(\overline{\alpha} A_2 x + \overline{\beta} A_2 y) = \underbrace{\overline{\overline{\alpha}}}_{\alpha} A_1A_2x + \underbrace{\overline{\overline{\beta}}}_{\beta} A_1A_2y$$

$$A_1B_2(\alpha z + \beta w) = A_1(\alpha B_2 z + \beta B_2 w) = \overline{\alpha} A_1B_2z + \overline{\beta} A_1B_2w$$

$$B_1A_2(\alpha u + \beta v) = B_1(\overline{\alpha} A_2 u + \overline{\beta} A_2 v) = \overline{\alpha} B_1A_2u + \overline{\beta} B_1A_2v$$

valahányszor az összes kifejezések értelmezve vannak.

Következmény. *Lineáris operátor adjungáltja lineáris.*

Bizonyítás. Az A^* leképezés tehát a következőképpen faktorizálható

$$\begin{array}{cccccccc} A^*: & y & \overset{*}{\longmapsto} & y^* & \overset{A'}{\longmapsto} & A'(y^*) & \overset{*}{\longmapsto} & \big(A'(y^*)\big)^* \\ & K & \overset{\text{konj.}}{\longrightarrow} & K' & \overset{\text{lin.}}{\longrightarrow} & H' & \overset{\text{konj.}}{\longrightarrow} & H\ . \end{array}$$

Különösen fontos az adjungált operátor következő jellemzése a belső-szorzattal.

Tétel. *Legyen $A : H \to K$ egy lineáris operátor. Ekkor egy $B : K \to H$ lineáris operátorra**

$$B = A^* \iff \langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle \quad (x \in H\,,\ y \in K)\ .$$

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Tetszőleges $x \in H$ és $y \in K$ mellett

$$\langle Ax, y\rangle = y^*(Ax) = [A'y^*](x) = \langle x, [A'y^*]^*\rangle = \langle x, A^*y\rangle\ .$$

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ $(x \in H,\ y \in K)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\langle x, A^*y\rangle = \langle x, By\rangle \\
&\langle x, (A^* - B)y\rangle = 0 \qquad (x \in H\,,\ y \in K) \\
&\|(A^* - B)y\|^2 = \langle (A^* - B)y, (A^* - B)y\rangle = 0 \qquad (y \in K)\ ,
\end{aligned}$$

ahonnan $A^* - B = 0$, azaz $A^* = B$.

Megjegyzés. A Tétel szerint az $A : H \to K$ és $A^* : K \to H$ operátorok ugyanazt a Hermite formát (a $\Phi : (x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ formát) írják le: egyik a H térből, a K-ból kiindulva.

Sok mű ebből e tulajdonság alapján definiálja az adjungált operátort, sőt szokásos operátorok duális párjait (az (A, A^*) pár) egyszerre bevezetni is.

Definíció. Egy $\alpha \in \mathrm{Mat}(M, N, \mathbb{K})$ mátrix **adjungált mátrix**a

$$\alpha^* := \overline{\alpha'} = \left(\overline{\alpha_{kj}}\right)_{k=1}^{N}{}_{j=1}^{M} \in \mathrm{Mat}(N, M, \mathbb{K})\ .$$

Következmény. 1) *Ha E TON $\subset H$ és F TON $\subset K$, akkor A^*-nak az (F, E) rendszerek szerinti mátrixa nem más, mint A (E, F)-szerinti mátrixának az adjungáltja, azaz*

$$(*) \qquad E^*A^*F = \alpha^* \quad \text{ha} \quad \alpha := F^*AE\ .$$

2) $A^{**} = A$. 3) $(AB)^* = B^*A^*$ ha $A \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ és $B \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$.

Bizonyítás. 1) Legyenek $E := (e_1, \ldots, e_N)$ ill. $F := (f_1, \ldots, f_M)$. Ekkor minden lehetséges j, k indexpárra

$$\begin{aligned}
\alpha_{jk} &= f_j'(Ae_k) = \langle Ae_k, f_j\rangle\ , \\
(E^*A^*F)_{jk} &= \langle A^*, f_k, e_j\rangle = \langle f_k, Ae_j\rangle = \langle Ae_i, f_j\rangle^- = \overline{\alpha}_{kj}\ .
\end{aligned}$$

2) Ha $x \in H$ és $y \in K$, akkor

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle A^*y, x\rangle^- = \langle y, A^{**}x\rangle^- = \langle A^{**}x, y\rangle \ .$$

3) Tetszőleges $x \in H_1 \in H_1$ és $x_3 \in H_3$ mellett

$$\begin{aligned}\langle (AB)x_1, x_3\rangle &= \langle A(Bx_1), x_3\rangle = \\ &= \langle Bx_1, A^*x_3\rangle = \langle x_1, B^*(A^*x_3)\rangle = \\ &= \langle x_1, (B^*A^*)x_3\rangle \ .\end{aligned}$$

Lemma. *Az $e \in H$ és $f \in K$ vektorok operátori szorzatának adjungáltja*

$$(f \otimes e^*)^* = e \otimes f^* \ .$$

Bizonyítás. Minden $x \in H$ és $y \in K$-ra

$$\begin{aligned}\langle f \otimes e^*(x), y\rangle &= \big\langle \langle x, e\rangle f, y\big\rangle = \langle x, e\rangle\langle f, y\rangle \ , \\ \langle x, e \otimes f^*(y)\rangle &= \big\langle x, \langle y, f\rangle e\big\rangle = \langle y, f\rangle^-\langle x, e\rangle = \langle x, e\rangle\langle f, y\rangle \ .\end{aligned}$$

Önadjungált operátorok

Kérdés. Hogyan írhatók le a valós értékű kvadratikus alakokat származtató lineáris operátorok?

Emlékeztető. Minden Φ Hermite-forma (egyértelműen) megadható $\Phi : (x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle$ alakban, és így minden Q kvadratikus alakra $Q : x \mapsto Q^{(2)}(x, x)$, ahol $Q^{(2)}$ szimmetrikus Hermite forma.

Definíció. Az $A \in \mathcal{L}(H)$ operátor **önadjungált**, ha $A^* = A$.

Lemma. *Ha $A \in \mathcal{L}(H)$, a következő tulajdonságok ekvivalensek:*
1) *A önadjungált* , 2) $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \qquad (x, y \in H)$,
3) a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *esetben* $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R} \qquad (x \in H)$,
3') a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *esetben**
$\langle \widehat{A}\widehat{x}, \widehat{x}\rangle \in \mathbb{R} \qquad (\widehat{A} : u \oplus iv \mapsto A \oplus iAv \ , \ \ \widehat{x} \in H \oplus iH)$.

Bizonyítás. Tudjuk: $B = A^* \iff \langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ $(x, y \in H)$. Innen az 1) $\Leftrightarrow$ 2) ekvivalencia.

2) $\Rightarrow$ 3): Ha 2) teljesül, $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle == \langle Ax, x\rangle^-$. Egy szám pontosan akkor valós, ha megegyezik a konjugáltjával.

3) $\Rightarrow$ 2): A Polarizácós tétel azonnal adja.

2) $\Rightarrow$ 3′): Ha $u, v \in H$, akkor $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle = \langle Av, u\rangle = \langle v, Au\rangle$ és

$$\langle \widehat{A}(u \oplus iv), u \oplus iv\rangle = \langle Au, u\rangle + \underbrace{i\langle Av, u\rangle - i\langle Au, v\rangle}_{0} + \langle Av, v\rangle \ .$$

3′) $\Rightarrow$ 2): Ekkor az $\widetilde{A}$ operátor teljesíti 3)-at a $\mathbb{C}$-fölötti $H \oplus iH$ téren.

