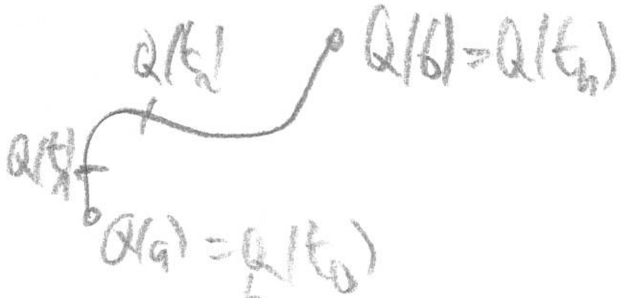
DIFFERENCIÁLOK d-KALKULUS

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ $\Leftarrow$ Nehéz- kérdés?

Interpretáció

$Q: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ GÖRBE

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$



$$f(b) - f(a) = \int_{t=a}^{b} \left[\frac{d}{dt} f(t)\right] dt =$$

$$= \int_{t=a}^{b} \left[\frac{d}{dt} f(\underbrace{Q_1(t)}_{x}, \underbrace{Q_2(t)}_{y})\right] dt =$$

$$= \int_{t=a}^{b} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\underset{\uparrow\text{HELY}}{Q(t)}) \cdot Q_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\underset{\uparrow\text{HELY}}{Q(t)})\, Q_2'(t)\right] dt =$$

$$= \int_Q \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy =$$

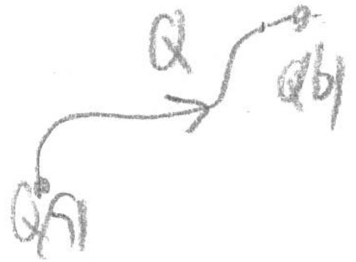
$$= \lim_{\text{FELOSZTÁSOK}} \left[\overset{\Delta f(t_0)}{f(Q(t_1)-Q(t_0))} + \dots + \overset{\Delta f(t_{n-1})}{f(Q(t_n)-f(Q(t_{n-1}))}\right]$$

$$\approx \left[\frac{\partial f}{\partial x}(Q(t_0)) \cdot Q_1'(t_0)\,(t_1 - t_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \dots\right]$$

TARTOMÁNY HATÁRA

$Q : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ görbe $\qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fgv

$$f(Q(b)) - f(Q(a)) = \int_Q df$$



<u>Def</u> Q HATÁRA $\partial Q = \{+Q(b), -Q(a)\}$ 1DIM-BAN

MI VAN TÖBB DIM-BAN

$Q : [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^3$ 2-dim tartomány $\mathbb{R}^3$-ban

$\partial Q =$

KIÜTIK EGYMÁST, CSAK A KÜLSŐ GÖRBÉK SZÁMÍTANAK

Ált. eset

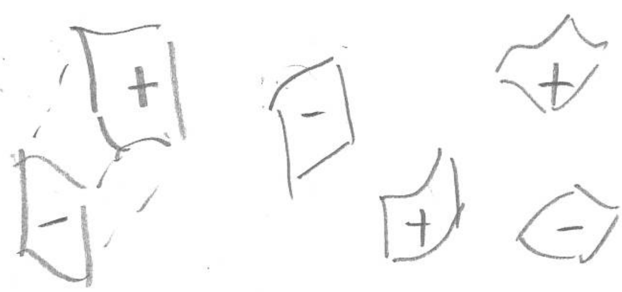
$Q : [a_1,b_1]\times\dots\times[a_k,b_k] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ k-dim tart. $\mathbb{R}^N$-ben

$\partial Q = \{$ K db (k-1)-dim tartomány pár ELŐJELEZVE $\} =$

$$= \bigcup_{j=1}^{k} \Big\{ \big[(t_1,\dots,\cancel{t_j},\dots,t_k) \mapsto Q(t_1,\dots,b_j,\dots,t_k)\big]\cdot(-1)^j + \big[(t_1,\dots,\cancel{t_j},\dots,t_k) \mapsto Q(t_1,\dots,a_j,\dots,t_k)\big]\cdot(-1)^j \Big\}$$

pl $K=3$ $N=3$

HATÁRA



$$\partial Q = \big[(t_2,t_3)\mapsto Q(b_1,t_2,t_3)\big] - \big[(t_2,t_3)\mapsto Q(a_1,t_2,t_3)\big] +$$
$$+(-1)\big[(t_1,t_3)\mapsto Q(t_1,b_1,t_3)\big] - (-1)\big[(t_1,t_3)\mapsto Q(t_1,a_1,t_3)\big] +$$
$$+\big[(t_1,t_2)\mapsto Q(t_1,t_2,b_3)\big] - \big[(t_1,t_2)\mapsto Q(t_1,t_2,a_3)\big]$$

Az előjelezés haszna: SZOMSZÉDOS BELSŐ OLDALAK ...
BEONTÁSNÁL KIÜTIK EGYMÁST

STOKES TÉTELE

Def DIFF FORMA DIFFERENCIÁLÁSA

$$\Omega = f_1(x_1,\dots,x_N)\,dx_{i_{1,1}}\wedge\dots\wedge dx_{i_{1,k}} + \dots + f_r(x_1,\dots,x_N)\,dx_{i_{r,1}}\wedge\dots\wedge dx_{i_{r,k}}$$

$$d\Omega = \{d[f_1(x_1,\dots,x_N)\,dx_{i_{1,1}}\wedge\dots\wedge dx_{i_{1,k}}]\} + d\dots \quad \text{TAGONKÉNT}$$

$$d[f(x_1,\dots,x_N)\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}] =$$

$$= df\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k} =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}dx_N\right]\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

Tétel

$$\boxed{\int_{\partial Q}\Omega = \int_Q d\Omega}$$

Stokesból Ha $\Omega = f\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$, $Q: [a_1,b_1]\times\dots\times[a_{k+1},b_{k+1}]\to\mathbb{R}^N$
2×FOLYT DIFF FGV-EKBŐL ELŐÁLLÍTVA,
akkor $m\to\infty$ részekre beosztjuk $[a_1,b_1],\dots,[a_{k+1},b_{k+1}]$-et
és veszünk egy $t^* = (t^*_1,\dots,t^*_{k+1})$ PARAMÉTERT

a t^*-ot tartalmazó m-edik beosztásban
$\int_{\partial Q^{(m)}}\Omega \Big/ \left\{\prod_{i=1}^{k}\left((b_i-a_i)/m\right)\right\}$ — HATÁRÉRTÉK ALAPJÁN