Következmény. *Egy operátor pontosan akkor önadjungált, ha egy szimmetrikus Hermite-formából származik.*

Az önadjungáltság mátrix-jellemzése közvetlenül adódik az adjungált operátor mátrixát leíró, az "Adjungálás" alfejezetbeli $(*)$ formulából.

Lemma. *Az $A \in \mathcal{L}(H)$ operátorra ekvivalensek:*
1) $\exists\ E\ TON \subset H$ $\quad [E^*AE]^* = E^*(A^*)E$,
2) $\forall\ E\ TON \subset H$ $\quad [E^*AE]^* = E^*(A^*)E$.

Definíció. Az $A \in \mathcal{L}(H)$ **operátor kvadratikus alakja** ill. **Hermite-formája**

$$Q_A : x \mapsto \langle Ax, x\rangle$$
$$\langle\ ,\ \rangle_A : (x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle \ .$$

Példa. Ha $E := (e_1, \dots, e_N)$ $TON \subset H$ és $A = \sum_{k=1}^N \lambda_k e_k \otimes e_k^*$, akkor az A operátor mátrixa az E rendszer szerint átlós, az $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ számokkal a főátlóban. Így A pontosan akkor önadjungált, ha $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$. Az A operátor kvadratikus alakja és Hermite-formája

$$Q_A = \lambda_1 (X_1^E)^2 + \dots + \lambda_N (X_N^E)^2$$
$$\langle x, y\rangle_A = \lambda_1 X_1^E(x) X_1^E(y) + \dots + \lambda_N X_N^E(x) X_N^E(y) \qquad (x, y \in H).$$

Propozíció. *A $H \to \mathbb{R}$ kvadratikus alakok és az önadjungált $H \to H$ operátorok között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat az*

$$A \mapsto Q_A \qquad \big(A \text{ önadj.} \in \mathcal{L}(H)\big)$$

hozzárendelés.

Bizonyítás. Minden valós-értékű Q kvadratikus alak *egyértelműen* meghatározza azt a szimmetrikus Hermite-formát, amelynek a diagonalizáltja (nevezetesen, ez a $Q^{(2)}$ forma). Másrészt láttuk, hogy minden Hermite-forma egyértelműen megadható $(x, y) \mapsto \langle Ax, x\rangle$ alakban. Innen az első Lemma 3) ill. 3') pontjai alapján adódik az álltás.

Következmény. *Ha* A önadj.$\in \mathcal{L}(H)$ *és* $\langle Ax, x\rangle = 0$ $(x \in H)$, *akkor* $A = 0$.

Tétel. (Főtengely-tétel). *Legyen* $A \in \mathcal{L}(H)$ *önadjungált,* $\dim H = N$. *Ekkor*

$$\exists\,(e_1, \ldots, e_N)\; TON \subset H \quad \exists\, \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_N \in \mathbb{R}$$

$$A = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k \otimes e_k^* \quad \text{azaz} \quad E^*AE = \left(\lambda_j \delta_{jk}\right)_{j,k=1}^{N} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. Tekintsük a Q_A kvadratikus alakot. Az A operátor önadjungáltsága miatt Q_A **valós**-értékű ($Q_A : H \to \mathbb{R}$). Így alkamazhatjuk rá a valós értékű kvadratikus alakok Főtengely-tételét.

Legyen $E := (e_1, \ldots, e_N)$ egy főtengely-rendszere Q_A-nak, és ebben

$$Q_A = \lambda_1 (X_1^E)^2 + \cdots + \lambda_N (X_N^E)^2 \ .$$

Észrevétel: a Példa szerint

$$Q_A = Q_D \quad \text{ahol} \quad D := \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k \otimes e_k^* \ .$$

Így a Propozíció alapján $A = D$.

Definíció. Az olyan $(e_1, \ldots, e_N)$ TON rendszerek, amelyekben az A operátor mátrixa diagonális, A **főtengely rendszer**ei. Emlékeztető: $x \in H$ sajátvektora $B \in \mathcal{L}(H)$-nak, ha $Bx \in \mathbb{K}x$.

Következmény. *Egy operátor pontosan akkor önadjungált, ha a mátrixa valós diagonális valamilyen TON szerint. Egy önadjungált operátor főtengely-rendszerei pontosan a kvadratikus alakjának a főtengely-rendszerei. Ha* A *önadj.*$\in \mathcal{L}(H)$ *és* $(e_1, \ldots, e_N)$ *TON rendszer a* Q_A *forma egy főtengely-rendszere, akkor az* e_k *vektorok sajátvektorai* A*-nak,*

$$Ae_k = \lambda_k e_k \quad \text{ahol} \quad \lambda_k = \min_{\dim V = N-k+1} \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in V}} \langle Ax, x \rangle$$

$(k = 1, \ldots, N)$. *Speciálisan, a* Q_A *forma maximum-helyei az* $S := \{x \in H : \|x\| = 1\}$ *egység-gömbön sajátvektorai* A*-nak.*

Algoritmus. Főtengely-transzformáció algebrai sajátvektor meghatározással.

Mivel az A önadjungált operátor főtengely-rendszerei sajátvektorokból állnak, lehetőség van a tiszta algebrai eszközökkel való meghatározásukra. A "Karakterisztikus polinom" alfejezetben látjuk, hogy a $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ értékek egy olyan polinom gyökei, amelynek együtthatóit A-nak egy **tetszőleges** rendszerbeli $\alpha(= F^*AF$ alakú) mátrixából kiszámíthatjuk elemi műveletekkel (aldeterminánsokkal). Ha λ_k ismert, az $Ae_k = \lambda_k e_k$ egyenlet e_k ismeretlen vektorának $\xi := F^*(e_k)$ koordinátáit az

$$\begin{array}{rcccccl}
(\alpha_{11} - \lambda_k)\xi_1 & + & \alpha_{12}\xi_2 & + \cdots & + & \alpha_{1N}\xi_N & = 0 \\
\alpha_{21}\xi_1 & + & (\alpha_{22} - \lambda_k)\xi_2 & + \cdots & + & \alpha_{1N}\xi_N & = 0 \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
\alpha_{N1}\xi_1 & + & \alpha_{N2}\xi_2 & + \cdots & + & (\alpha_{NN} - \lambda_k)\xi_N & = 0
\end{array}$$

egyenletrendszerből kapjuk. Ezt eliminációval felső-trianguláris alakra hozva, áttekinthető módon jutunk az összes ξ megoldáshoz.

Spektrál-tétel

Megjegyzés. Minden önadjungált operátornak több főtengely-rendszere van (hiszen ha E főtengely rendszer, akkor $-E$ is az). Sőt az id : $x \to x$ identitás-operátornak minden TON rendszer főtengely rendszere.

Kérdés. Milyen egyértelmű objektumok társíthatók a főtengely rendszerekhez?

Definíció. Legyen $A \in \mathcal{L}(H)$ egy operátor és $\lambda \in \mathbb{K}$. A

$$H_{A,\lambda} := \{x \in H : \; Ax = \lambda x\}$$

altér A-nak az λ-**sajátaltere**. Az A operátor **pont-spektrum**a

$$\mathrm{Sp_p}(A) := \big\{\lambda \in \mathbb{K} : \ H_{A,\lambda} \neq \{0\}\big\} \ .$$

Tétel. (Spektrál-tétel). *Legyen* A önadjungált $\in H$, $\dim H = N$. *Ekkor*

$$\exists\, r \in \{1,\dots,N\} \quad \exists\, \lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{R}$$
$$\mathrm{Sp_p}(A) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_r\} \ , \quad \lambda_1 > \dots > \lambda_r \ .$$

Tetszőleges $E := (e_1,\dots,e_N)$ *főtengely rendszerét véve* A*-nak,*

$$\begin{aligned} P_j &:= \big[\text{merőleges vetítés } H_{A,\lambda_j}\text{-re}\big] = \\ &= \sum_{k:\ e_k \in H_{A,\alpha_j}} e_k \otimes e_k^* \qquad (j = 1,\dots,r) \ , \\ A &= \sum_{j=1}^{r} \lambda_j P_j \ . \end{aligned}$$

Bizonyítás. Tudjuk: $A = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \otimes e_k^*$ valamilyen $\alpha_1,\dots,\dots\alpha_N \in \mathbb{R}$ sorozattal, ahol ugyanaz az érték többször is előfordulhat. Az $\{\alpha_k : \ 1 \leq k \leq N\}$ számhalmaz elemeit egy $\widetilde{\lambda}_1 > \dots > \widetilde{\lambda}_t$ sorozatba rendezhetjük, ahol $1 \leq t \leq N$. Ezzel

$$A = \sum_{j=1}^{t} \widetilde{\lambda}_j \underbrace{\sum_{k:\ \alpha_k = \widetilde{\lambda}_j} e_k \otimes e_k^*}_{\widetilde{P}_j} \ .$$

Tudjuk: minden $x \in H$-ra a $\widetilde{P}_j(x) = \sum_{k:\ \alpha_k = \widetilde{\lambda}_j} \langle x, e_k\rangle e_k$ pont az x pont merőleges vetülte a

$$U_j := \mathrm{Span}_{k:\ \alpha_k = \widetilde{\lambda}_j} e_k$$

altérre. Észrevétel: Az $U_1,\dots,U_t$ alterek merőlegesek egymásra, így

$$x \in U_\ell \ , \Rightarrow \quad \widetilde{P}_j(x) = 0 \quad (j \neq \ell) \ , \Rightarrow \quad Ax = \sum_j \widetilde{\lambda}_j \langle x, e_j\rangle \widetilde{P}_j(x) = \widetilde{\lambda}_\ell \widetilde{P}_\ell(x) = \widetilde{\lambda}_\ell x,$$
$$\{0\} \neq U_\ell \subset H_{A,\widetilde{\lambda}_\ell} \ , \quad \widetilde{\lambda}_\ell \in \mathrm{Sp_p}(A) \qquad (\ell = 1,\dots,t) \ .$$

Csak annyit kell még belátnunk, hogy

$$\mathrm{Sp_p}(A) \subset \{\widetilde{\lambda}_\ell : \ \ell = 1,\dots,t\} \ .$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\lambda \in \mathrm{Sp_p}(A)$ és $0 \neq x \in H$, $\lambda x = Ax$. Legyen x mátrixa E-ben a $\big(\xi_k\big)_{k=1}^{N} (:= E^*(x))$ oszlopvektor. Mivel A E-beli mátrixa átlós, az $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ elemekkel a főátlóban,

$$\lambda \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \xi_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \xi_N \end{pmatrix} .$$

Innen $\lambda \xi_k = \alpha_k \xi_k$ minden k indexre. Mivel $x \neq 0$, van olyan k, amelyre $\xi_k \neq 0$, és ezzel $\lambda = \alpha_k \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\} = \{\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_t\}$.

Következmény. *Önadjungált operátor sajátalterei merőlegesek egymásra és kifeszítik a teret.*

Pozitív definitség*

Kérdés. Hogyan lehet egy Q_A kvadratikus alaknál az önadjungált A operátor mátrixából eldönteni, vajon $Q_A(x) > 0$ $(x \neq 0)$.

Definíció. $Q : H \to \mathbb{K}$ *pozitív definit kvadratikus alak* (jelölésben: $Q > 0$), ha $Q(x) > 0$ $(0 \neq x \in H)$.

$A \in \mathcal{L}(H)$ *pozitív definit operátor* (jelölésben: $A > 0$), ha $Q_A > 0$, azaz ha $\langle Ax, x\rangle > 0$ $(0 \neq x \in H)$.

$\alpha \in \mathrm{Mat}(N, N, \mathbb{K})$ *pozitív definit mátrix* (jelölésben: $\alpha > 0$), ha valamilyen pozitív definit operátor mátrixa egy TON rendszer szerint.

Megjegyzés. A definícióból azonnal következik, hogy

1) ha $A \in \mathcal{L}(H)$, E $TON \subset H$ és $\alpha = E'AE$, akkor $\alpha > 0 \iff A > 0$;
2) ha $\alpha \in \mathrm{Mat}(N, N, \mathbb{K})$, akkor $\alpha > 0 \iff \xi^* \alpha \xi > 0$ $(xi \in \mathbb{K}^N$ mint oszlpovektor).

Emlékeztető. A determináns az $n \times n$-es mátrixokon olyan funkcionál, amely trianguláris mátrixhoz a főátlója elemeinek szorzatát, mátrixok szorzatához a tényezők determinánsainak szorzatát és mátrix konjugáltjához a mátrix determinánsának konjugáltját rendeli hozzá.

* Ez az egyetlen alfejezet az egész fejezetben, amelyhez a mátrixok és determinánsok mélyebb előzetes ismerete szükséges.

Definíció. Egy $\alpha \in \mathrm{Mat}(N,N,\mathbb{K})$ mátrix bal-felső főminorait a következőképpen jelöljük:

$$\alpha|_n := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \qquad (n = 1,\ldots,N) \; .$$

Propozíció. *Ha* $\alpha \in \mathrm{Mat}(N,N,\mathbb{K})$, $\alpha = \alpha^*$ *és* $\det(\alpha|_n) \neq 0$ $(n = 1,\ldots,N)$,

$$\exists\, \lambda_1,\ldots,\lambda_N \neq 0 \quad \exists\, \tau \text{ felső triang.} \in \mathrm{Mat}(N,N,\mathbb{K})$$

$$\alpha = \tau^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix} \tau \; .$$

Bizonyítás. Indukcióval $n = 1,\ldots,N$-re megmutatjuk, hogy

$$\exists\, \tau_n \text{ felső triang.} \in \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{K}) \quad \exists\, \vartheta_n \in \mathrm{Mat}(n,1,\mathbb{K})$$

$$(*_n) \qquad \alpha|_n = \tau_n^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix} \tau_n \; , \qquad \tau_n = \begin{pmatrix} \tau_{n-1} & \vartheta_n \\ & 1 \end{pmatrix} \; ,$$

ahol $\tau_1 := \big(1\big)$, $\lambda_1 := \alpha_{11}$ és $\lambda_k := \det(\alpha|_k)/\det(\alpha|_{k-1})$ $(k = 2,\ldots,N)$.

Bizonyítás. : Az $n = 1$ eset triviális, mivel $\alpha|_1 = \big(\alpha_{11}\big) = \big(1\big)\big(\alpha_{11}\big)\big(1\big)$.
Észrevétel: Az

$$\alpha|_{n+1} = \begin{pmatrix} \tau* & \\ \vartheta^* & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau & \vartheta \\ & 1 \end{pmatrix} \qquad \vartheta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vdots \\ \vartheta_n \end{pmatrix} =? \; , \quad \lambda =?$$

egyenletnek van egy egyértelmű megoldása, ha

$$\tau \in \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{K}) \; , \quad \tau^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \tau \; .$$

Nevezetesen, a két oldalt kiszámítva

$$\begin{pmatrix} & & & \alpha_{1,n+1} \\ & \alpha|_n & & \vdots \\ & & & \alpha_{n,n+1} \\ \overline{\alpha_{1,n+1}} & \cdots & \overline{\alpha_{n,n+1}} & \alpha_{n+1,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \lambda_1\vartheta_1 \\ & \tau^*\Lambda\tau & & \vdots \\ & & & \lambda_n\alpha_{n,n+1} \\ \lambda_1\overline{\vartheta_1} & \cdots & \lambda_n\overline{\vartheta_n} & \alpha_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

ahol

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Innen az egyedüli megoldás

$$\vartheta_k = \alpha_{k,n+1}/\lambda_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

$$\lambda = \alpha_{n+1,n+1} - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{k,n+1}|^2/\lambda_k .$$

Ha tehát beláttuk a $(*_1), \ldots, (*_n)$ állításokat, akkor az Észrevétel alapján $(*_{n+1})$-hez már csak a $\lambda = \det(\alpha|_{n+1}/\det(\alpha|_n)$ relációt kell megmutatni. A $\tau_{k+1} = \begin{pmatrix} \tau_n & \vartheta_n \\ & 1 \end{pmatrix}$ feléptő művelet szerint a τ_k $(k \le n+1)$ mátrixok mindegyike felső trianguláris csupa 1-esekkel a főátlójában. Így $\det(\tau_{n+1}) = \det(\tau^*_{n+1}) = 1$, és

$$\det(\alpha|_{n+1}) = \det(\tau^*_{n+1})\det\begin{pmatrix} \Lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}\det(\tau_{n+1}) = 1 \cdot (\lambda_1 \cdots \lambda_n \lambda) \cdot 1 =$$

$$= \alpha_{11}\frac{\det(\alpha|_2)}{\alpha_{11}} \cdots \frac{\det(\alpha|_n)}{\det(\alpha|_{n-1})}\lambda = \det(\alpha|_n)\lambda ,$$

$$\lambda = \frac{\det(\alpha|_{n+1})}{\det(\alpha|_n)} = \lambda_{n+1} .$$

Lemma. *Pozitív definit mátrix determinánsa pozitív.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in \mathrm{Mat}(N, N, \mathbb{K})$ egy $0 < A \in \mathcal{L}(H)$ operátor mátrixa valamilyen E $TON \subset H$ rendszer szerint. Tudjuk: $\det(A) = \det(\alpha)$. Mivel $A^* = A$, a Főtengely-tétel szerint található olyan $F := (f_1, \ldots, f_N)$ $TON \subset H$ rendszer, amelyben A mátrixa $F'AE = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix} =: \Lambda$ alakú. Vagyis $\det(A) = \det(\Lambda) = \lambda_1 \cdots \lambda_N$. Itt azonban $\lambda_k = \langle \lambda_k f_k, f_k \rangle = \langle A f_k, f_k \rangle = Q_A(f_k) > 0$.

Tétel. *Legyen $\alpha \in \mathrm{Mat}(N, N, \mathbb{K})$, $\alpha^* = \alpha$. Ekkor ekvivalensek:*

1) $\alpha > 0$, 2) $\alpha|_1, \alpha|_2, \ldots, \alpha|_N > 0$,

3) $\alpha = \alpha^*$ *és* $\det(\alpha|_k) > 0$ $(k = 1 \ldots, N)$.

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2): Tetszőleges $1 \le k \le N$ és $0 \ne \xi \in \mathbb{K}^k$ mellett

$$Q_{\alpha|_k}(\xi) = \sum_{j,\ell=1}^{k} \alpha_{j\ell}\alpha_{j\ell}\xi_j\overline{\xi_\ell} = \sum_{j,\ell=1}^{N} \alpha_{j\ell}\alpha_{j\ell}\widehat{\xi}_j\overline{\widehat{\xi}_\ell} = Q_\alpha(\widehat{\xi}) \overset{1)}{>} 0 ,$$

ahol $\widehat{\xi} := (\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^N$.

2) $\Rightarrow$ 3): A Lemmából azonnal adódik.

3) $\Rightarrow$ 1): A Propozíció szerint $\alpha = \tau^*\Lambda\tau$, ahol τ olyan felső trianguláris mátrix, amelynek a főátlója 1-esekből áll, Λ pedig diagonális mátrix, egy $\lambda_1, \ldots, \Lambda_N > 0$ számsorozattal a főátlában. Legyen $0 \neq \xi \in \mathbb{K}^N$ tetszőlegesen adott. Mivel $\det(\tau) = \det(\tau^*) = 1 \neq 0$, a τ mátrix invertálható, és így $\eta := \tau\xi \neq 0$. Márpedig

$$Q_\alpha(\xi) = Q_\Lambda(\underbrace{\tau\xi}_{\eta}) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j |\eta_j|^2 \geq \min_j \lambda_j \|\eta\|^2 > 0 \ .$$

Megjegyzés. A Propozíció bizonyítása a "Trianguláris felbontás Gauss eliminációval" alfejezet meggondolásainak továbbvitele. Úgy interpretálható a Propozíció, hogy egy pozitív definit mátrixon a Gauss eliminációt mindig elvégezhetjük az $(1,1), \ldots, (N,N)$ indexű pivotokkal, amelyek mindig pozitívok. Sőt, az eliminációt leíró alsó trianguláris mátrix oszlopait alkalmas konstansokkal szorozva és az eliminációból nyert felső trianguláris mátrix sorait ugyanezen konstansokkal osztva, a módosított mátrixok egymás adjungáltjai lesznek.

Normális operátorok

Ebben az alfejezetben végig H egy *komplex* Euklideszi teret jelöl (azaz kizárólag $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Kérdés. Mikor van főtengely-rendszere egy *nem-valós* értékű kvadratikus alaknak?

Megjegyzés. A kérdés megválaszolásához célszerűbb az operátorokon keresztül való megközelítés.

Definíció. A $C \in \mathcal{L}(H)$ operátor **normális**, ha valamilyen H-beli teljes ortonormált rendszerben átlós mátrixú.

Megjegyzés. Ha $E^*CE = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_N \end{pmatrix} =: \gamma$, azaz ha $C = \sum_{k=1}^N \gamma_k e_k \otimes e_k^*$, akkor az önadjungált $A := \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}\gamma_k e_k \otimes e_k^*$ ill. $B := \sum_{k=1}^N \operatorname{Im}\gamma_k e_k \otimes e_k^*$ operátorokra

$$C = A + iB \ ,$$

$$AB = BA = \sum_{k=1}^{N} |\gamma_k|^2 e_k \otimes e_k^* \ .$$

Lemma. *Általában is, minden $C \in \mathcal{L}(H)$ operátor egyértelműen fölbontható egy önadjungált operátor és egy önadjungált operátor $i(=\sqrt{-1})$-szeresének összegére.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy

$$C = A + iB\ , \quad \text{ahol} \quad A^* = A\ , \quad B^* = B\ .$$

Ekkor

$$\begin{aligned} C^* &= A^* + (iB)^* = A^* + \bar{i}B^* = A^* - iB^*\ , \\ 2A &= C + C^* \quad , \quad 2iB = C - C^* \\ A &= \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}C^* \quad , \quad B = \tfrac{1}{2i}C + \tfrac{1}{2i}C^* \end{aligned}$$

lehet csak. Az $\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^*$ ill. $\frac{1}{2i}C + \frac{1}{2i}C^*$ operátorok valóban önadjungáltak, mivel

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}C^*\right)^* &= \overline{\left(\tfrac{1}{2}\right)}C^* + \overline{\left(\tfrac{1}{2}\right)}C^{**} = \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}C^*\ , \\ \left(\tfrac{1}{2i}C - \tfrac{1}{2i}C^*\right)^* &= \overline{\left(\tfrac{1}{2i}\right)}C^* - \overline{\left(\tfrac{1}{2i}\right)}C = \tfrac{1}{2i}C - \tfrac{1}{2i}C^*\ . \end{aligned}$$

Definíció. A $C \in \mathcal{L}(H)$ **operátor valós** ill. **képzetes része**

$$\operatorname{Re} C := \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}C^*\ , \quad \operatorname{Im} C := \tfrac{1}{2i}C - \tfrac{1}{2i}C^*\ .$$

Megjegyzés. $\operatorname{Re} C$ az az operátor, amelynek $x \mapsto \operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle$ a kvadratikus alakja, $\operatorname{Im} C$ pedig az, amelyé $x \mapsto \operatorname{Im}\langle Ax, x\rangle$.

Lemma. *Ha A, B önadj.$\in \mathcal{L}(H)$ és $AB = BA$, akkor A és B egymás sajátaltereit önmagukba viszik. Azaz*

$$B\{x \in H :\ Ax = \lambda x\} \subset \{x \in H :\ Ax = \lambda x\} \qquad \big(\lambda \in \mathrm{Sp_p}(A)\big)\ .$$

BIZONYÍTÁS. Ha $Ax = \lambda x$ és $AB = BA$, akkor

$$A(Bx) = (AB)x = (BA)x = B(Ax) = B(\lambda x) = \lambda Bx\ .$$

Tétel. *Ha A, B önadjungált $\in H$ és $AB = BA$, akkor létezik olyan E TON rendszer H-ban, amely szerint A ill. B mátrixai, az E^*AE, E^*BE egyszerre átlósok.*

Bizonyítás. Legyen A-nak a Spektrál-tétel szerinti előállítása

$$A = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j P_j \ ,$$

ahol a P_j operátorok a

$$H_j := \{x \in H : \ Ax = \lambda_j x\} \qquad (j = 1, \dots, r)$$

sajátalterekre való merőleges vetítések. A Lemma szerint

$$B : H_j \to H_j \qquad (j = 1, \dots, r) \ .$$

Mivel a B operátor önadjungált, triviálisan $\langle Bx, y\rangle = \langle Bx, y\rangle \in \mathbb{R}$ ($x \in H_j$), azaz

$$B_j := B|H_j \text{ önadj.} \in \mathcal{L}(H_j) \qquad (j = 1, \dots, r) \ .$$

A Főtengely-tételt alkalmazva egy tetszőleges B_j részoperátorra,

$$\exists\ (e_1^{(j)}, \dots, e_{n_j}^{(j)})\ TON \subset H_j$$
$$\exists\ \beta_1^{(j)}, \dots, \beta_{n_j}^{(j)} \in \mathbb{R} Be_t^{(j)} = B_j e_t^{(j)} = \beta_t^{(j)} e_t^{(j)} \qquad (t = 1, \dots, n_j) \ .$$

Tekintsük az

$$E := \big(\underbrace{e_1^{(1)}, \dots, e_{n_1}^{(1)}}_{\in H_1}, \dots, \underbrace{e_1^{(r)}, \dots, e_{n_r}^{(r)}}_{\in H_r}\big)$$

vektorrendszert. A H_j sajátalterek miatt az E rendszer ortonormált. Másrészt A sajátalterei kifeszítik az egész H teret. Így

$$\begin{aligned}\operatorname{Span} E &= \operatorname{Span}_{j=1}^{r}\big(\operatorname{Span}_{t=1}^{n_j} e^{(j)}\big) \overset{(e_1^{(j)},\dots,e_{n_j}^{(j)})\ TON \subset H_j}{=} \\ &= \operatorname{Span}_{j=1}^{r} H_j = H \ , \Rightarrow \quad E\ TON \subset H \ .\end{aligned}$$

Speciálisan, $N = \dim H = \#E = n_1 + \dots + n_r$. A B operátor hatása az E TON rendszeren

$$Be_t^{(j)} = B_j e_t^{(j)} = \beta_t^{(j)} e_t^{(j)} \qquad \big((t = 1, \dots, n_j),\ j = 1, \dots, r\big) \ .$$

Ugyanakkor a H_j alterek definíciója szerint

$$Ae_t^{(j)} = \lambda_j e_t^{(j)} \qquad \big((t = 1, \dots, n_j),\ j = 1, \dots, r\big) \ .$$

Tehát az A, B operátorok mátrixai az E rendszer szerint diagonálisak (a főátlóban

$$\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{n_r} \quad \text{ill.} \quad \beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{n_1}^{(1)}, \dots, \beta_1^{(r)}, \dots, \beta_{n_r}^{(r)}$$

együttható-sorozatokkal).

Következmény. *Ha az önadjungált $A, B : H \to H$ operátorok felcserélhetők (azaz $AB = BA$), akkor*

$$\exists\,(e_1, \ldots, e_N)\; TON \subset H \quad \exists\, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_N, \beta_N$$
$$A = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \otimes e_k^* \ , \quad B = \sum_{k=1}^{N} \beta_k e_k \otimes e_k^* \ .$$

Megjegyzés. A "Felcserélhetőség" alfejezetben belátjuk ennek az itteni eredmények messzemenő általánosítását.

Tétel. *Legyen $C \in \mathcal{L}(H)$. Ekkor ekvivalensek*
1) C normális,
2) C és C^* felcserélhetők (azaz $C^*C = CC^*$),
3) $\operatorname{Re} C$ és $\operatorname{Im} C$ felcserélhetők.

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2): Láttuk az első Megjegyzésben.

2) $\Rightarrow$ 3): Felcserélhető operátorok lineáris kombinációi felcserélhetők.

3) $\Rightarrow$ 1):

$$A := \operatorname{Re} C \quad , \quad B := \operatorname{Im} C$$

operátorok mátrixa átlós egy közös teljes ortonormált rendszerben "önadjungált operátorok" alfejezet szerint. Tehát létezik olyan $E := (e_1, \ldots, e_N)\; TON \subset H$, amelyre

$$A = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \otimes e_k^* \quad , \quad B = \sum_{k=1}^{N} \beta_k e_k \otimes e_k^*$$

alakú (és $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_N, \beta_N \in \mathbb{R}$). Ezzel

$$C = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{(\alpha_k + i\beta_k)}_{\gamma_k} e_k \otimes e_k^* \ , \quad E^*CE = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_N \end{pmatrix} .$$

Következmény. (Normális operátorok főtengely- és spektrál-tétele).

Ha a $C \in \mathcal{L}(H)$ *és* $C^*C = CC^*$, *akkor*

$$\exists\,(e_1,\ldots,e_N)\;TON \subset H \quad \exists\,\gamma_1,\ldots,\gamma_N \in \mathbb{C}$$

$$C = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k e_k \otimes e_k^* = \sum_{\gamma \in \mathrm{Sp_p} C} \gamma P_\gamma \ , \qquad \mathrm{Sp_p} C = \{\gamma_1,\ldots,\gamma_N\}\ ,$$

$$\text{ahol} \quad P_\gamma := \big[\text{merőleges vetítés } \{x:\ Cx = \gamma x\}\text{-re}\big] \qquad (\gamma \in \mathrm{Sp_p} C)\ .$$

Bizonyítás. Észrevétel: A "Spektrál-tétel alfejezetbeli meggondolások tetszőleges átlós mátrixú operátora érvényesek (ott csak a valós-átlójúakra alkalmaztuk őket).

Unitér operátorok

Kérdés. Hogyan jellemezhetők azok a lineáris $H \to H$ leképezések, amelyek TON rendszereket TON rendszerekbe visznek?

Definíció. Az $U : H \to H$ lineáris leképezés **unitér**, ha H-beli teljes ortonormált rendszereket K-beli teljes ortonormált rendszerekbe visz. Egy mátrix **ortogonális mátrix**, ha egy unitér leképezés mátrixa. Azaz

$$\frac{\alpha \text{ ortog.} \in \mathrm{Mat}(N,N,\mathbb{K}) \text{ def}}{\Leftrightarrow \ \exists\, H} \exists\, E\; TON \subset H \quad \exists\, U \text{ unitér} \in \mathcal{L}(H)$$

$$\#E = N\ , \quad \alpha = E^*UE\ .$$

Mivel az Euklideszi terek véges dimenziósok, bennük tisztán a belső-szorzat terminusaival is le lehet írni az unitérséget.

Propozíció. *Egy* $U \in \mathcal{L}(H)$ *operátor esetén ekvivalensek:*
(i) U unitér , (ii) $\|Ux\| = \|x\|$ $(x \in H)$, (iii) $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ $(x, y \in H)$.

Bizonyítás. (i) $\Rightarrow$ (ii): Az egységvektorok egy-elemű ortonormált rendszerek, így ortogonális operátor egységvektort egységvektorba visz. Vagyis $\|U(x/\|x\|)\| = 1$ $(0 \neq x \in H)$, azaz $\|Ux\| = \|x\|$ $(x \in H)$, ha U ortog.$\in \mathcal{L}(H,K)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Tudjuk: $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\omega^4=1}\omega\|x+\omega y\|^2$ $(x,y\in H(\text{ill. } K))$. Ezért,

$$\begin{aligned}\langle Ux,Uy\rangle &= \frac{1}{4}\sum_{\omega^4=1}\omega\|Ux+\omega Uy\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{\omega^4=1}\omega\|U(x+\omega y)\|^2 =^{2)}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{\omega^4=1}\omega\|x+\omega y\|^2 = \langle x,y\rangle\ .\end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Legyen $(e_1,\dots,e_N)$ $TON \subset H$. Ekkor $\langle Ue_j,Ue_k\rangle = \langle e_j,e_k\rangle = \delta_{jk}$ $(\forall\ j,k)$. Azaz $(Ue_1,\dots,Ue_N)$ $ORTN \subset H$. Csakhogy az N-elemű ortonormált rendszerek teljesek H-ban.

Következmény. 1) *A tükrözések unitér leképezések.*
2) *Unitér leképezések összetétele unitér. Ortogonális mátrixok szorzata ortogonális.*

Bizonyítás. 1) Tudjuk: $\langle T_u(x),T_u(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ $(\|u\|=1,\ x,y\in H)$.
2) Ha $\|U_1x\| = \|U_2x\| = \|x\|$ $(x\in H)$, akkor $\|U_1(U_2x)\| = \|U_2x\| = \|x\|$ $(x\in H)$.

Következmény. *Egy $U\in\mathcal{L}(H)$ operátor pontosan akkor unitér, ha*

(iv) *U valamelyik TON rendszert TON rendszerbe viszi.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $E := (e_1,\dots,e_N)$, $F := (f_1,\dots,f_N)$ $TON \subset H$ és $UE = F$. Ekkor (ii) teljesül:

$$\begin{aligned}\|Ux\|^2 &= \Big\|U\Big(\sum_k X_k^E(x)e_k\Big)\Big\|^2 = \Big\|\sum_k X_k^E(x)Ue_k\Big\|^2 =\\ &= \Big\|\sum_k X_k^E(x)f_k\Big\|^2 \overset{F\ TON\subset H}{=} \sum_k |X_k^E(x)|^2 = \|x\|^2 \qquad (x\in H)\ .\end{aligned}$$

Megjegyzés. A Propozíció igazsága azon múlik, hogy egy N-dimenziós Euklideszi térben egy N-elemű ortonormált rendszer mindig teljes. Végtelen dimenzióban más a helyzet. Az

$$U:\ (\xi_1,\xi_2,\dots)\mapsto(0,\xi_1,\xi_2,\dots)$$

eltolás-operátor a "Teljes ortonormált rendszerek" alfejezet Példájában bevezetett $\ell^2 := \{(\xi_1,\xi_2,\dots):\ \sum_{k=1}^\infty|\xi_k|^2<\infty\}$ sorozattéren az $\{e_k:\ k=1,2,\dots\}$ TON rendszert a nem-teljes $\{e_k:\ k=2,3\dots\}$ rendszerbe viszi.

Mivel a tükrözések unitér leképezések (egyébként végtelen dimenzióban is), Householder tétele az Euklideszi térbeli unitér operátorok következő csoportelméleti jellemzéséhez vezet.

Propozíció. *Legyen $E := (e_1, \ldots, e_N)$ $TON \subset H$. Ekkor a H tér minden unitér leképezése előáll N tükrözés és egy E-szerint diagonális mátrixú $H \leftrightarrow H$ operátor összetételeként.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $f_k := Ue_k$ $(k = 1, \ldots, N)$. Mivel az $(f_1, \ldots, f_N)$ rendszer ortonormált, Householder tétele szerint (ld. a "Tükrözések" alfejezetbeli Propozíció)

$$\begin{aligned} &\exists\, u_1, \ldots, u_N \quad \exists\, \kappa_1, \ldots, \kappa_N \quad |\kappa_1| = \cdots = |\kappa_N| = 1 \\ &T_{u_N} \cdots T_{u_1}(f_k) = \kappa_k e_k \qquad (k = 1, \ldots, N)\ , \end{aligned}$$

a $T_u := \mathrm{id}_H - 2u \otimes u^*$ $\|u\| = 1)$ tükrözésekkel. Vagyis, mivel mindig $T_u^{-1} = T_u$,

$$\begin{aligned} Ue_k &= f_k = T_{u_1} \cdots T_{u_N}(\kappa_k e_k) = \\ &= T_{u_1} \cdots T_{u_N}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{N} \kappa_j e_j \otimes e_j^*(e_k)\right) \qquad (k = 1, \ldots, N)\ , \\ U &= T_{u_1} \cdots T_{u_N} T \quad \text{ahol} \quad T := \textstyle\sum_{j=1}^{N} \kappa_j e_j \otimes e_j^*\ . \end{aligned}$$

Itt a T operátor is unitér, mivel $TE = (\kappa_1 e_1, \ldots, \kappa_N e_N)$ $TON \subset H$.

Következmény. *Valós Euklideszi tér minden unitér leképezése véges sok türözés egymásutánja.*

Megjegyzés. A tükrözések önadjungáltak, hiszen $\langle T_u(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ $(x \in \mathbb{R})$ a "Tükrözések" alfejezet szerint. Ez a tény lehetőséget ad az unitérség igen egyszerű operátor algebrai jellemzéseire.

Következmény. *Unitér operátor invertálható és a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetben normális. Nevezetesen egy unitér operátor inverze az adjungáltja.*

BIZONYÍTÁS. Legyen U unitér$\in \mathcal{L}(H)$ és $U = T_{u_1} \cdots T_{u_N} T$ a tétel bizonyítása során használt tükrözési előállítás. Tudjuk: $T_{u_k} = T_{u_k}^{-1} = T_{u_k}^*$ $(\forall k)$ és $T^* = T^{-1}$. Ezért (az $(AB)^* = B^* A^*$ és az nemcsak lineáris leképezésekre érvényes $A^{-1}B^{-1} = (AB)^{-1}$ azonosságokkal)

$$\begin{aligned} U^* &= \left(T_{u_1} \cdots T_{u_N} T\right)^* = T^* T_{u_N}^* \cdots T_{u_N}^* = \\ &= T^{-1} T_{u_N}^{-1} \cdots T_{u_N}^{-1} = \left(T_{u_1} \cdots T_{u_N} T\right)^{-1} = U^{-1}\ . \end{aligned}$$

Propozíció. *Egy $U \in \mathcal{L}(H)$ operátor esetén ekvivalensek:*
(i)U unitér , (v) $U^*U = \mathrm{id}_H$, (vi) $U^* = U^{-1}$, (vii) U^* unitér.

BIZONYÍTÁS. (iii) $\Leftrightarrow$ (v): Adódik az adjungált belső-szorzatos jellemzéséből.

Tehát az (i),(ii),(iii),(iv),(v) tulajdonságok ekvivalensek. (vi) $\Rightarrow$ (v): Triviális.
(i) $\Rightarrow$ (vi), (vii): Az előző Következmény. Ezzel (i), ..., (vi) ekvivalensek.
(vii) $\Rightarrow$ (v): Ha U^* unitér, rá alkalmazva az előző Következményt, $(U^*)^{-1} = U^{**} = U$, azaz $U^*U = \mathrm{id}_H$.

Következmény. 1) α ortog. $\in \mathrm{Mat}(N, N, \mathbb{K}) \iff \alpha^*\alpha = \left(\delta_{jk}\right)_{j,k=1}^{N}$.

2) *Ha az α mátrix ortogonális, akkor α^* és így α' $(= \overline{\alpha^*})$ is ortogonális.*

Megjegyzés. A fenti 2) állítás messze nem triviális. Elemi úton már azt is nehéz bizonyítani, hogy egy 3×3-as valós mátrix oszlopai $\mathbb{R}^3$-nak egymásra merőleges egységvektorai (ez a mátrix-ortogonalitás definíciója), akkor a sorai is egymásra merőleges egységvektorok $\mathbb{R}^3$-ban. Ez a tény jelentős a Descartes-féle koordinátageometria megalapozásánál.

Lemma. *Ha U unitér $\in \mathcal{L}(H)$, $0 \neq x \in x$ és $Ux = \kappa x$, akkor $|\kappa| = 1$.*

BIZONYÍTÁS. $\|x\| = \|Ux\| = \|\kappa x\| = |\kappa| \cdot \|x\|$.

Tétel. (Unitér operátorok főtengely- és spektrál-tétele).
Ha $U : H \to H$ egy unitér operátor, akkor

$$\exists\, (e_1, \dots, e_N)\ TON \subset H \quad \exists\, \kappa_1, \dots, \kappa_N \in \mathbb{C} \quad |\kappa_1| = \dots = |\kappa_N| = 1$$

$$U = \sum_{k=1}^{N} \kappa_k e_k \otimes e_k^* = \sum_{\kappa:\ \kappa \in \mathrm{Sp_p} U} \kappa P_\kappa\ , \qquad \mathrm{Sp_p} U = \{\kappa_1, \dots, \kappa_N\}\ ,$$

$$\text{ahol} \quad P_\kappa := \left[\text{merőleges vetítés } \{x:\ Ux = \kappa x\}\text{-re}\right] \qquad (\kappa \in \mathrm{Sp_p} C)\ .$$

BIZONYÍTÁS. Tudjuk: Az unitér operátorok normálisak. A Lemma szerint $\mathrm{Sp_p} U \subset \{\kappa \in \mathbb{C} :\ |\kappa| = 1\}$. Innen a tétel a normális operátorok spektrál- és főtengelytételének speciális esete.

Általános operátor kettős főtengely-rendszerei

Ebben az alfejezetben H és K két tetszőlegesen adott Euklideszi tér. A belső-szorzat ill.norma jelölése $\langle\ ,\ \rangle$, $\|\ \|$ mindkettőben.

Kérdés. Egy $A : H \to K$ lineáris operátornak milyen H-beli E ill. K-beli F TON rendszerben legegyszerűbb az F^*AE mátrixa?

Megjegyzés. Mint látni fogjuk, a legkevesebb nem-zéró elemet tartalmazó F^*AE mátrixhoz vezető E, F TON rendszerek szoros kapcsolatban vannak az alábbi szélső-érték feladattal: *Keresendő olyan $e \in H$ vektor, amelyre*

$$\|e\| = 1\ , \quad \|Ae\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|\ .$$

Megjegyzés. Az $x \mapsto \|Ax\|^2$ funkcionál kvadratikus alak H fölött. Ugyanis

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = Q_{A^*A}(x) \qquad (x \in H)\ .$$

Ugyanígy $Q_{AA^*} : y \mapsto \|A^*y\|^2$ a K tér fölött.

Lemma. *Ha $A^*Ae = \lambda e$ és $e \perp h \in H$, akkor $Ae \perp Ah$. Sőt, ha $\lambda \neq 0$, akkor az $f := Ae(\in K)$ vektorra $AA^*f = \lambda f$.*

Bizonyítás. $\langle Ae, Ah\rangle = \langle A^*Ae, h\rangle = \langle \lambda e, h\rangle = \lambda\langle e, h\rangle = 0$.
$AA^*f = AA^*(Ae) = A((A^*A)e) = A(\lambda e) = \lambda Ae$.

Tétel. (Kettős főtengely-tétel). *Legyen $A : H \to K$ egy lineáris operátor. Ekkor*

$$\exists\,(e_1, \dots, e_N)\ TON \subset H \quad \exists\,(f_1, \dots, f_M)\ TON \subset K$$
$$\exists\,\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_{\min\{M,N\}} \geq 0$$
$$A = \sum_{k=1}^{\min\{M,N\}} \alpha_k f_k \otimes e_k^*\ .$$

Itt E és F a $Q_{A^*A} : x \mapsto \|Ax\|^2$ ill. $Q_{AA^*} : y \mapsto \|A^*y\|^2$ kvadratikus alakok főtengely-rendszerei.

Bizonyítás. Vehető $A \neq 0$. Legyen $E := (e_1, \dots, e_N)$ egy főtengely-rendszere a Q_{A^*A} valós kvadratikus alaknak (a Főtengely-tétel garantálja a létezését), vagy ami ugyanaz, az A^*A önadjungált operátornak. Tudjuk: ezzel

$$\begin{aligned}
&\exists\, \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0 \\
&Q_{A^*A}(x) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k |X_k^E(x)|^2 \ , \\
&A^*Ae_k = \lambda_k e_k \qquad (k = 1, \dots, N)\ .
\end{aligned}$$

A Lemma szerint $Ae_1, \dots, Ae_N$ páronként merőlegesek egymásra. Másrészt $\|Ae_k\|^2 = Q_{A^*A}(e_k) = \lambda_k$ $(\forall k)$. Vagyis az

$$\begin{aligned}
&f_k := \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} Ae_k \qquad (k = 1, \dots, N) \\
&\text{ahol} \quad r := \max\{k : \ \lambda_k > 0\}
\end{aligned}$$

vektorok ortonormált rendszert alkotnak a K térben, és velük

$$\begin{aligned}
Ax &= A\big(\textstyle\sum_k X_k^E(x) e_k\big) =^{Ae_k=0 \quad (k>r)}= \displaystyle\sum_{k=1}^{r} X_k^E(x) Ae_k = \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sqrt{\lambda_k} \langle x, e_k \rangle f_k == \sum_k \sqrt{\lambda_k} f_k \otimes e_k^*(x) \qquad (x \in H)\ , \\
A &= \sum_{k=1}^{r} \sqrt{\lambda_k} f_k \otimes e_k^*\ .
\end{aligned}$$

Egészítsük ki az $(f_1, \dots, f_r)$ rendszert egy $F := (f_1, \dots, f_M)$ TON rendszerré K-ban. Ezzel tehát

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=1}^{\min\{M,N\}} \alpha_k f_k \otimes e_k^* \quad \text{ahol} \quad \alpha_k := \big[\sqrt{\lambda_k} \ \ (k \leq r),\ 0 \ \ (k > r)\big]\ , \\
AA^* f_j &= \sum_{k=1}^{\min\{M,N\}} |\alpha_k|^2 f_k \otimes f_k^*(f_j) = |\alpha_j|^2 f_j \qquad (j = 1, \dots, M)\ .
\end{aligned}$$

Definíció. Az A **operátor kettős főtengely-rendszere** egy olyan E $TON \subset H$, F $TON \subset K$ rendszer-pár, amelyeknél az F^*AE mátrix főátlója egy csökkenő nem-negatív számsorozat, azon kívül az összes eleme 0.

Figyelembe véve a kvadratikus alakok főtengely-rendszereinek a konstrukcióját, a Tételből a következő leírást kapjuk.

Következmény. *Ha* $r := \dim \operatorname{ran}(A)\,(= \dim\{Ax : \ x \in H\})$ *és* $k = 1, \dots, n$ *mellett* e_k *maximum-helye az* $x \mapsto \|Ax\|$ *funkcionálnak az* $\{e : e \perp e_j \ \ (j < k)\}$ *altér egységgömbjén, akkor az* $\alpha_k := \|Ae_k\|$ $(k = 1, \dots, r)$ *számok pozitívok és az* $f_k := \alpha_k^{-1} A e_k$ *vektorok ortonormált rendszert alkotnak, amellyel*

$$A = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k f_k \otimes e_k^* \ .$$

Itt $\operatorname{ran} A = \operatorname{Span}_{k=1}^r f_k$ *és* $\left(\operatorname{Span}_{k=1}^r e_k\right)^{\perp} = \ker A\,(= \{x : \ Ax = 0\})$. *Tehát* $\dim \operatorname{ran} A + \dim \ker A = \dim H$.

Megjegyzés. Az iménti Következmény mutatja, hogy a $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ speciális esetekben "Rangszámtétel" alfejezet eredményei olyan bázisokkal is állnak, amelyek teljes ortonormált rendszerek.

Kvázi-inverz

Kérdés. Jóllehet, az $Ax = b$ egyenletnek (ahol H, K Euklideszi terek, $A \in \mathcal{L}(H, K)$ és $B \in K$) nincs mindig megoldása, a $\operatorname{ran} A := AH (= \{Ax : \ x \in H\})$ altérnek mindig van legközelebbi pontja b-hez. Milyen $x \in H$-ra $\|Ax - b\| = \min_z \|Az - b\|$?

Tétel. *Ha* $A = \sum_{k=1}^r \alpha_k f_k \otimes e_k^*$, *ahol* $\alpha_1, \dots, \alpha_r > 0$ *és az* $(e_1, \dots, e_N)$, $(f_1, \dots, f_M)$ *pár kettős főtengely-rendszere* A*-nak, akkor*

$$\left\{x \in H : \ \|Ax - b\| = \min_{z \in H} \|Az - b\|\right\} = \left(\textstyle\sum_{k=1}^r \alpha_k^{-1} e_k \otimes f_k^*(b)\right) + \underbrace{\ker A}_{\{x : \ Ax = 0\}} \ .$$

Bizonyítás. Tudjuk: $(f_1, \dots, f_r)$ $TON \subset \operatorname{ran} A = AH$. Így az Az alakú, tehát $\operatorname{ran} A$-beli vektorok közül

$$\widehat{b} := \sum_{k=1}^r \langle b, f_k \rangle f_k$$

van b-hez legközelebb. Most

$$
\begin{aligned}
Az = \widehat{b} &\iff \sum_{k=1}^{r} \alpha_k f_k \otimes e_k^*(b) = \widehat{b} \\
&\iff \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \langle z, e_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{r} \langle b, f_k \rangle f_k \\
&\iff \alpha_k \langle z, e_k \rangle = \langle b, f_k \rangle \quad (1 \le k \le r) \\
&\iff \exists\, h \perp e_1, \dots, e_r \quad z = h + \sum_{k=1}^{r} \langle z, e_k \rangle e_k = h + \sum_{k=1}^{r} \alpha_k^{-1} \langle b, f_k \rangle e_k \\
&\iff \exists\, h \in \ker A \quad z = h + \sum_{k=1}^{r} \alpha_k^{-1} e_k \otimes f_k^*(b) \ .
\end{aligned}
$$

Következmény. *Az $\|Ax - b\| = \min_{z \in H} \|Az - b\|$ feladat optimális megoldása, azaz a legkisebb normájú olyan vektor, amely minimalizálja a $z \mapsto \|Az - b\|$ funkcionált, a $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k^{-1} e_k \otimes f_k^*(b)$ vektor.*

Bizonyítás. Legyen $x := \sum_{k=1}^{r} \alpha_k^{-1} e_k \otimes f_k^*(b)$. Mivel $x \in \mathrm{Span}_{k=1}^{r} e_k$ és $\ker A = \left(\mathrm{Span}_{k=1}^{r} e_k\right)^{\perp}$, fennáll $x \perp \ker A$, tehát x a legkisebb normájú az $x + \ker A$ sokaság vektorai közül.

Következmény. *Jól-definiált lineáris leképezés az*

$$
(*) \qquad A^{[-1]} : \ b \mapsto \Big[x : \ \|Ax - b\| = \min_{z \in H} \|Az - b\| \ \text{ és } \ \|x\| = \min\{ \ \|x'\| : \ \|Ax' - b\| = \min_{z \in H} \|Az - b\| \Big] \ .
$$

Definíció. A $(*)$ formulával értelmezett lineáris $A^{[-1]} : K \to H$ operátor az $A(: H \to K)$ operátor **kvázi-inverz**e.

Megjegyzés. Fennáll

$$
A^{[-1]} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k^{-1} f_k \otimes e_k^* \quad \text{valahányszor} \quad A = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k e_k \otimes f_k^*
$$

alkalmas $(e_1, \dots, e_r)$ $ORTN \subset H$, $(f_1, \dots, f_r)$ $ORTN \subset K$ és $\alpha_1 \ge \dots \ge \alpha_r > 0$ mellett.